ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ЗАДАЧА БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ИЗ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

В связи с расширением области применения резины и различных пластмасс в технике за последние 30 лет теория больших упругих деформаций быстро развилась и приобрела довольно компактную форму. Больших успехов достигла эта теория в области исследования идеально-упругого несжимаемого материала, что обусловливается широким применением вулканизированной резины и сравнительной простотой поставленных проблем.

Однако, несмотря на обилие точных и приближенных общих решений различных важных проблем, которые в какой-то мере опираются на физические законы между напряжениями и деформациями, сами эти законы невозможно считать достаточно исследованными для широкого диапазона деформаций многих сжимаемых материалов, допускающих большие упругие деформации. Например, конкретные выражения потенциальной энергии для сжимаемых упругих материалов известны только в рамках теории упругости второго и третьего порядка [1, 2]. Этот факт, по-видимому, связан со сложностью экспериментов, которые должны охватывать весь диапазон деформаций.

В связи с этим в работе [3] предлагается кусочно-линейный закон связи между напряжениями и деформациями, который опирается на ограниченное число экспериментальных данных, необязательно охватывающих весь диапазон деформаций, или на заранее известный закон. Суть этого закона заключается в том, что непрерывная функция, связывающая напряжения с деформациями, аппроксимируется дискретной моделью, представляющей собой множество значений указанной функции в некотором конечном числе точек области ее определения в совокупности с кусочно-линейными аппроксимациями этой функции на некотором конечном числе подобластей.

В настоящей работе определяются упругие постоянные для упругого сжимаемого материала при кусочно-линейном законе связи между напряжениями и деформациями при больших деформациях и приводится пример составления каталога для этих постоянных. Рассматривается задача цилиндрического изгиба прямоугольного параллелепипеда. Получены простые соотношения для определения деформированного и напряженного состояний. В качестве численного примера решается задача изгиба параллелепипеда в круглую цилиндрическую трубу.

§ 1. В практически возможном диапазоне деформаций данного упругого сжимаемого материала по главным направлениям деформаций фиксируется конечное число узловых точек с идентификационным номером (α, β, γ), характеризующихся главными удлинениями $\lambda^{(\alpha)}$, $\lambda^{(\beta)}$, $\lambda^{(\gamma)}$, которые определяются [3]

$$\lambda^{(\delta)} = (1 + e \operatorname{sign} \delta)^{2|\delta|}$$

$$(\delta = -m, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n)$$

где m и n — натуральные числа, e — малая величина, квадратами и высшими степенями которой в условиях поставленной задачи можно пренебречь относительно e. Диапазон деформаций разделяется на то же число подобластей с теми же идентификационными номерами (α, β, γ), так что

$$1 - e \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda^{(\alpha)}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda^{(\beta)}}, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda^{(\gamma)}} \leqslant 1 + e \tag{1.1}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — главные удлинения, соответствующие подобласти (α, β, γ).

В узловых точках даются главные значения напряжений, которые находятся экспериментальным, либо теоретическим путем (если известен закон состояния данного материала), и называются глобальными напряжениями. Затем на основании глобальных напряжений строится кусочно-линейный закон связи между напряжениями и деформациями, так что в каждой подобласти (α, β, γ) напряжения определяются следующими простыми выражениями [3]:

$$\sigma_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} = B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} + b_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)} e_j \tag{1.2}$$

где $B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ — глобальные напряжения подобласти (α, β, γ), $b_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ — упругие постоянные, которые определяются выражениями

$$\begin{gathered}
b_{i1}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\operatorname{sign} \alpha}{e} \left(2 \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^k B_i^{(\alpha-k, \beta, \gamma)} - B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} - (-1)^\alpha B_i^{(0, \beta, \gamma)} \right) + \\
+ (-1)^\alpha (\lambda_0 + 2\delta_{i1}\mu_0) \\
b_{i2}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\operatorname{sign} \beta}{e} \left(2 \sum_{k=0}^{\beta} (-1)^k B_i^{(\alpha, \beta-k, \gamma)} - B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} - (-1)^\beta B_i^{(\alpha, 0, \gamma)} \right) + \\
+ (-1)^\beta (\lambda_0 + 2\delta_{i2}\mu_0) \\
b_{i3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\operatorname{sign} \gamma}{e} \left(2 \sum_{k=0}^{\gamma} (-1)^k B_i^{(\alpha, \beta, \gamma-k)} - B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} - (-1)^\gamma B_i^{(\alpha, \beta, 0)} \right) + \\
+ (-1)^\gamma (\lambda_0 + 2\delta_{i3}\mu_0)
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где δ_{ij} — символы Кронекера. Для фиксированных значений (α, β, γ) имеем

$$B_1^{(\alpha, \beta, \gamma)} = B_1^{(\alpha, \gamma, \beta)} = B_2^{(\beta, \alpha, \gamma)} = B_2^{(\gamma, \alpha, \beta)} = B_3^{(\beta, \gamma, \alpha)} = B_3^{(\gamma, \beta, \alpha)}$$

Из (1.3) вытекает

$$b_{i1}^{(0,\,\beta,\,\gamma)} = \lambda_0 + 2\delta_{i1}\mu_0, \quad b_{i2}^{(\alpha,\,0,\,\gamma)} = \lambda_0 + 2\delta_{i2}\mu_0, \quad b_{i3}^{(\alpha,\,\beta,\,0)} = \lambda_0 + 2\delta_{i3}\mu_0 \quad (1.4)$$

Выражения (1.3) и (1.4) позволяют для исследуемых конкретных материалов составить каталоги определения упругих постоянных $b_{ij}^{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}$. Для иллюстрации в табл. 1 приводится пример составления каталога, где при определении глобальных напряжений $B_i^{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}$ использованы формула Мурнагана с коэффициентами, соответствующими полистиролу [1, 2], и решение задачи однородного растяжения упругого изотропного тела при больших деформациях [4].

Приведенные в табл. 1 постоянные соответствуют выбранной нумерации главных направлений. При ином выборе нумерации индексы постоянных $B_i^{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}$ и $b_{ij}^{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}$ меняются соответствующим образом. Например, если в таблице даны значения постоянных, соответствующие подобласти с номером (α, β, γ), то для подобласти (β, α, γ), где α, β, γ — фиксированные числа, они определяются следующим образом:

$$B_1^{(\beta,\,\alpha,\,\gamma)} = B_2^{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}, \quad B_2^{(\beta,\,\alpha,\,\gamma)} = B_1^{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}, \quad B_3^{(\beta,\,\alpha,\,\gamma)} = B_3^{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}$$

$$b_{11}^{(\beta,\,\alpha,\,\gamma)} = b_{22}^{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}, \quad b_{12}^{(\beta,\,\alpha,\,\gamma)} = b_{21}^{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}, \quad b_{13}^{(\beta,\,\alpha,\,\gamma)} = b_{23}^{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)} \text{ и т. д.}$$

Рассматриваемый кусочно-линейный закон позволяет:

1. Получить конкретные выражения физической связи между напряжениями и деформациями для упругих сжимаемых материалов, допускающие деформации, выходящие за пределы теории упругости второго или третьего порядка.

2. Упростить соотношения теории упругости с помощью ввода простого линейного физического закона.

3. Для определения упругих постоянных использовать известные физические законы или экспериментальные данные, необязательно охватывающие весь диапазон деформаций, что позволяет исходить из имеющихся возможностей.

§ 2. Предположим, что упругий прямоугольный параллелепипед в системе прямоугольных декартовых координат (X_1, X_2, X_3) занимает область

$$X_1 = a_1, \qquad X_1 = a_2 = a_1 + h$$

$$X_2 = \pm b, \qquad X_3 = \pm c$$

Пусть параллелепипед деформируется в цилиндрическую панель, которая в цилиндрических координатах (r, θ, z) определяется выражениями

$$r = r(X_1), \qquad \theta = \frac{X_2}{\lambda k}, \qquad z = \lambda X_3 \qquad (2.1)$$

где λ — постоянный коэффициент растяжения в направлении X_3, k — постоянная.

Таблица 1

№ п/п	№ подобласти	№ главн. направ. i	Главные удлинен. λ_i	Глобальн. напряж. B_i 10^{-3} $н/см^2$	Коэффициенты b_{ij} 10^{-3} $н/см^2$		
					b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}
1	0, 0, 0	1	1	0	27	14	14
		2	1	0	14	27	14
		3	1	0	14	14	27
2	1, 0, 0	1	1.21	5.0	23	14	14
		2	1	4.4	30	27	14
		3	1	4.4	30	14	27
3	2, 0, 0	1	1.4641	12.0	47	14	14
		2	1	9.0	16	27	14
		3	1	9.0	16	14	27
4	−1, 0, 0	1	0.81	− 3.0	3	14	14
		2	1	− 2.4	10	27	14
		3	1	− 2.4	10	14	27
5	−2, 0, 0	1	0.6561	− 7.9	46	14	14
		2	1	− 7.0	36	27	14
		3	1	− 7.0	36	14	27
6	0, 1, 1	1	1	6.4	27	6	6
		2	1.21	10.6	14	35	42
		3	1.21	10.6	14	42	35
7	0, 1, 2	1	1	10.6	27	2	36
		2	1.21	15.0	14	33	2
		3	1.4641	16.5	14	31	24
8	0, −1, −1	1	1	− 4.9	27	11	11
		2	0.81	− 6.4	14	13	20
		3	0.81	− 6.4	14	20	13
9	0, −1, −2	1	1	− 9.2	27	8	32
		2	0.81	−10.5	14	8	21
		3	0.6561	−11.5	14	22	38
10	0, 1, −1	1	1	0.8	27	18	22
		2	1.21	1.4	14	11	22
		3	0.81	− 0.3	14	13	20
11	0, 1, −2	1	1	− 3.0	27	26	16
		2	1.21	− 2.4	14	19	16
		3	0.6561	− 2.4	14	10	30
12	0, 2, −1	1	1	5.0	27	24	26
		2	1.4641	9.0	14	65	16
		3	0.81	2.9	14	21	34
13	1, 1, −1	1	1.21	6.3	28	35	29
		2	1.21	6.3	35	28	29
		3	0.81	2.7	16	16	10
14	1, 1, −2	1	1.21	2.2	25	32	12
		2	1.21	2.2	32	25	12
		3	0.6561	− 1.0	31	31	27
15	−1, −1, 1	1	0.81	− 3.4	15	17	16
		2	0.81	− 3.4	17	15	16
		3	1.21	− 1.7	17	17	5
16	−1, −1, 2	1	0.81	1.0	13	5	28
		2	0.81	1.0	5	13	28
		3	1.4641	5.4	22	22	66
17	−1, 1, 2	1	0.81	6.1	18	18	18
		2	1.21	12.1	15	44	23
		3	1.4641	14.4	7	40	53

Тензор деформации γ_{ij} и главные удлинения деформации λ_i определяются следующими выражениями [5]

$$\gamma_{11}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(r')^2}\right),\quad \gamma_{22}=\frac{1}{2}\left(r^2-\lambda^2k^2\right),\quad \gamma_{33}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\gamma_{12}=\gamma_{23}=\gamma_{31}=0,\quad r'=\frac{dr(X_1)}{dX_1} \tag{2.2}$$

$$\lambda_1=r',\quad \lambda_2=\frac{r}{\lambda k},\quad \lambda_3=\lambda \tag{2.3}$$

Если в какой-то точке деформированного тела λ_i находится в пределах

$$\begin{aligned}\lambda^{(\alpha)}(1-e)&\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda^{(\alpha)}(1+e)\\ \lambda^{(\beta)}(1-e)&\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda^{(\beta)}(1+e)\\ \lambda^{(\gamma)}(1-e)&\leqslant\lambda_3\leqslant\lambda^{(\gamma)}(1+e)\end{aligned} \tag{2.4}$$

то деформированное состояние в этой точке соответствует подобласти (α, β, γ). Тогда относительные удлинения e_i, соответствующие этой подобласти, выражаются следующим образом:

$$e_1=\frac{\lambda_1}{\lambda^{(\alpha)}}-1=\frac{r'}{\lambda^{(\alpha)}}-1,\quad e_2=\frac{\lambda_2}{\lambda^{(\beta)}}-1=\frac{r}{\lambda^{(\beta)}k\lambda}-1$$

$$e_3=\frac{\lambda}{\lambda^{(\gamma)}}-1,\ \text{причем}\ -e\leqslant e_1,\ e_2,\ e_3\leqslant e \tag{2.5}$$

Подставляя эти значения e_i в (1.2), можно найти выражения физических компонентов напряжений в виде

$$\sigma_i=\frac{b_{i1}}{\lambda^{(\alpha)}}r'+\frac{b_{i2}}{\lambda^{(\beta)}k\lambda}r+\frac{b_{i3}}{\lambda^{(\gamma)}}\lambda+D_i$$

$$D_i=B_i-b_{i1}-b_{i2}-b_{i3} \tag{2.6}$$

где, для упрощения, идентификационные метки (α, β, γ) опущены.

Подставляя соответствующие значения σ_i из (2.6) в уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_1}{dr}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{r}=0 \tag{2.7}$$

и принимая во внимание, что $\dfrac{d}{dr}=\dfrac{1}{r'}\dfrac{d}{dX_1}$, можно найти

$$rr''+A_1(r')^2+A_2r'+A_3r'r=0 \tag{2.8}$$

где

$$A_1 = \frac{b_{11} - b_{21}}{b_{11}}$$

$$A_2 = \frac{\lambda^{(\alpha)}}{b_{11}} \left((b_{13} - b_{23}) \frac{\lambda}{\lambda^{(\gamma)}} + B_1 - B_2 - b_{11} + b_{21} - b_{12} + b_{22} - b_{13} + b_{23} \right)$$

$$A_3 = \frac{\lambda^{(\alpha)}}{\lambda^{(\beta)} k\lambda} \frac{2b_{12} - b_{22}}{b_{11}}, \qquad r'' = \frac{d^2 r(X_1)}{dX_1} \tag{2.9}$$

После разрешения уравнения (2.8) относительно r' получается

$$r' = cr^{-A_1} - A_4 r - A_5 \tag{2.10}$$

откуда

$$X_1(r) = \int \frac{dr}{cr^{-A_1} - A_4 r - A_5} + c_1$$

где

$$A_4 = \frac{A_2}{A_1 + 1}, \qquad A_5 = \frac{A_3}{A_1} \tag{2.11}$$

c и c_1 — постоянные интегрирования.

Таким образом, задача определения деформированного состояния (нахождения функции $r(X_1)$) в подобласти (α, β, γ) приводится к решению уравнения (2.10) с соответствующими граничными условиями (значения r и r') в одной из границ подобласти (α, β, γ).

Если известны конкретные граничные условия деформированного тела, то задача решается последовательным определением деформированных состояний и границ получившихся подобластей, начиная с той граничной цилиндрической поверхности панели, где известны значения $r = r'$ и нормального давления $\sigma_1 = P_0$. При этом выбор номера первой подобласти (α, β, γ) производится следующим образом. Для граничной точки этой подобласти по формуле (2.3) вычисляются значения λ_1 и λ_2 и с помощью выражений (2.4) определяются $\lambda^{(\beta)}$ и $\lambda^{(\gamma)}$. Потом, принимая какое-то ориентировочное значение для $\lambda^{(\alpha)}$, по формуле (2.6), соответствующей принятой подобласти (α, β, γ), вычисляется значение $r' = \lambda_1$ для граничной точки первой подобласти. Если найденное значение λ_1 соответствует принятому значению $\lambda^{(\alpha)}$, то есть выполняется условие $\lambda^{(\alpha)}(1 - e) \leqslant \lambda_1 < \lambda^{(\alpha)}(1 + e)$, то выбранный номер подобласти (α, β, γ) правильный. В противном случае исправляется принятое значение $\lambda^{(\alpha)}$ и повторяются указанные действия для доказательства правильности выбора первой зоны.

Напряженное состояние определяется с помощью (2.6).

Решение задачи иллюстрируется в следующем пункте на численном примере.

3. Пусть прямоугольный параллелепипед из упругого изотропного материала, который при применении кусочно-линейного закона характери-

зуется упругими постоянными, приведенными в табл. 1, в системе прямоугольных декартовых координат (X_1, X_2, X_3) определяется

$$X_1 = a_1 = 0, \qquad X_1 = a_2 = 10 \text{ см}$$
$$X_2 = \pm b = \pm 50 \text{ см}, \quad X_3 = \pm c = \pm 50 \text{ см}$$

Параллелепипед деформируется в круглую цилиндрическую трубу с внутренним радиусом $r_1 = 12$ см, на внутренней цилиндрической поверхности которой действует нормальное давление $P_1 = 1000$ н/см² и в направлении своей оси труба растягивается с коэффициентом растяжения $\lambda = 1.21$.

Выражения физических компонентов напряжений (2.6) принимают следующий вид:

$$\sigma_i = \frac{b_{i1}}{\lambda^{(\alpha)}} r' + \frac{b_{i2} r}{15.9155\, \lambda^{(\beta)}} + D_i \tag{3.1}$$

$$D_i = B_i - b_{i1} - b_{i2}$$

Здесь подставлены значения $\lambda^{(\gamma)} = \lambda^{(1)} = \lambda = 1.21$, $\lambda k = 15.91555$ (последнее вычисляется из второго выражения (2.1) при значениях $X_2 = 50$ см и $\theta = \pi$).

Для определения номера первой подобласти, которая начинается с внутренней поверхности трубы ($r_1 = 12$ см), для точки этой поверхности из (2.3) вычисляется $\lambda_2 = r/\lambda k = 0.75398$. Следовательно, $\lambda^{(\beta)} = \lambda^{(-1)} = 0.81$, так как выполняется условие $(1 - 0.1)\,0.81 \leqslant 0.75398 \leqslant (1 + 0.1)\,0.81$. Принимая, что $\lambda^{(\alpha)} = 1$ и что первой подобласти соответствует номер $(0, -1, 1)$, согласно табл. 1 берутся следующие постоянные:

$$\begin{array}{llll} B_1 = 0.8 & b_{11} = 27 & b_{12} = 22 & b_{13} = 18 \\ B_2 = -0.3 & b_{21} = 14 & b_{22} = 20 & b_{23} = 13 \\ B_3 = 1.4 & b_{31} = 14 & b_{32} = 22 & b_{33} = 11 \end{array} \tag{3.2}$$

умноженные на 10^{3} н/см².

Подставляя эти значения в (3.1), можно найти

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 27000\, r' + 1706.54\, r - 48200 \\ \sigma_2 &= 14000\, r' + 1551.40\, r - 34300 \\ \sigma_3 &= 14000\, r' + 1706.54\, r - 34600 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставляя в первое уравнение (3.3) $r = 12$ см и $\sigma_1 = -P_1 = -1000$ н/см², находим $\lambda_1 = r'\big|_{X_1=0} = 0.989686$, а этому значению соответствует $\lambda^{(\alpha)} = 1$. Следовательно, выбранный номер $(0, -1, 1)$ для первой зоны правильный. Тогда уравнение (2.10) принимает следующий вид:

$$r' - c r^{-0.48148} + 0.046542\, r - 1.06924 = 0 \tag{3.4}$$

Здесь подставлены значения постоянных $A_1 = 0.48148$, $A_4 = 0.046542$, $A_5 = -1.06924$, которые вычисляются из (2.9) и (2.10). Постоянная $c = 1.58451$ вычисляется из условия $r' = 0.989686$ при $r = 12$ см.

Затем, принимая во внимание, что $r = 12$ *см* при $X_1 = 0$, численным методом интегрируется уравнение (3.4) по X_1 до получения таких значений r и r', которые являются граничными для зоны (0, —1, 1). Результататы вычислений приведены в табл. 2. На основании (2.3) и (2.4) вычисляются граничные значения для λ_1 и λ_2: для подобласти (0, —1, 1) граничным является значение $r' = \lambda_1 = \lambda^{i+1}$ $(1-c) = 1-0.1 = 0.9$, после чего начинается другая подобласть с номером (—1, —1, 1).

Заметим, что в табл. 2, для упрощения составления таблицы, границы подобластей незначительно смещены. Например, подобласть (—1, —1, 1) начинается со значения $r' = 0.89857$ вместо $r' = 0.9$. Такие очень малые отклонения при выборе границ областей несущественно влияют на результаты вычислений и при условиях приближенности применяемого физического закона вполне допустимы.

Из табл. 1, определяя упругие постоянные и проведя соответствующие вычисления для подобласти (—1, —1, 1), можно получить

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 18518.50\, r' + 1318.70\, r - 35400 \\ \sigma_2 &= 20987.65\, r' + 1163.55\, r - 35400 \\ \sigma_3 &= 20987.65\, r' + 1318.70\, r - 35700 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$r' - 1.507274\, r^{0.13333} - 0.091831\, r = 0 \tag{3.6}$$

причем при $X_1 = 1.5$ *см*, $r = 13.4191$ *см*.

Поступая аналогичным образом, интегрируем уравнение (3.6) до границы зон (—1, —1, 1) и (—1, 0, 1), где λ_2 достигает своего предельного значения $\lambda_2 = 0.9$ и $r = \lambda_2 k \lambda = 14.3240$ *см*. Для подобласти (—1, 0, 1) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 24691.40\, r' + \ \ 879.65\, r - 34300 \\ \sigma_2 &= 27160.50\, r' + 1696.46\, r - 48200 \\ \sigma_3 &= 27160.50\, r' + \ \ 879.65\, r - 34600 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$r' - 3.645\, r^{0.1} + 0.002827\, r - 5.6295 = 0 \tag{3.8}$$

при $X_1 = 2.6$ *см*, $r = 14.37313$ *см*.

В подобласти (—1, 0, 1) λ_1 и λ_2 почти в одном месте достигают своих предельных значений $\lambda_1 = r' = 0.729$ и $\lambda_2 = 0.729$, ($r = 17.507$), и поэтому после подобласти (—1, 0, 1) сразу начинается подобласть (—2, 1, 1), для которой

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 41152.26\, r' + 1609.74\, r - 59000 \\ \sigma_2 &= 18289.89\, r' + 1298.18\, r - 34800 \\ \sigma_3 &= 18289.89\, r' + 1661.67\, r - 41800 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$r' - 0.95024\, r^{-0.55555} + 0.030013\, r - 1.05851 = 0$$

при $X_1 = 6.6$ *см*, $r = 17.4845$ *см*.

Напряжения определяются из выражений (3.3), (3.5), (3.7) и (3.9).

Из табл. 2 определяются нормальное давление $P_2 = 574.3$ *н/см*², действующее на внешней цилиндрической поверхности $r = 19.8177$ *см*, и результирующая сила $N = 9303$ *н*, действующая на торцевых плоскостях трубы.

Таблица 2

№ подобл.	X_1 *см*	r *см*	r'	Напряжения в 10^{-3} *н/см*²		
				σ_1	σ_2	σ_3
	0.0	12.00000	0.98970	−1.00000	−1.82740	−0.26620
	0.2	12.19730	0.97678	−1.01225	−1.70219	−0.11038
	0.4	12.39201	0.96411	−1.02206	−1.57750	0.04450
	0.6	12.58420	0.95168	−1.02970	−1.45335	0.19846
0, −1, 1	0.8	12.77393	0.93949	−1.03506	−1.32966	0.35157
	1.0	12.96122	0.92753	−1.03837	−1.20654	0.50374
	1.2	13.14614	0.91579	−1.03978	−1.08402	0.69495
	1.4	13.32870	0.90426	−1.03955	−0.96221	0.80507
	1.5	13.41910	0.89857	−1.03691	−0.90163	0.87967
	1.5	13.41910	0.89857	−1.06410	−0.92805	0.85460
	1.6	13.50895	0.89221	−1.06340	−0.95700	0.83960
	1.8	13.68676	0.87960	−1.06240	−1.01480	0.80942
−1, −1, 1	2.0	13.86206	0.86713	−1.06210	−1.07250	0.77887
	2.2	14.03486	0.85480	−1.06260	−1.13024	0.74797
	2.4	14.20521	0.84261	−1.06370	−1.18788	0.71677
	2.6	14.37313	0.83055	−1.06560	−1.24560	0.68510
	2.6	14.37313	0.83055	−1.14923	−1.25811	0.60147
	2.8	14.53894	0.82463	−1.14882	−1.13774	0.58680
	3.0	14.70357	0.81679	−1.14220	−1.01706	0.57307
	3.2	14.86704	0.81305	−1.14601	−0.89550	0.56110
	3.4	15.02937	0.80741	−1.14263	−0.77347	0.55054
	3.6	15.19057	0.80187	−1.13818	−0.65109	0.54125
	3.8	15.35065	0.79638	−1.13237	−0.52802	0.53357
	4.0	15.50967	0.79099	−1.12542	−0.40447	0.52723
−1, 0, 1	4.2	15.66760	0.78568	−1.11767	−0.28084	0.52185
	4.4	15.82447	0.78046	−1.10856	−0.15649	0.51808
	4.6	15.98031	0.77531	−1.09863	−0.03198	0.51530
	4.8	16.13511	0.77022	−1.08813	0.09240	0.51323
	5.0	16.28891	0.76522	−1.07629	0.21751	0.51273
	5.2	16.44170	0.76029	−1.06351	0.34293	0.51335
	5.4	16.59351	0.75543	−1.05006	0.46886	0.51479
	5.6	16.74436	0.75063	−1.03588	0.59392	0.51712
	5.8	16.89425	0.74590	−1.02081	0.71973	0.52052
	6.0	17.04319	0.74123	−1.00508	0.84554	0.52472
	6.2	17.19121	0.73663	−0.98846	0.97176	0.52998
	6.4	17.33830	0.73209	−0.97117	1.09800	0.53607
	6.6	17.48450	0.72760	−0.95337	1.22412	0.54278
	6.6	17.48450	0.72760	−0.91209	1.20618	0.56180
	6.8	17.62975	0.72235	−0.89432	1.29872	0.70714
	7.0	17.77395	0.71716	−0.87578	1.39100	0.85183
	7.2	17.91713	0.71004	−0.85697	1.48250	0.99290
	7.4	18.05928	0.70690	−0.83869	1.57371	1.13831
	7.6	18.20040	0.70184	−0.81976	1.66441	1.28026
	7.8	18.34052	0.69683	−0.80037	1.75468	1.42146
	8.0	18.47964	0.69187	−0.78054	1.84457	1.56192
−2, 1, 1	8.2	18.61776	0.68694	−0.76109	1.93370	1.70126
	8.4	18.75491	0.68206	−0.74113	2.02250	1.83991
	8.6	18.89108	0.67727	−0.71965	2.11167	1.97857
	8.8	19.02628	0.67244	−0.70017	2.19886	2.11491
	9.0	19.16053	0.66769	−0.67955	2.28625	2.25110
	9.2	19.29383	0.66298	−0.65880	2.37315	2.38646
	9.4	19.42619	0.65831	−0.63791	2.45957	2.52099
	9.6	19.55762	0.65368	−0.61650	2.54567	2.65485
	9.8	19.68813	0.64969	−0.59568	2.63099	2.78762
	10.0	19.81772	0.64454	−0.57432	2.71600	2.91974

Заметим, что развитая в [3] теория предусматривает небольшие разрывы напряжений на границах соседних подобластей, так как при определении упругих постоянных использовались условия непрерывности напряжений лишь в определенных местах этих границ.

Точность решения задач зависит от величин этих разрывов, которые в свою очередь зависят от выбора малой величины ε. В нашем примере разность соответствующих напряжений не превышает 10% от этих напряжений.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 IX 1980

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ԳԾԱՅԻՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏԻ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԾՌՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Կատարվում է առաձգական, սեղմելի նյութի առաձգական հաստատունների որոշման ուսումնասիրությունը լարումների և դեֆորմացիաների միջև կտոր առ կտոր գծային կապի և մեծ դեֆորմացիաների առկայության պայմաններում և բերվում է այդ հաստատունների համար կատալոգ կազմելու օրինակ։

Դիտարկվում է ուսումնասիրվող նյութից պատրաստված ուղղանկյուն զուգահեռանիստի գլանային ծռման խնդիրը մինչև նրա դեֆորմացված և լարվածային վիճակների որոշման համար պարզ առնչությունների ստանալը։ Որպես թվային օրինակ, լուծվում է զուգահեռանիստի մինչև կլոր գլանային խողովակի վերածման խնդիրը։

THE PROBLEM OF LARGE ELASTIC DEFORMATIONS FOR CYLINDRICAL FLEXURE OF A CUBOID FROM PIECEWISE LINEAR MATERIAL

R. E. MKRTCHIAN

Summary

The investigation to determine the elastic constants for elastic compressible material, considering the piecewise linear law of relations between stresses and strains, is being continued and an example of compiling a catalogue for these constants is presented.

The problem for a cylindrical flexure of a cuboid from the above material is considered up to deriving simple expressions to define the

strain-stress states. The problem for flexure of a cuboid to a circular cylindrical tube is solved as a numerical example.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., Изд. «Наука», 1970.
2. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М., Изд. «Наука», 1966.
3. *Мкртчян Р. Е.* Кусочно-линейный закон связи между напряжениями и деформациями при больших деформациях. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1973, т. 26, № 3.
4. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Oxford, Clarendon Press, 1954.
5. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., Изд. «Мир», 1965.