

Б. Е. ПОБЕДРЯ, С. В. ШЕШЕНИН

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛАМЕ  
 ОБ УПРУГОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Задаче о равновесии параллелепипеда посвящена обширная литература [1]. В настоящее время получил широкое распространение вариационно-разностный метод получения априори устойчивых разностных схем. Его применение для построения разностных аналогов уравнений теории упругости в перемещениях для параллелепипеда приводит к необходимости программирования большого числа различных разностных уравнений. Дело в том, что разностные уравнения, к которым приводит вариационно-разностный метод, имеют различный вид в разных точках параллелепипеда (по внутренним точкам уравнения будут одного типа, на каждой грани—другого и т. д.). Всего получается 27 типов различных уравнений. Ниже дается метод получения разностных уравнений для любой точки параллелепипеда по уравнениям, записанным в одной из его вершин. Получена разностная схема для ортотропного неоднородного упругого и упруго-пластического параллелепипеда. Предложен метод решения полученных разностных уравнений и приведено численное решение двух краевых задач.

1. Вторая крайняя задача теории упругости заключается в решении уравнений равновесия

$$Lu \equiv \text{div} (C \varepsilon(u)) + X = 0, \quad x \in V \quad (1)$$

при заданном на границе  $\Sigma$  векторе поверхностной нагрузки  $s^a$

$$lu = (C \varepsilon(u)) n \Big|_{\Sigma} = s \quad (2)$$

где  $C(x)$  — тензор модулей упругости,  $\varepsilon(u)$  — тензор деформаций, компоненты которого выражены по формулам Коши через вектор перемещений  $u$  [2],  $X$  — вектор объемных сил,  $n$  — единичный вектор внешней нормали к границе. Все величины будем считать безразмерными. Задача (1), (2) имеет решение, определяемое с точностью до смещения тела как жесткого целого, при известных условиях самоуравновешенности нагрузки [3]. Задача (1), (2) эквивалентна задаче минимизации лагранжиана [4]

$$W = 1/2 \int_V \sigma(u) \varepsilon(u) dV - \int_V Xu dV - \int_{\Sigma} s^a u^a d\Sigma \quad (3)$$

где  $\vec{\sigma}(\vec{u})$  — тензор напряжений, выраженный через вектор перемещений посредством закона Гука и формул Коши,  $V$  — область внутри параллелепипеда.

Начало декартовой системы координат поместим в одной из вершин параллелепипеда, а оси  $x_1, x_2, x_3$  направим вдоль его сторон. В области  $V$  введем равномерную сетку с шагом  $h_\alpha$  по направлению  $x_\alpha$ :  $h_\alpha = l_\alpha / (N_\alpha - 1)$ , где  $N_\alpha$  — число узлов сетки на ребре длиной  $l_\alpha$ , параллельном оси  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Введем обозначения:  $E$  — тождественный оператор,  $T_\alpha^-$  — оператор сдвига,  $\partial_\alpha$  — правая, а  $\partial_\alpha^-$  — левая разностные производные,  $\Lambda_\alpha$  — вторая разностная производная

$$E\vec{u} = \vec{u}, \quad T_\alpha^- \vec{u}(i_1, i_2, i_3) = \vec{u}(i_1 + n\delta_{1\alpha}, i_2 + n\delta_{2\alpha}, i_3 + n\delta_{3\alpha})$$

$$\partial_\alpha = (T_\alpha^- - E)/h_\alpha, \quad \partial_\alpha^- = (E - T_\alpha^-)/h_\alpha, \quad \Lambda_\alpha = \partial_\alpha^- \partial_\alpha$$

Далее обозначим

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}]_\alpha = 1/2 \left\{ \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} \vec{u} \vec{\varphi} h_\alpha + \sum_{i_\alpha=2}^{N_\alpha} \vec{u} \vec{\varphi} h_\alpha \right\}, \quad i_\beta, i_\gamma = \text{const}$$

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}]_\beta = [[\vec{u}, \vec{\varphi}]_\alpha]_\beta, \quad i_\gamma = \text{const}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma$$

Тогда разностными аналогами интегралов  $\int_V \vec{u} \vec{\varphi} dV$  и  $\int_V \vec{u} \vec{\varphi} d^2$  будут со-

ответственно

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}] = [[[\vec{u}, \vec{\varphi}]_{12}]_3]$$

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}]_2 = \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ [\vec{u}, \vec{\varphi}]_{3\alpha} |_{i_\alpha=1} + [\vec{u}, \vec{\varphi}]_{3\alpha} |_{i_\alpha=N_\alpha} \right\}$$

Норму определим выражением  $|\vec{u}| = [\vec{u}, \vec{u}]^{1/2}$ . Введем обозначение

$$f(k_1, k_2, k_3) = C_{1111} (\partial_{k_1} u_1)^2 + C_{2222} (\partial_{k_2} u_2)^2 + C_{3333} (\partial_{k_3} u_3)^2 + \\ + C_{1122} (\partial_{k_1} u_2 + \partial_{k_2} u_1)^2 + C_{1133} (\partial_{k_1} u_3 + \partial_{k_3} u_1)^2 + C_{2233} (\partial_{k_2} u_3 + \partial_{k_3} u_2)^2 + \\ + 2(C_{1123} \partial_{k_1} u_1 \partial_{k_2} u_2 + C_{1133} \partial_{k_1} u_1 \partial_{k_3} u_3 + C_{2233} \partial_{k_2} u_2 \partial_{k_3} u_3)$$

где  $k_1 = 1, \bar{1}$ ,  $k_2 = 2, \bar{2}$ ,  $k_3 = 3, \bar{3}$ . Поскольку  $\partial_\alpha^- = T_\alpha^- \partial_\alpha$ , то разностный аналог лагранжиана  $\tilde{W}$  для ортотропной среды будет иметь вид

$$\tilde{W}^h = 1/2 w^h = [\tilde{X}, \vec{u}] - [s^0, \vec{u}]_s \quad (4)$$

$$\text{где } \bar{w}^h = \sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \sum_{j_3=0}^1 \sum_{i_1=j_1+1}^{N_1+i_1-1} \sum_{i_2=j_2+1}^{N_2+i_2-1} \sum_{i_3=j_3+1}^{N_3+i_3-1} f_1(j_1, j_2, j_3) h_1 h_2 h_3 / 8 \quad (5)$$

$$f_1(j_1, j_2, j_3) = f(T_1^{-1} \partial_1, T_2^{-1} \partial_2, T_3^{-1} \partial_3)$$

Если компоненты тензора  $C$  разрывны на плоскостях, параллельных координатным плоскостям, то область  $V$  представим в виде объединения параллелепипедов  $\Pi_k$ , в которых тензор  $C$  непрерывен.

Тогда  $\bar{W}(V) = \sum_k \bar{W}(\Pi_k)$  и  $\bar{W}^h = \sum_k \bar{W}^h(\Pi_k)$ . Аналогично можно построить лагранжиан для тела, являющегося объединением конечного числа параллелепипедов. Однако ввести во всей области  $V$  единую равномерную сетку можно не всегда.

2. Лагранжиан  $\bar{W}^h$  есть функция конечного числа переменных  $\bar{u}(i_1, i_2, i_3)$ , поэтому для нахождения его минимума нужно решить уравнения

$$\frac{\partial \bar{W}(\bar{u})}{\partial u_\beta(i_1, i_2, i_3)} = 0, \quad i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha, \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (6)$$

которые запишем в виде

$$L^h \bar{u} + \bar{\Phi} = 0 \quad (7)$$

где

$$(\bar{L}^h \bar{u})_\beta = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}^h(\bar{u})}{\partial u_\beta(i_1, i_2, i_3)} \quad (8)$$

Сеточная функция  $\bar{\Phi}$  определяется следующим образом:

$$\bar{\Phi} = \bar{X} \text{ — во внутренних точках,}$$

$$\bar{\Phi} = \bar{X} + 2 \frac{s_\alpha^0}{h_\alpha} \text{ — на гранях, перпендикулярных оси } x_\alpha,$$

$$\bar{\Phi} = \bar{X} + 2 \left( \frac{s_\beta^0}{h_\beta} + \frac{s_\gamma^0}{h_\gamma} \right) \text{ — на ребрах, параллельных оси } x_\alpha,$$

$\bar{\Phi} = \bar{X} + 2 \sum_{\alpha=1}^3 \frac{s_\alpha^0}{h_\alpha}$  — в вершинах. Здесь  $s_\alpha^0$  — поверхностная нагрузка, действующая на грань, перпендикулярную оси  $x_\alpha$ .

Введем обозначение

$$g_\alpha(\bar{u}, i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3) = \frac{C_{\alpha\alpha}}{4h_\alpha^2} \bar{T}_\alpha^{j_\alpha} u_\alpha - \left( \frac{C_{\alpha\alpha}}{4h_\alpha^2} + \frac{C_{\alpha\beta}}{4h_\beta^2} + \frac{C_{\alpha\gamma}}{4h_\gamma^2} \right) u_\alpha +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_{\alpha\beta}}{4h_\beta^2} T_\beta^{j_\beta} u_\alpha + \frac{C_{\alpha\gamma}}{4h_\gamma^2} T_\gamma^{j_\gamma} u_\alpha + \sum_{\beta=1}^3 \left\{ \frac{z_{\alpha\beta}}{8h_\alpha h_\beta} \left\{ (C_{\alpha\beta\beta} - T_\beta^{j_\beta} C_{\alpha\beta\beta}) T_\beta^{j_\beta} u_\beta - \right. \right. \\
& - (T_\alpha^{j_\alpha} C_{\alpha\beta\beta} - C_{\alpha\beta\beta}) T_\alpha^{j_\alpha} u_\beta + (T_\alpha^{j_\alpha} C_{\alpha\beta\beta} + T_\beta^{j_\beta} C_{\alpha\beta\beta}) T_\alpha^{j_\alpha} T_\beta^{j_\beta} u_\beta - \\
& \left. \left. - (C_{\alpha\beta\beta} + C_{\alpha\beta\beta}) u_\beta \right\} \right\}, \quad z_{\alpha\beta} = z_{\beta\alpha}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \\
& C_{\alpha\beta} = (T_\alpha^{j_\alpha} C_{\alpha\beta\beta} - C_{\alpha\beta\beta})/2, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Тогда в вершинах оператор  $L^h$  можно записать в виде:

вершина  $(0, 0, 0)$

$$L_{(1)}^h \bar{u} = \bar{g}(\bar{u}, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad z_{12} = z_{23} = z_{13} = 1$$

вершина  $(l_1, 0, 0)$

$$L_{(2)}^h \bar{u} = \bar{g}(\bar{u}, N_1, 1, 1, -1, 1, 1), \quad z_{12} = -1, \quad z_{23} = 1, \quad z_{13} = -1$$

вершина  $(0, l_2, 0)$

$$L_{(3)}^h \bar{u} = \bar{g}(\bar{u}, 1, N_2, 1, 1, -1, 1), \quad z_{12} = -1, \quad z_{23} = -1, \quad z_{13} = 1$$

вершина  $(l_1, l_2, 0)$

$$L_{(4)}^h \bar{u} = \bar{g}(\bar{u}, N_1, N_2, 1, -1, -1, 1), \quad z_{12} = 1, \quad z_{23} = z_{13} = -1$$

вершина  $(l_1, 0, l_3)$

$$L_{(5)}^h \bar{u} = \bar{g}(\bar{u}, 1, 1, N_3, 1, 1, -1), \quad z_{12} = 1, \quad z_{23} = z_{13} = -1$$

вершина  $(0, l_2, l_3)$

$$L_{(6)}^h \bar{u} = \bar{g}(\bar{u}, N_1, 1, N_3, -1, 1, -1), \quad z_{12} = z_{23} = -1, \quad z_{13} = 1$$

вершина  $(l_1, l_2, l_3)$

$$L_{(7)}^h \bar{u} = \bar{g}(\bar{u}, 1, N_2, N_3, 1, -1, -1), \quad z_{12} = -1, \quad z_{23} = 1, \quad z_{13} = -1$$

$$L_{(8)}^h \bar{u} = \bar{g}(\bar{u}, N_1, N_2, N_3, -1, -1, -1), \quad z_{12} = z_{23} = z_{13} = 1$$

где  $\bar{g}$  — вектор с компонентами  $g_1, g_2, g_3$ .

Для получения разностных уравнений в остальных узлах сетки используем аддитивность лагранжиана. Рассмотрим внутренний узел  $(i_1, i_2, i_3)$  и проведем через него три плоскости, соответственно параллельные координатным плоскостям. Область  $V$  разобьется на 8 параллелепипе-

дов  $V = \sum_{k=1}^3 \Pi_k$ ,  $\bar{\omega}^h(V) = \sum_{k=1}^3 \bar{\omega}^h(\Pi_k)$ . Из (8) следует, что  $\bar{L}^h$  представляется в виде

$$\bar{L}^h = \sum_{k=1}^3 L_{(k)}^h, \quad \bar{L}_{(k)}^h = \bar{g}(u, i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3) \quad (9)$$

где числа  $j_1, j_2, j_3, z_1, z_2, z_3$  зависят от  $k$ , как указано выше.

Аналогично, на гранях  $L^h$  равен сумме четырех, а на ребрах — сумме двух операторов  $L_{(k)}^h$ , соответствующих тем вершинам, которые принадлежат данной грани или данному ребру. Таким образом,  $\bar{L}^h$  строится одинаково для точек непрерывности или точек разрыва компонент тензора  $C$ . Также в виде суммы соответствующего числа операторов  $L_{(k)}^h$  получим  $L^h$  в любой точке тела, составленного из параллелепипедов. Во внутренних точках для случая непрерывных компонент тензора  $C$  оператор  $L^h$  имеет вид

$$\begin{aligned} (L^h u)_\alpha = & \sum_{\beta=1}^3 \partial_\beta (C_{\alpha\beta} \partial_\beta u_\alpha) + \frac{1}{4} \sum_{\beta=1}^3 \{ \partial_\alpha (C_{\alpha\beta\beta} \partial_\beta u_\beta) + \\ & + \partial_\beta (C_{\alpha\beta\beta} \partial_\alpha u_\beta) + \partial_\beta (C_{\alpha\beta\beta} \partial_\beta u_\alpha) + \partial_\beta (C_{\alpha\beta\beta} \partial_\beta u_\beta) \} + \\ & + \partial_\alpha (C_{\alpha\beta\beta} \partial_\beta u_\alpha) + \partial_\beta (C_{\alpha\beta\beta} \partial_\alpha u_\beta) + \partial_\beta (C_{\alpha\beta\beta} \partial_\beta u_\alpha) + \partial_\beta (C_{\alpha\beta\beta} \partial_\beta u_\beta) \} \quad (10) \end{aligned}$$

$\alpha, \beta = 1, 2, 3.$

В случае, когда компоненты  $C_{ijkl}$  постоянны, вычисление  $\bar{L}^h$  во внутренних точках по формуле (10), а на границе  $\Sigma$  — в виде суммы соответствующего числа операторов  $L_{(k)}^h$  приводит к небольшому удлинению программы, зато время счета сокращается более, чем вдвое.

3. Свойства разностной схемы (7) известны [5]. При условии

$$C_{ijkl} z_{ij} \varepsilon_{kl} \geq \nu_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad \nu_0 > 0, \quad ijkl = 1, 2, 3 \quad (11)$$

схема (7) устойчива. Для изотропного тела

$$C_{ijkl} = \lambda(x) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(x) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (12)$$

и  $\nu_0 = 2 \sin \mu(x)$ , где  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе. Из (8) при учете того, что  $\bar{\omega}^h$  — квадратичная форма, следуют соотношения

$$\bar{\omega}^h(u) = [-L^h u, u], \quad \bar{\omega}^h(u, \varphi) = [-\bar{L}^h u, \varphi] \quad (13)$$

где  $\bar{\omega}(u, \varphi)$  — симметричная билинейная форма, соответствующая квадратичной форме  $\bar{\omega}^n(u)$ . Из (13) следуют самосопряженность оператора  $L^h: [L^h u, \varphi] = [u, L^h \varphi]$  и положительная определенность оператора  $-L^h: [-L^h u, u] > 0$ .

4. Получим разностный аналог краевой задачи теории малых упруго-пластических деформаций при активном нагружении [6] или нелинейной теории упругости. Для этого в  $\bar{L}^h$  достаточно положить

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda(\varepsilon_n) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\varepsilon_n) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \mu(\varepsilon_n) &= \nu(1 - \omega(\varepsilon_n)), \quad \lambda(\varepsilon_n) = K - 2/3 \nu(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_n &= (e_{ij} e_{ij})^{1/2}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $K$  — модуль объемного сжатия,  $\varepsilon_n$  — интенсивность деформаций,  $\omega$  — функция пластичности Ильюшина [6]. Разностные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций запишем в виде

$$\bar{P}_{hu} + \bar{\Phi} = 0 \quad (15)$$

На функцию  $\omega$  наложим известные условия [6]

$$0 \leq \omega < \omega + \frac{d\omega}{d\varepsilon_n} \varepsilon_n \leq \omega_0 < 1, \quad \frac{d\omega}{d\varepsilon_n} > 0 \quad (16)$$

На части границы  $\Sigma$  могут быть заданы некоторые компоненты вектора перемещений  $\bar{u}$ . Тогда в таких узлах по соответствующим направлениям вместо уравнений (7) имеем заданные компоненты вектора перемещений.

5. Для решения задачи (7) используем итерационный метод [7]

$$\bar{B} \frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n}{\tau_{n+1}} = \bar{L}^h \bar{u}^n + \bar{\Phi}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (17)$$

где  $\tau_n$  — чебышевский набор параметров (Ч. Н. П.) [7]

$$\tau_n = 2 \left/ \left\{ \gamma_2 + \gamma_1 - (\gamma_2 - \gamma_1) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2N} \right\} \right. \quad (18)$$

а оператор  $\bar{B}$  имеет вид

$$\bar{B} = \prod_{i=1}^3 (\bar{E} + \tau_i \bar{R}_i), \quad \bar{R}_i = \begin{pmatrix} -\Lambda_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_{ii} \end{pmatrix}$$

Постоянные  $\gamma_1, \gamma_2$  определяются из неравенств

$$\gamma_1 [Bu, u] \leq [-L^h u, u] \leq \gamma_2 [Bu, u] \quad (19)$$

которые запишем сокращенно  $\gamma_1 B \leq -L^h \leq \gamma_2 B$ . Выбор оптимального параметра  $\chi$  и  $\gamma_1, \gamma_2$  известны [5, 7].

Описанный метод был реализован в виде программ на ФОРТРАНе для ЭВМ БЭСМ-6. Рассмотрим решение задачи М. М. Филоненко-Бородича [8] о сжатии параллелепипеда  $l_{1,2} = 1, l_3 = 2$ .

$N_{1,2} = 9, N_3 = 17$  куполообразной нагрузкой

$$s_{1,2} = 0, s_3 = (1 - \cos(2\pi x_1))(1 - \cos(2\pi x_2)) \quad \text{при } x_3 = 0$$

$$s_{1,2} = 0, s_3 = -(1 - \cos(2\pi x_1))(1 - \cos(2\pi x_2)) \quad \text{при } x_3 = 2$$

(остальные грани свободны). Итерационный процесс (17) останавливался, как только удовлетворялось неравенство

$$\|u^{n+1} - u^n\| / \|u^n\| \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \quad (20)$$

Для выполнения этого условия достаточно провести пять циклов из восьми итераций ( $N = 8$ ). Это занимает около пяти минут. Порядок решаемой системы равен 4131. В таблице 1 приведено сравнение  $\sigma_{11}$  при  $x_3 = 1$  с другими решениями этой задачи.

Цифрой 1 обозначено решение М. М. Филоненко-Бородича [8], цифрой 2 — решение В. П. Нетребко, Л. Е. Мальцева, Н. П. Матвеева [9], цифрой 3 — решение М. Мишонова [10], цифрой 4 — предлагаемое решение.

Приведем решение задачи о сжатии куба  $l_1 = 1, N_2 = 11, E = 1, \nu = 1/3$  жесткими плитами без проскальзывания, то есть при  $x_2 = 0, u = 0$ , при  $x_3 = 1, u_{1,2} = 0, u_3 = -0.1$ , боковая поверхность свободна. Для удовлетворения неравенства (20) достаточно в этой задаче двух циклов из восьми итераций. На фиг. 1, 2 приведено распределение интенсивности напряжений  $\sigma_{ij}$  и максимального удлинения  $\epsilon_{max}$  в плоскости  $x_3 = 0.5$ . В кубе образуются две пирамидальные области (основаниями пирамид служат сжимающие плиты), в которых  $\sigma_{ij}$  и  $\epsilon_{max}$  существенно меньше значений этих же величин в средней части куба, то есть при  $x_2 = 0.5$ . Такое распределение  $\sigma_{ij}$  и  $\epsilon_{max}$  соответствует наблюдаемому в опытах распадение куба на куски пирамидальной формы [11, 12]. Известно [12], что разрушение в отсутствие смазки происходит при сжимающей силе в 2—4 раза большей, чем в случае наличия смазки. Полученное решение показывает, что классические критерии прочности, согласно которым разрушение происходит, когда, например,  $\sigma_{ij}$  или  $\epsilon_{max}$  достигают заданных значений, не могут объяснить отмеченной разницы в сопротивлении сжатию, ибо в средней части куба напряженное состояние практически одинаково в случаях наличия или отсутствия смазки (разница составляет около 7%).

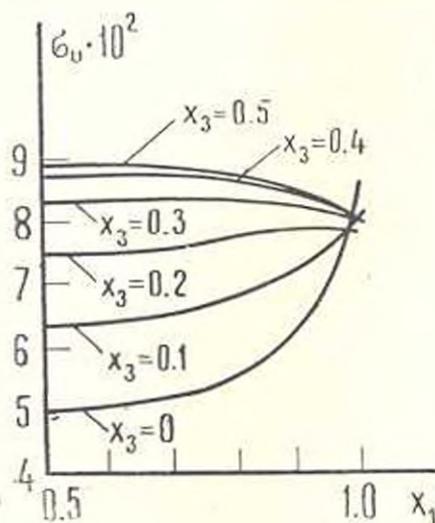
6. Для решения задачи теории малых упруго-пластических деформаций (15) применим итерационный метод

$$L^h \frac{\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m}{\tau_{m+1}} + \bar{P}_h \vec{u}^m + \bar{\Phi} = 0 \quad (21)$$

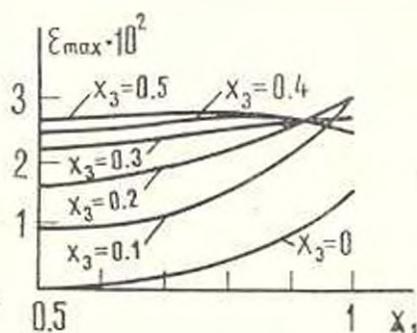
являющийся модификацией метода упругих решений Ильюшина [6]. На каждой итерации схемы (21) нужно решать задачу теории упругости

$$L^h \vec{u}^{m+1} + \bar{\Phi}^m = 0 \quad (22)$$

$$\text{где } \bar{\Phi}^m = -L^h \vec{u}^m + \tau_{m+1} (\bar{P}_h \vec{u}^m + \bar{\Phi})$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Параметры  $\tau_m$  возьмем по формуле (18), а  $\gamma_1, \gamma_2$  определяются теперь из неравенств

$$\gamma_1(-L^h) \leq -\bar{P}_h(\vec{v}) < \gamma_2(-L^h) \quad (23)$$

Из неравенства (23) и равенства [7]

$$[P_h(\vec{u}_1) - P_h(\vec{u}_2), \Delta \vec{u}] = [-P_h(\vec{v}) \Delta \vec{u}, \Delta \vec{u}], \quad \vec{v} = \vec{u}_1 + t \Delta \vec{u}$$

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1, \quad t \in [0, 1]$$

получим

$$[P_h(\vec{u}_1) - P_h(\vec{u}_2), \Delta \vec{u}] \geq \gamma_1[-L^h \Delta \vec{u}, \Delta \vec{u}]$$

Отсюда, используя разностные аналоги неравенств Корна и Пуанкаре [5]

$$\int u_{i,j} u_{i,j} dV \leq M_1 \int \varepsilon_{i,j} \varepsilon_{i,j} dV, \quad \int u_i u_i dV \leq M_2 \int u_{i,j} u_{i,j} dV$$

справедливые при условиях

$$\int_V u dV = 0, \quad \int_V \operatorname{rot} \bar{u} dV = 0$$

при учете (11) получим

$$[-(\bar{P}_\lambda(\bar{u}_2) - \bar{P}_\lambda(\bar{u}_1)), \bar{u}_2 - \bar{u}_1] > \gamma_1 \frac{2\mu}{M_1 M_2} [\bar{u}_2 - \bar{u}_1]^2$$

Это неравенство выражает сильную монотонность оператора  $-\bar{P}_\lambda$  и обеспечивает [7] существование и единственность решения задачи (15), устойчивость разностной схемы (15).

Оператор  $\bar{P}_\lambda$ , определяемый в виде

$$\bar{P}_\lambda(\bar{v}) \bar{u} = \left. \frac{dP_\lambda(\bar{v} + t\bar{u})}{dt} \right|_{t=0}$$

есть оператор  $L^k$ , если в последнем положить

$$C_{ijkl}(\bar{v}) = \gamma(v_a) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(v_a) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - 2\mu \frac{d\omega(v_a)}{dv_a} \frac{v_{ij} v_{kl}}{v_a} \\ v_{ij} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i}) - 1/3 v_{k,k} \delta_{ij}, \quad v_a = (v_{ij} v_{ij})^{1/2} \quad (24)$$

Тензор  $C$  (24) определяет некоторую упругую анизотропную среду, для которой

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 2\mu (1 - \omega(v_a)) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - 2\mu \frac{d\omega}{dv_a} \frac{v_{ij} v_{kl}}{v_a} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + K \varepsilon_{kk} \varepsilon_{ii}$$

Тогда будем иметь

$$2\mu \left( 1 - \omega - \frac{d\omega}{dv_a} v_a \right) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + K \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \leq \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \leq 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + K \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \quad (25)$$

Из (13), (25) следуют неравенства (23) с  $\gamma_1 = \inf \left( 1 - \omega - \frac{d\omega}{dv_a} v_a \right)$ ,  $\gamma_2 = 1$ .

Точность, с которой нужно решать задачу (17), невелика [13]. При этом внешний итерационный процесс будет осуществляться по схеме (21), но не с оператором  $L^k$ , а с «близким» оператором  $L^n (E - D_M)^{-1}$ , где  $D_M$  — разрешающий оператор внутреннего итерационного процесса (17) [14]. В задаче о сжатии куба из упруго-пластического материала с линейным упрочнением ( $\nu = 1$ ,  $N_0 = 5$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ) равномерно распределенной по граням  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 1$  нормальной нагрузкой оказалось оптимальным проводить один внутренний цикл из восьми итераций. Если же зада-

չու (22) լուծել «ճշգրիտ», այսինքն չափով, որպեսզի կատարվի պայման (20), որպեսզի արագությամբ արտաքին իտերացիոնական գործընթացը կարճանա 2%: Երբ պարզաբանում ենք տարբերությունները արագության (21) և մեթոդի կոնվերգենցիայի (21) դեպքում  $\tau_{\text{կո}} \equiv 1$  կատարվում է շարք լուծումների:

Տախուա 1

	$x_1=0$ $x_2=0$	$x_1=0.25$ $x_2=0$	$x_1=0.5$ $x_2=0$	$x_1=0.25$ $x_2=0.25$	$x_1=0.5$ $x_2=0.25$	$x_1=0.5$ $x_2=0.5$
1	0.00	1.12	0.97	1.07	1.10	1.47
2	0.90	0.94	0.89	1.03	1.036	1.10
3	0.95	—	1.00	0.97	1.03	1.06
4	0.92	0.96	1.01	1.00	1.047	1.10

Տախուա 2

$\tau_{\text{կո}}$	մեթոդ կոնվերգենցիայի		Չ. Ո. Ս.	
	$\delta_{\text{ն}}$	$\delta_{14}$	$\delta_{\text{ն}}$	$\delta_{14}$
$2.5 \cdot 10^{-3}$	0.20	0.09	0.06	0.01
$5 \cdot 10^{-3}$	0.30	0.13	0.04	0.008

արտաքին խնդրի խնդիրը: Արդյունքները տրվում են տախուա 2-ում: Արագության մոդուլի կոնվերգենցիայի մոդուլը  $\mu$  կախված է մոդուլի 0.1, կոնվերգենցիայի  $\tau_{\text{կո}} = 0.1\%$ :

$$\delta_m = \|B^{-1}(P_{\text{կո}} \bar{u}^m + \Phi)\| / \|B^{-1}(\bar{P}_{\text{կո}} \bar{u}^m + \Phi)\|$$

Մեխանիկո-մաթեմատիկական ֆակուլտետ  
ՄԳՄ իմ. Մ. Յ. Լոմոնոսով

Ինստիտուտ 22 ՄԻ 1980

Ս. Ս. ԳՈՐԵԿՅԱՆ, Ս. Վ. ՆԵՇԵՆԿԻ

### ԱՌՈՒՇՎԱԿԱՆ ԶՈՒԳԱՆՆԵՌԱՆԻՍՏԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԿ ԼԱՄԵՆԻ ԽՆԴԻՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒՇՈՒՄԸ

Ս. Վ. Ֆ. Ո. Ֆ. Ո. Վ.

Վարիացիոն-տարրերական եղանակով ստացվել է տարրերական սխեմա, որը մոտարկում է առաձգականության և փոքր առաձգականության դեֆորմացիաների առաձգականության տեղափոխություններով խնդիրը ծավալային և մակերևութային ուժերի ազդեցության տակ գտնվող զուգահեռանիստի հավասարակշռության մասին: Յուրաքանչյուրը է արված զուգահեռանիստի դանիացած կետում տարրերական հավասարումների ստացման հարաբերություններ, որոնք գրվում են դաճաթներից մեկի համար: Երկու եզրային խնդիրների համար բերվում են թվային լուծումներ:

# A NUMERICAL SOLUTION FOR THE LAME PROBLEM OF AN ELASTIC PARALLELEPIPED

B. E. P. BEDRYA, S. V. SHESHENIN

## S u m m a r y

A variational-difference method is used to obtain a system of difference equations, approximating the boundary problem in the theory of elasticity and the deformational theory of plasticity on the equilibrium of parallelepiped under the action of wall and surface forces. The possibility to obtain the difference equations in any point of parallelepiped, using the equations obtained for the vertex, is studied. Numerical solutions for two boundary problems of elasticity are presented.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Суслана Н. Н. Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда. В сб.: Итоги науки и техники ВНИИПИ АН СССР. Сер. механ. тверд. деф. тела. М., Наука, 1980, т. 13, с. 187—296.
2. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. М., изд-во Моск. ун-та, изд. 2-е, 1979.
3. Новачкий В. Теория упругости. М., Мир, 1975.
4. Победря Б. Е. Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела. ПММ, 1979, т. 43, № 3, с. 531—541.
5. Белухина Н. Г. Разностные схемы для решения некоторых задач статической теории упругости в анизотропном случае. Вычисл. методы и программирование. М., изд-во Моск. ун-та, 1972, № 19, с. 123—145.
6. Ильюшин А. А. Пластичность, ч. 1. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
7. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978.
8. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ, 1951, т. 15, вып. 2, с. 137—148.
9. Нестребо В. П., Мальцев А. Е., Матвеев Н. П. Об одном видоизменении вариационного метода Папковича—Филоненко—Бородича решения пространственных задач теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1973, № 6, с. 133—138.
10. Мишинов М. Общ. метод за решение на пространствената задача на еластичността за параллелепипеда. В сб. Изв. Техн. ин-т Бълг. АН Софий. 1960, кн. 9—10.
11. Гончаров Н. Г. Прочность ламинных материалов в условиях различных напряженных состояний. М.—Л., Госстройиздат, 1960.
12. Фелпс А. Техническая механика. Сопротивление материалов, т. 3. М.—Л., ОНТИ, 1937.
13. Дьяконов Е. Г., Николаев И. К. О решении некоторых задач теории сетчатых оболочек. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1973, т. 13, № 4, с. 938—951.
14. Дьяконов Е. Г. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эрмитовых по спектру. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1966, т. 6, № 1, с. 12—34.