

Լ. Դ. ՍԵՏՐՕՍՅԱՆ

КАЧЕНИЕ ТЯЖЕЛОГО ЦИЛИНДРА ПО ПЛОСКОСТИ,  
ПОКРЫТОЙ СЛОЕМ ВЯЗКОГО СТРУКТУРНОГО ВЕЩЕСТВА

Механизму влияния твердой поверхности на контактирующую с ней жидкость были посвящены работы многих исследователей. По-видимому, молекулы жидкости, тесно контактирующие с твердым телом, сцепляясь с поверхностью или адсорбируясь на ней, создают поверхностные слои, образующие поверхность раздела соприкасающихся тел. Эти поверхностные слои обладают особыми свойствами, часто резко отличными от свойства того же вещества и объеме фазы. По мнению Кингсбери [1] в области притяжения молекул металла происходит интенсификация вязкости части жидкости. Харди и Полтейдж [2] и Хенникер [3] также утверждают, что вблизи твердой стенки необычно высока вязкость по сравнению с вязкостью в свободном объеме жидкости.

Для выяснения влияния граничных поверхностей на вязкость тонких пленок смазки между двумя оптически плоскими параллельными круглыми дисками, сближающимися друг с другом. Нидс [4] провел серию экспериментов. Измерения, выполненные им, показали, что с уменьшением толщины слоя увеличивается расхождение между измеренными и расчетными интервалами времени сближения дисков. Фактическое время сближения дисков было больше расчетного, что указывает на некоторое увеличение эффективной вязкости смазки в тонких пленках. Нельзя дать иного объяснения этому эффекту, кроме как предположить, что близость металлической поверхности влияет на вязкость жидкости, заставляя пленку становиться более твердой [5].

Теоретические расчеты вышеуказанных экспериментов были основаны на классической теории континуума. Однако классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты последних лет свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может предсказать поведения некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Это обстоятельство совместно с другими недостатками классической теории континуума привело исследователей к разработке теории несимметричных-структурных жидкостей (моментная теория). В этой теории введены два независимых кинематических сектор-

ных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое — вращательные движения частиц [6—9 и др.].

Ниже рассматривается задача качения тяжелого цилиндра по плоскости, покрытой слоем вязкого структурного вещества (несимметричная жидкость).

1. *Приближенные уравнения плоско-параллельного течения для смазочного слоя.* Основные законы механики сплошной среды в дифференциальной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho v_{i,i} &= 0, & \rho \frac{dv_i}{dt} &= \tau_{ji,i} + \rho f_i, & \rho I \frac{d\omega_i}{dt} &= \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} + \mu_{ji,i} + \rho c_i \\ \rho \frac{du}{dt} &= (\nu_{i,j} - \varepsilon_{kji} \omega_k) \tau_{ji} + \omega_{i,j} \mu_{ji} - q_{i,i} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  — массовая плотность жидкости,  $v_i$  — скорость точки,  $\omega_i$  — средняя угловая скорость вращения частиц,  $I$  — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы,  $f_i$  — плотность распределения массовых сил,  $c_i$  — внешний массовый момент,  $\varepsilon_{ijk}$  — тензор Леви-Чивиты,  $u$  — удельная внутренняя энергия,  $q_i$  — вектор теплового потока,  $\tau_{ji}$  — тензор силовых напряжений,  $\mu_{ji}$  — тензор моментных напряжений.

Для определяющих уравнений имеем

$$\tau_{(ji)} = (-p + \lambda v_{k,k}) \delta_{ji} + \mu (v_{j,i} + v_{i,j}) \quad (1.2)$$

$$\tau_{[ji]} = \mu_r (v_{i,j} - v_{j,i}) + 2\mu_r \varepsilon_{mij} \omega_m \quad (1.3)$$

$$\mu_{(ji)} = c'_0 \omega_{k,k} \delta_{ji} + c'_1 (\omega_{j,i} + \omega_{i,j}) \quad (1.4)$$

$$\mu_{[ji]} = c'_2 (\omega_{i,j} - \omega_{j,i}) \quad (1.5)$$

где индексами в круглых скобках обозначены симметричные части тензоров силовых и моментных напряжений, а индексами в квадратных скобках — антисимметричные части соответствующих тензоров,  $\lambda, \mu, \mu_r, c'_0, c'_1, c'_2$  — положительные скаляры, характеризующие изотропные свойства среды,  $p$  — давление в жидкости.

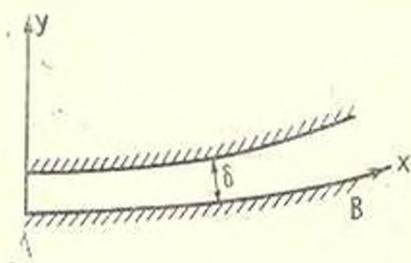
Подставляя (1.2) — (1.5) в уравнения (1.1) и считая коэффициенты вязкости постоянными по всей жидкости (однородная жидкость), получим уравнения движения структурных жидкостей.

Рассмотрим установившееся плоско-параллельное течение вязкой структурной жидкости между приблизительно параллельными поверхностями, радиусы кривизны которых достаточно велики по сравнению со средней толщиной слоя  $\delta$  (фиг. 1).

Для изучения движения жидкости выберем ортогональные криволинейные координаты  $x$  и  $y$ , причем координату  $x$  будем отсчитывать

вдоль одной из направляющих  $AB$ , а координату  $y$  по направлению нормали к ней. При этом предполагается, что расстояние  $\delta$  между поверхностями мало по сравнению с величиной  $\frac{v + v_r}{U}$ , где  $U$  — характеристическая скорость течения,  $v = \frac{\mu}{\rho}$  и  $v_r = \frac{\mu_r}{\rho}$  — соответственно кинематическая ньютоновская вязкость и кинематическая вращательная вязкость.

Ограничимся анализом двумерного (плоского) установившегося течения несжимаемой жидкости. Массовые силы и моменты будем считать пренебрежимо малыми. Тогда вектор скорости, вектор угловых скоростей и давление будут определяться зависимостями вида



Фиг. 1.

течения несжимаемой жидкости. Массовые силы и моменты будем считать пренебрежимо малыми. Тогда вектор скорости, вектор угловых скоростей и давление будут определяться зависимостями вида

$$v = v[u(x, y), v(x, y), 0]$$

$$\omega = \omega[0, 0, \omega(x, y)] \quad (1.6)$$

$$p = p(x, y)$$

а уравнения движения сведутся к следующему виду:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + (v + v_r) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2v_r \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + (v + v_r) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - 2v_r \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (1.7)$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{2v_r}{l} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{4v_r}{l} \omega + \gamma \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

где  $\gamma = \frac{c_2 + c_1}{l}$ , а  $c_2 = \frac{c'_2}{\rho}$  и  $c_1 = \frac{c'_1}{\rho}$  — коэффициенты моментной вязкости.

Ввиду малости  $\delta$  кривизной координатных линий будем пренебрегать и примем, что для течения в рассматриваемом вязком слое остаются справедливыми уравнения (1.7). Ввиду малости  $\delta$  будем считать, что составляющая скорости  $v$  много меньше  $u$  ( $v \ll u$ ) и что, кроме того, вследствие прилипания жидкости к стенкам, изменения  $u$  и  $\omega$  в направлении оси  $x$  происходят гораздо медленнее, чем в направлении  $y$ .

то есть, что  $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\frac{\partial \omega}{\partial x} \ll \frac{\partial \omega}{\partial y}$ .

Тогда, отбрасывая в (1.7) члены  $v$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ , как малые по сравнению с другими, получим следующие приближенные уравнения установившегося плоско-параллельного течения для вязкого смазочного слоя:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = (v + v_r) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2v_r \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.9)$$

$$(c_a + c_r) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2v_r \left( 2\omega + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.11)$$

Уравнения смазочного слоя (1.8)–(1.11) содержат члены, характеризующие несимметричность днады силовых и моментных напряжений.

Аналогичные уравнения для частных задач были получены также в работах [5] и [10], но в работе [10] в уравнении (1.10) опущен член  $4v_r \omega$ . Однако, как показывает анализ порядка величины, этот член имеет такой же порядок, как и два других члена в уравнении (1.10). Исключение этого члена существенно влияет на характеристики движения в смазочном слое [5]. Оценки порядка величины, выполненные в [5], по нашему мнению, не вполне убедительны.\*.

\* Автор [5], вводя безразмерные параметры

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega h}{U}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U^2}$$

( $2a$  — длина пластины,  $h$  — толщина пленки) и пренебрегая  $v$ , уравнения поступательных движений записал в безразмерной форме

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + R_h^{-1} \left( \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + 2N^2 R_h^{-1} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{y}}$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - 2N^2 R_h^{-1} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{x}}$$

где

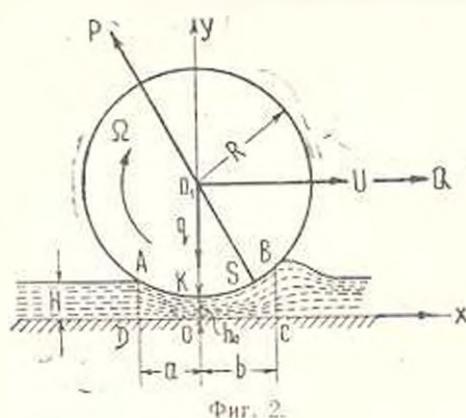
$$R_h = \frac{\rho U a}{\mu + \mu_r} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \ll 1, \quad \left( \frac{h}{a} \right) \ll 1, \quad N = \left( \frac{\mu_r}{\mu + \mu_r} \right)^{1/2}$$

Поскольку  $R_h \ll 1$  и  $\left( \frac{h}{a} \right) \ll 1$ , то неубедительно получение из приведенных уравнений соотношений (1.8) и (1.9).

2. Качение цилиндра по плоскости, покрытой слоем вязкого вещества. Рассмотрим круглый цилиндр (каток) длины  $l$ , радиуса  $R$  и веса  $q$ , катящийся без скольжения с угловой скоростью  $\Omega$  по горизонтальной плоскости, покрытой слоем вязкого вещества толщины  $h$  (фиг. 2). Найдем величину необходимой для качения цилиндра силы тяги  $Q$ .

Для решения задачи применим к части вязкого слоя ABCD, находящейся в рассматриваемый момент непосредственно под цилиндром, приближенные уравнения (1.8) – (1.11).

Выбирая оси координат так, как показано на чертеже, и обозначая



Фиг. 2.

переменную толщину слоя под цилиндром на расстоянии  $x$  от начала координат через  $h$ , будем иметь

$$h = h_0 + R - \sqrt{R^2 - x^2} \quad (2.1)$$

где  $h_0$  — толщина вязкого слоя при  $x = 0$ .

Обозначая абсциссы крайних точек A и B через  $-a$  и  $b$  и полагая, что мгновенная ось вращения цилиндра проходит через точку  $K(0, h_0)$ , примем для рассматриваемой задачи следующие граничные условия [9, 11]:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 & \quad u = 0, & \quad v = 0, & \quad w = 0 \\ \text{при } y = h & \quad u = \Omega(h - h_0), & \quad v = -\Omega x, & \quad w = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = -a \text{ и } x = b & \quad p = 0 \\ \text{при } x = -a & \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условия (2.2) выражают предположение о прилипании жидкости к твердой границе. Первое из условий (2.3) означает, что давление вне объема поджатой части вязкого слоя полагается постоянным. Последнее условие принято во избежание отрицательных давлений в слое ABCD вблизи границы AD [11].

Решая уравнения (1.8) и (1.10) и используя граничные условия (2.2) для скорости  $u$  и угловой скорости  $\omega$ , соответственно, получим

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{2\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + 2y \left(1 - \frac{h_0}{h}\right) \frac{kh \operatorname{sh} kh}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} + \\ & + N^2 h \left( e^{*y} - 1 \right) \frac{(e^{-kh} - 1) \left[ \frac{1}{2} \Omega \left(1 - \frac{h_0}{h}\right) - \frac{h}{4\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 + \frac{2N^2}{kh}\right) \right] - \frac{h}{2\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x}}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} + \end{aligned}$$

$$+ (e^{-ky} - 1) \frac{(e^{kh} - 1) \left[ \frac{1}{2} \Omega \left( 1 - \frac{h_0}{h} \right) - \frac{h}{4\rho v} \frac{\partial p}{\partial x} \left( 1 - \frac{2N^2}{kh} \right) \right] - \frac{h}{2\rho v} \frac{\partial p}{\partial x}}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} \quad (2.4)$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \Omega \left( 1 - \frac{h_0}{h} \right) \frac{kh \operatorname{sh} kh}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} - \frac{h}{4\rho v} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \times \left[ \frac{e^{-ky}(e^{kh} - 1) - e^{ky}(e^{-kh} - 1)}{2\operatorname{sh} kh} - 1 \right] + \frac{1}{2\rho v} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh} h - y \right) \quad (2.5)$$

Здесь  $N = \left( \frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} \right)^{1/2}$ ,  $l = \left( \frac{c_a + c_d}{4\nu} \right)^{1/2}$ ,  $k = \frac{N}{l}$

Для определения давления  $p$  обратимся к уравнению неразрывности (1.11). Беря от обеих частей этого уравнения интегралы по  $y$  в пределах от 0 до  $h$  и принимая во внимание условия (2.2), получим

$$\Omega x = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - \frac{\partial h}{\partial x} (u)_h = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - \Omega (h - h_0) \frac{dh}{dx}$$

Откуда, интегрируя по  $x$ , находим

$$2 \int_0^h u dy = \Omega (x^2 + h^2 - 2h_0 h + C) \quad (2.6)$$

Подставляя в левую часть полученного равенства значение  $u$  из (2.4) и вычисляя интеграл, будем иметь

$$\frac{h^2}{6\rho v} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\Omega (x^2 - 2h_0 h + C)}{1 + \frac{12l^2}{h^2} - \frac{6Nl}{h} \frac{kh(1 + \operatorname{ch} kh) - 2N^2 \operatorname{sh} kh}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)}} \quad (2.7)$$

Заменяя здесь  $h$  его значением из (2.1) и определяя  $C$  по последнему из условий (2.3), найдем окончательно

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6\rho v \Omega \left[ 1 - \frac{h_0}{\sqrt{K^2 - a^2} + 1} \frac{K^2 - x^2}{h^2 f_h(N, l, h)} \right] \frac{a^2 - x^2}{h^2 f_h(N, l, h)} \quad (2.8)$$

где

$$f_h(N, l, h) = 1 + \frac{12l^2}{h^2} - \frac{6Nl}{h} \frac{kh(1 + \operatorname{ch} kh) - 2N^2 \operatorname{sh} kh}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} \quad (2.9)$$

Выражения (2.1) и (2.5) вместе с (2.8) дают соответственно законы распределения скоростей и угловых скоростей в слое.

Закон распределения давлений находим из (2.8), принимая во внимание условие (2.3)

$$p(x) = 6\rho\nu\Omega \int_{-a}^x \left[ 1 - \frac{h_0}{\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - x^2}} \right] \frac{a^2 - x^2}{h^3 f_h(N, l, h)} dx \quad (2.10)$$

Равнодействующая  $P$  сил давлений со стороны слоя на цилиндр будет, очевидно, проходить через центр  $O$ , цилиндра, а ее проекции на оси координат будут равны

$$P_x = -l_0 \int_{-a}^a \frac{p(x) x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad P_y = l_0 \int_{-a}^a p(x) dx \quad (2.11)$$

При этом абсцисса точки  $s$  приложения равнодействующей будет

$$x_s = \frac{P_y R}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \quad (2.12)$$

Переходя к определению сил трения, отметим, что порядок их в рассматриваемой задаче ниже, чем порядок сил давления, так как вязкий слой между поверхностями тонок, в чем мы убедимся на числовых примерах. Поэтому составляющими сил трения можно пренебрегать по сравнению с соответствующими силами давления. В рассматриваемой задаче этот вывод, очевидный для составляющей вдоль оси  $Oy$ , нуждается в проверке по отношению к составляющей вдоль оси  $Ox$ .

Для оценки величины силы трения ограничимся рассмотрением достаточно тонкого слоя, у которого среднее значение толщины слоя  $h$  мало по сравнению с  $a$ . Это условие, как видно из (2.1), будет выполнено, если в свою очередь  $a$  будет мало по сравнению с  $R$ , причем порядок малости величин  $h/a$  и  $a/R$  будет одинаков, а величина  $h/R$  будет иметь порядок  $a^2/R^2$ .

Касательная составляющая вектора напряжения на элементе поверхности цилиндра, внутренняя нормаль к которому образует с осью  $oy$  угол  $\varphi$ , определяется по формуле

$$\tau_{xt} = \frac{1}{2} (\tau_{xx} - \tau_{yy}) \sin 2\varphi - \tau_{yx} \cos^2 \varphi + \tau_{xy} \sin^2 \varphi \quad (2.13)$$

В рассматриваемом нами случае имеем

$$\sin \varphi = \frac{x}{R}, \quad \cos 2\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R}, \quad \sin 2\varphi \approx \frac{2x}{R}$$

а для напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yx} &= \rho\nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho\nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\rho\nu r_{xy} \\ \tau_{yy} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\tau_{xy} = \rho\nu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho\nu_r \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2\rho\nu_r\omega \quad (2.14)$$

Следовательно, напряжение силы вязкости на поверхности цилиндра будет представляться в виде

$$(\tau_{xy})_h = \rho\nu \left[ 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{x}{R} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( 1 - \frac{2x^2}{R^2} \right) - \frac{\nu_r}{\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_h$$

или приближенно

$$(\tau_{xy})_h = -\rho(\nu + \nu_r) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_h + \rho\nu \frac{2x^2}{R^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_h \quad (2.15)$$

так как остальные члены будут пренебрежимо малы. Вычисляя  $(\tau_{xy})_h$  с помощью (2.4) и (2.8) (причем в (2.8) второе из слагаемых, стоящих в квадратной скобке, заменяется на  $\frac{h_0}{2R}$ ), найдем для проекций на ось  $ox$  результирующей силы от касательных напряжений следующее приближенное выражение:

$$F_x = l_0 \int_{-a}^a (\tau_{xy})_h dx \approx -3\rho\nu\Omega l_0 (1 - N^2) \int_{-a}^a \left[ \frac{a^2 - x^2}{h^2 f_h(N, l, h)} \left( 1 - \frac{h_0}{2R} \right) + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{h_0}{h} \right) \frac{kh \operatorname{sh} kh}{kh \operatorname{sh} kh + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kh)} \right] \left( \frac{1}{1 - N^2} - \frac{2x^2}{R^2} \right) dx \quad (2.16)$$

Для момента сил трения относительно оси  $O$ , цилиндра найдем приближенно:

$$M = -RF_x \quad (2.17)$$

Заметим, что порядок составляющей  $F_x$  по сравнению с  $P_x$  может быть оценен только после соответствующих конкретных расчетов.

Найденные выше формулы (2.11), (2.12), (2.16) и (2.17) содержат три заранее неизвестных параметра:  $a$ ,  $b$  и  $h_0$ . Для их определения воспользуемся [11]:

а) вторым условием (2.3) для давления,

б) условием равновесия веса цилиндра с результирующей силой от давления слоя и

в) предположением, что вблизи точки  $A$ , где слой наименее деформирован, можно приближенно считать толщину слоя  $AD$  равной заданной толщине недеформированного слоя  $H$ . Эти условия могут быть представлены в виде\*

$$p(b) = 0, \quad P_v = q, \quad (2.18)$$

$$H = h_0 + R - \sqrt{R^2 - a^2}$$

\* При составлении второго условия проекцией силы трения на ось  $oy$  пренебрегается.

Составляя уравнение равновесия приложенных к цилиндру сил в проекции на ось  $ox$ , для силы тяги находим

$$Q = -(P_x + F_x) \quad (2.19)$$

В каждом конкретном случае все интегралы, входящие в полученные формулы, можно определить путем численного интегрирования.

Для оценки полученных результатов произведем приближенный подсчет, полагая отношение  $\frac{x}{R}$  настолько малым, что в выражениях, входящих под знак интегралов можно положить  $\sqrt{R^2 - x^2} \approx R$  и, следовательно,  $h = h_0 = H$ .

Тогда из (2.10) найдем

$$p(x) = \frac{6\gamma v \Omega}{H^3 f_n(N, l, H)} \int_{-a}^x (a^2 - x^2) dx = \\ = \frac{2\gamma v \Omega}{H^3 f_n(N, l, H)} (2a^3 + 3a^2x - x^3) \quad (2.20)$$

где

$$f_n(N, l, H) = 1 + \frac{12l^2}{H^2} - \frac{6Nl}{H} \frac{kH(1 + \operatorname{ch} kH) - 2N^2 \operatorname{sh} kH}{kH \operatorname{sh} kH + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kH)}$$

Первое из условий (2.18) приводит к уравнению

$$b^3 - 3a^2b - 2a^3 = 0$$

единственным положительным корнем которого будет  $b = 2a$ .

Подставляя найденные значения  $p$  и  $b$  в (2.11), получим

$$P_x = -10.8 \frac{\gamma v \Omega l_0 a^3}{RH^3 f_n(N, l, H)}, \quad P_y = 13.5 \frac{\gamma v \Omega l_0 a^3}{H^3 f_n(N, l, H)} \quad (2.21)$$

Для силы трения при  $b = 2a$  найдем из (2.16) значение

$$F_x = -10.8 \gamma v \Omega l_0 a^3 \frac{1 - N^2}{RH^3 f_n(N, l, H)} \left(2 - \frac{H}{R}\right) \quad (2.22)$$

Если во всех полученных выражениях выделить общий множитель  $\gamma v \Omega R l_0$  и заметить, что величины  $H/a$  и  $a/R$  имеют одинаковый порядок малости, то легко видеть, что  $P_x$ ,  $P_y$  и  $F_x$  имеют соответственно порядок  $a^2/H^2$ ,  $a/H$  и  $a/R$ . Таким образом, в данном случае в (2.19) величина  $F_x$  может быть отброшена как очень малая по сравнению с  $P_x$ . Практически ее влияние скажется лишь в том, что она создаст момент (2.17) порядка  $a/R$ , тормозящий качение.

Используя вторые из равенств (2.18) и (2.21), найдем для определения неизвестной  $a$  выражение

$$q = 13.5 \frac{\gamma v \Omega l_0 a^3}{H^3 f_n(N, l, H)} \quad (2.23)$$

Так как все наши расчеты справедливы при  $H/a$  малом, то из (2.23) следует, что полученное решение годится лишь в том случае, если вес единицы длины катка  $q/l_0$  будет очень велик по сравнению с величиной  $\omega\Omega R$ .

Отбрасывая в (2.19) результирующую силу трения  $F_x$  и подставляя в это соотношение значения  $P_x$  из (2.21) и  $a$  из (2.23), получим

$$Q \geq 0.8a \frac{q}{R} \quad (2.24)$$

или

$$Q \geq 0.17 \left[ \frac{H^2 f_a(N, l, H)}{\rho v \Omega} \frac{q}{l_0} \right]^{1/2} \frac{q}{R} \quad (2.25)$$

В последнем выражении коэффициент при  $\frac{q}{R}$  может рассматриваться как коэффициент трения качения [11]. Величина этого коэффициента, как видно из (2.25), убывает с уменьшением  $H$  и веса единицы длины катка  $q/l_0$  и с увеличением  $\rho v$  и  $\Omega$ , причем зависимость от последних трех параметров значительно слабее, чем от  $H$ . Все эти выводы хорошо согласуются с физическим смыслом задачи. В частности, при  $\rho v = \infty$  («абсолютно твердый слой») получается, как и следует ожидать, что коэффициент трения качения равен нулю. Что касается некоторого уменьшения коэффициента трения качения с увеличением скорости движения, то этот факт подтверждается целым рядом экспериментальных данных [12].

3. *Обсуждение результатов.* Отметим, что структурная (несимметричная) жидкость обладает новыми скалярными константами, связанными с учетом вращательного движения частиц. Структурная жидкость характеризуется тремя физическими константами  $\nu$ ,  $\nu_r$  и  $(c_a + c_d)$  в отличие от классической ньютоновской жидкости, которая характеризуется лишь одной константой вязкости  $\nu$ . Параметр  $\nu$  имеет размерность вязкости. Поскольку он появляется в результате учета вращательного движения частиц, то естественно его назвать вязкостью вращательного движения или просто вращательной вязкостью. Величина  $\nu_r$  характеризует сопротивление вращательным движениям подобно тому, как сдвиговая ньютоновская вязкость характеризует сопротивление поступательным движениям. Константа  $(c_a + c_d)$  имеет размерность  $[\nu][L^2]$ , и с ее помощью можно составить параметр  $l = \left( \frac{c_a + c_d}{4\nu} \right)^{1/2}$ , который имеет размерность длины. Параметр  $l$  может быть отождествлен с некоторой характеристикой вещества, зависящей от размера молекул [5].

Несимметричность жидкости характеризуется двумя безразмерными параметрами.

Параметр связи  $N$ , определенный формулой

$$N = \left( \frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} \right)^{1/2}$$

характеризует связь уравнений поступательного движения (1.8) и вращательного движения (1.10). Когда  $\gamma_r \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow 0$ ), эти уравнения разделяются и уравнение движения (1.8) сводится к обычному уравнению Рейнольдса для смазочного слоя.

Второй важный безразмерный параметр  $L$  представляет собой отношение начальной толщины слоя к характерной материальной длине, то есть

$$L = \frac{H}{l}$$

Это число характеризует взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости.

Можно ожидать, что эффекты структурных жидкостей будут ярче проявляться либо при большом  $l$  (что соответствует большому размеру подструктуры), либо при малой толщине слоя, то есть с уменьшением безразмерного параметра  $L$  эффекты структурных жидкостей становятся более ощутимыми.

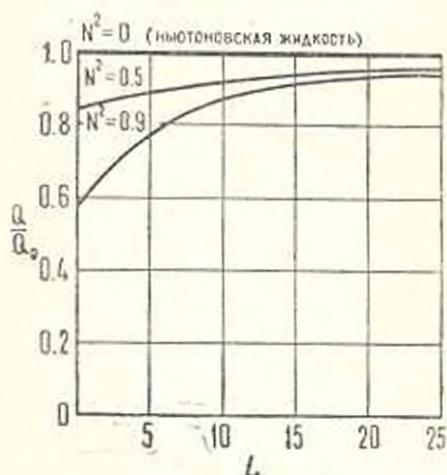
В другом предельном случае  $L \rightarrow \infty$  мы снова приходим к результатам для ньютоновской жидкости. Это означает, что в данном предельном случае реологические аномалии отсутствуют. Заметим, что  $L \rightarrow \infty$  соответствует исчезающе малому размеру элемента подструктуры по сравнению с начальной толщиной слоя.

Для безразмерной силы тяги имеем

$$Q^* = \frac{Q}{Q_0} > |f_L(N, L)|^n \quad (3.1)$$

где  $Q_0$  — силы тяги для классического решения и

$$f_L(N, L) = 1 + \frac{12}{L^2} - \frac{6N}{L} \frac{NL(1 + \operatorname{ch} NL) - 2N^2 \operatorname{sh} NL}{NL \operatorname{sh} NL + 2N^2(1 - \operatorname{ch} NL)} \quad (3.2)$$



Фиг. 3.

Выражение (3.1) для безразмерной силы тяги сводится к выведенному Н. А. Слезкиным при  $N \rightarrow 0$  или  $L \rightarrow \infty$

$$\lim_{\substack{L \rightarrow 0 \\ N \rightarrow 0}} f_L(N, L) = 1 \quad (3.3)$$

В третьем предельном случае  $L \rightarrow 0$  классическое решение умножается на  $(1 - N^2)$

$$\lim_{L \rightarrow 0} f_L(N, L) = (1 - N^2) \quad (3.4)$$

На фиг. 3 показаны графики зависимости безразмерной силы

тяги  $\frac{Q}{Q_0} = |f_L(N, L)|^n$  от параметра  $L$  для различных значений  $N$ .

График показывает, что снижение  $L$  соответствует снижению безразмерной силы тяги при всех значениях  $N$ , кроме  $N = 0$ , относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости, когда сила тяги не зависит от изменений  $L$ . Заметим, что снижение  $L$  соответствует уменьшению толщины вязкого слоя. Итак, чем меньше толщина вязкого слоя, тем более явно выражено влияние подструктуры, вызывающее существенное позростание эффективной вязкости в тонких слоях.

Ереванский государственный  
университет

Поступила 26 X 1979

Լ. Չ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ծանր Գլանի Գլորումը Մաշտովիկ Ստրուկտուրալ Նյութի Շերտով Մաշտովա՞ր Հարթութեան վրայով

Ս. մ փ ո փ ո լ մ

Քննարկվում է ծանր գլանի գլորումը մաշտովիկ ստրուկտուրային նյութով ծածկված հարթության վրայով, հնդրի լուծման համար կիրառված է ոչ սիմետրիկ (ստրուկտուրային) Նեղուկների տեսությունը: Ստացված է անալիտիկ արտահայտություն զլանի գլորման քարշիչ ուժի համար, իսկ միկրոստրուկտուրային ազդեցությունը պատկերված է գծադրի վրա:

THE ROLLING OF A HEAVY CYLINDER ALONG THE PLANE COVERED WITH A LAYER OF VISCOUS STRUCTURAL SUBSTANCE

L. O. PETROSIAN

S u m m a r y

The rolling of a heavy cylinder along the plane covered with a layer of viscous structural substance is considered. To obtain the solution the theory of asymmetrical (structural) fluids is applied. The analytic expression for the tractive force of the rolling cylinder is obtained, and the influence of microstructure is illustrated by the graph.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Kingsbury A. A New Oil Testing Machine and Some of Its Results. Trans. ASME, 1903, vol. 24, p. 143.
2. Hardy W., Nottage M. Studies in Adhesion-I. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1926, vol. 112, p. 64.
3. Henntker J. C. The Depth of a Surface Zone of a Liquid. Reviews. Modern Physics, 1949, vol. 21, p. 322.

4. *Needs S. J.* Boundary Film Investigations. Trans. ASME, 1910, vol. 62, p. 331.
5. *Практик, Савва* Теория сдвигания пленок микрополярных жидкостей. Тр. американского общества инженеров-механиков Проблемы трения и смазки, 1976, т. 98, серия F, № 1, с. 147
6. *Grad H.* Statistical Mechanics, Thermodynamics and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitrary Number of Integrals Commun. Pure, App. Math., 1952, vol 5, p. 455.
7. *Аро В. Л. Булыгин А. Н. Кившицкий Е. В.* Асимметрическая гидромеханика, ПММ, 1965, т. 29, вып. 2
8. *Иванов Ван Джен, Листров А. Т.* О изотермической модели несимметричных жидкостей Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1967, № 5
9. *Петровский Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметричным тензором напряжения. Ученые записки ГГУ, 1976, № 3, 1977, № 2, 1978, № 2
10. *Agrawal V. K., Ganju K. L., Jothi S. C.* Squeeze Film and Externally Pressurized Bearings Microfolat Fluid Lubricated Weat. 1972 vol. 19, № 3, p. 259
11. *Савва И. А.* Динамика вязкой сжимаемой жидкости ГИИЛ, М., 1955
12. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений Гостехтеориздат, М.—Л., 1951