ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 4, 1981 Механика

М. Х. ГУКАСЯН

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В работе рассматриваются методы решения линейных управляемых систем уравнений с частными производными и оптимального управления в этих системах. В отличие от систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, задача об управляемости систем с распределенными параметрами оказывается весьма сложной даже в линейном случае. Рассматриваемые в работе алгоритмы основываются на достаточных условиях оптимальности, предложенных В. Ф. Кротовым.

Основным этапом решения оптимизационных задач этим методом является разрешение, так называемой, «элементарной операции» (ЭО).

В статье приводятся новые способы реализации ЭО для линейных систем с распределенными параметрами и квадратичным критерием качества.

1. Постановка задачи

Пусть дано множество T—прямоугольник $0 \leq t^j \leq t^{1}$ $(j=1,2,\dots,m)$ векторного пространства R^m. На множестве T определены пары вектор-функций $(x(t), u(t))$, удовлетворяющие условиям:

(1°) вектор-функции $x(t)$ непрерывны, кусочно-дифференцируемы и принимают значения из векторного пространства R^n;

(2°) вектор-функции $u(t)$ непрерывны и принимают значения из векторного пространства R^d;

(3°) на множестве T пары $(x(t), u(t))$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^j} = a^i_{jl} x^l + b^i_{jk} u^k \quad (i, l = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, d;\ j = 1, \dots, m) \tag{1.1}$$

Здесь a^i_{jl}, b^i_{jk} — произвольные заданные числа; по одинаковым значкам k, l, дважды входящим в произведение, подразумевается суммирование.

В точках границы S множества T на функции $x(t)$ могут быть наложены дополнительные условия. Пары вектор-функций $(x(t), u(t))$, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, обозначим через D.

Условие управляемости процесса означает, что множество D не пусто. Обозначим через W множество функций $q(t)$, заданных на границе S, таких, что для каждой из них найдется пара $\{x(t), u(t)\} \in D$,

$$x(t \in S) = q(t)$$

Введем в рассмотрение также множество E пар функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих (1.1). На множестве E задан функционал I вида

$$\int_T f^0 [t, x(t), u(t)] \, dt + F[x(t \in S)]$$

Здесь $f^0(t, x, u)$ — заданная функция, $F[q(t)]$ — функционал, заданный на W.

В этой статье рассматривается случай, когда функция $f^0(t, x, u)$ и функционал F квадратичны по аргументам x и u, более того, мы будем рассматривать тот случай, когда функционал F представляет собой среднеквадратичное отклонение граничных значений фазовых координат процесса от заданных функций. При этих предположениях функционал I запишется следующим образом:

$$I = \int_T (a_i^0 x^{i2} + b_k^0 u^{k2}) \, dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{T^j} [(x_j^{0i} - h_j^{0i})^2 + (x_j^{1i} - h_j^{1i})^2] \, dt_j \qquad (1.2)$$

где $x_j^{0,1i} = x^i(t^1, t^2, \ldots, t^j_{0,1}, \ldots, t^m)$, а $h_j^{0,1i}$ — заданные функции $m-1$ аргументов $(t^1, t^2, \ldots, t^{j-1}, t^{j+1}, \ldots, t^m)$; T^j — сечение прямоугольника T при произвольном фиксированном значении аргумента t^j; $dt_j = dt^1 \times dt^2 \times \cdots \times dt^{j-1} \times dt^{j+1} \times \cdots \times dt^m$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что коэффициенты a_i^0, b_k^0, $(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, d)$ положительны.

Вид подынтегральных выражений во втором слагаемом может быть легко обобщен с сохранением принципа среднеквадратичного отклонения для функционала F, в частности, можно рассматривать отклонение линейной комбинации фазовых координат процесса от заданной функции.

Рассматриваются следующие задачи.

1. Отыскание допустимого процесса, где требуется найти последовательность процессов $\{\bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)\} \in E$, сходящихся в специально оговоренном смысле к D:

$$\{\bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)\} \to D$$

2. Минимизация функционала I на D, когда помимо п. 1 от последовательности $\{\bar{x}_s, \bar{u}_s\}$ требуется

$$I(\bar{x}_s, \bar{u}_s) \to d = \inf_D I$$

2. Описание метода

В этом пункте мы вкратце изложим метод решения задач 1 и 2, который дан в работе [2] и который опирается на достаточные условия оптимальности.

Обозначим $f_j^i(t, x, u)$ правые части дифференциальных уравнений (1.1).

Введем в рассмотрение класс Π функций $\varphi(t, x)$, отображающих прямое произведение $T \times R^n$ в R^m, непрерывных и непрерывно-дифференцируемых, а также следующие конструкции:

$$R(t, x, u) = \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} f_j^i(t, x, u) - f^0(t, x, u) + \sum_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^j}$$

$$G[q(t)] = \sum_j \int_{T^j} \varphi^j[t, x(t)]\Big|_0^{t^j} dt_j + F[q(t)]$$

$$L[\varphi, x, u] = G[x(t \in S)] - \int_{T'} R(t, x, u)\, dt$$

$$\mu(t) = \sup_{(x, u) \in R^n \times R^d} R(t, x, u); \qquad m = \inf_W G[q(t)]$$

$$l(\varphi) = m - \int_T \mu(t)\, dt$$

На класс Π наложим дополнительное условие, чтобы функция $R(t, x, u)$ была определена и непрерывна и были определены величины m, $l(\varphi)$.

Согласно результатам [1], при всех $\varphi \in \Pi$ имеем: 1) $L(x, u) = I(x, u)$, если $(x, u) \in D$; 2) $l(\varphi) \leqslant d$. Отсюда следует, что если процесс $\bar{x}, \bar{u} \in D$ и функция $\bar{\varphi} \in \Pi$ таковы, что $L(\bar{\varphi}, \bar{x}, \bar{u}) = l(\bar{\varphi})$, то

$$I(\bar{x}, \bar{u}) = \min_D I = d = l(\bar{\varphi}) = \max_\Pi l(\varphi)$$

При этом значения $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ при каждом $t \in T^*$ обеспечивают максимум функции $\bar{R}(t, x, u)$, соответствующей $\bar{\varphi}$, а значения $\bar{x}(t \in S)$ — минимум $\bar{G}[q(t)]$ на W:

$$\bar{R}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{R^n \times R^d} \bar{R}(t, x, u), \qquad t \in T \setminus S$$

$$G[\bar{x}(t \in S)] = \min_W \bar{G}[q(t)]$$

Здесь $T^* = T \setminus S$.

Опираясь на эти факты, в работе [2] предложен способ решения поставленных выше задач: отыскивать последовательность $\{\varphi_s\}$ такую, что

$$I(\varphi_s) \to \max_{\varphi \in \Pi} I(\varphi) = d$$

В той же статье приведены достаточные условия разрешимости этих задач предложенным способом.

Введем в рассмотрение множество $E' \subset E$ пар $x(t)$, $u(t)$ таких, что функция $x(t)$ кусочно-непрерывна и кусочно-дифференцируема.

Пусть имеется функция $\varphi_s(t, x) \in \Pi$, которой соответствует множество $\overline{V}_s^t$ максимумов $R_s(t, x, u)$ на $R^n \times R^q$ при фиксированном значении t, множество $\overline{W}_s$ минимумов G_s на W и множество $\overline{E}_s$ пар $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих условиям $x(t)$, $u(t) \in \overline{V}_s^t$ при всех $t \in T \setminus S$, $x(\tau) \in \overline{W}_s$, $t \in S$; $x(t)$, $u(t) \in E'$.

Функция φ_{s+1} ищется в виде

$$\varphi_{s+1} = \varphi_s + \lambda_s \gamma_s(t, x) \tag{2.1}$$

где λ_s и $\gamma_s(t, x)$ — число и функция, подлежащие определению. Введем функционал

$$\delta_s[x(t), u(t)] = \sum_j \int_{T^j} \gamma_s^t[t, x(t)]\Big|_{t^j-0}^{t^j+0} dt_j - \int_T \left(\frac{\partial \gamma_s^t}{\partial x^i} f_i + \sum_j \frac{\partial \gamma_s^t}{\partial t^j} \right) dt \tag{2.2}$$

Обозначим через $R_s(t, x, u, \lambda)$, $\overline{E}_s(\lambda)$ и т. д. конструкции, соответствующие функции $\varphi = \varphi_s + \lambda \gamma_s$.

Основную роль в вышеупомянутом приеме улучшения функции φ_s играет формула

$$\Delta I_s(\lambda) = \lambda \delta_s(x, u) + [L_s(x, u) - l_s] \tag{2.3}$$

где $\Delta I_s = I_s(\lambda) - I_s$, а $x(t)$, $u(t)$ — произвольная пара вектор-функций из множества $\overline{E}_s(\lambda)$.

Второе слагаемое в правой части формулы (2.3) неотрицательно. Поэтому для положительности ΔI_s достаточно положительности $\lambda \delta_s$.

В работе [2] рассматривается понятие элементарной операции улучшения функции $\varphi_s(t, x)$, которая задается условиями:

функция φ_{s+1} строится в виде (2.1), где $\lambda_s > 0$ и γ_s выбираются произвольно в пределах следующих требований:

$$\delta_s[x, u] > 0$$

хотя бы при одном значении

$$x, u \in \overline{E}_{s+1} = \overline{E}_s(\lambda)$$

$$\varphi_{s+1} = \varphi_s + \lambda_s \gamma_s$$

Ясно, что элементарная операция удовлетворяет неравенству

$$\Delta I_s = I_{s+1} - I_s > 0 \tag{2.4}$$

Пусть $q(t)$, $x(t)$, $u(t)$ — единственная совокупность функций, удовлетворяющих условиям

$$q(t) \in \overline{W}_s(\lambda),\ (x(t),\ u(t)) \in \overline{V}_s^l(\lambda)$$

Функция $\delta_s(\lambda) = \delta[x_s(t, \lambda),\ u_s(t, \lambda)]$ является полунепрерывной снизу, откуда следует, что если функция $\gamma_s(t, x)$ такова, что

$$\delta_s(0) > 0 \tag{2.5}$$

то существует $\lambda > 0$ такое, что

$$\delta_s(\lambda) > 0 \tag{2.6}$$

Элементарная операция распадается на два шага: задание функции $\gamma_s(t, x)$, удовлетворяющей (2.5), и отыскание $\lambda_s > 0$, удовлетворяющего (2.6) при заданном $\gamma = \gamma_s$.

Постоянная $\lambda = \lambda_s$ может выбираться в силу усиленного варианта

$$\lambda_s = \begin{cases} N, & \text{если } \overline{\lambda}_s \geq N \\ \overline{\lambda}_s, & \text{если } \overline{\lambda}_s < N \end{cases}$$

где N — заданное положительное число, не зависящее от s.

В следующем пункте мы займемся способами реализации элементарной операции для рассматриваемой нами задачи.

3. Способы реализации ЭО

Сначала предположим, что значения фазовых координат процесса на границе S заданы. Функция $\gamma_s(t, x)$ разыскивается в виде

$$\gamma_s^j(t, x) = \nu_{is}^j(t)\,x^i \qquad (j = 1, \ldots, m;\quad i = 1, \ldots, n)$$

где ν_{is}^j — подлежащие определению непрерывные функции.

Функционал δ_s для рассматриваемого случая запишется следующим образом:

$$\delta_s[\overline{x}, \overline{u}, \nu] = \sum_j \int\limits_{\gamma^j} \sum_{t \in \rho_s^j} \nu_{is}^j(t)\,\overline{x}_s^i(t)\Big|_{t-0}^{t+0} dt_j + \int\limits_{\gamma} \nu_{is}^j \overline{z}_{js}^i\, dt$$

где ρ_s^j — множество точек разрывов функции x_s по аргументу t^j,
$z_j^i(t) = \dfrac{\partial x^i}{\partial t^j} - f_j^i(t, x, u)$.

Для выполнения условия (2.5) достаточно выбирать непрерывную вектор-функцию $\nu_s(t)$ так, чтобы имело место неравенство

$$\delta_s[\overline{x}, \overline{u}, \nu] > 0 \tag{3.1}$$

Пусть $\nu_s^i(t)$ — функция, определяемая следующим образом:

$$\nu_s^i(t) = \begin{cases} x_s^i(t^j + 0) - \bar{x}_s^i(t^j - 0), & \text{если } t^j \in \rho_s^j \\ \bar{z}_{is}^i & \text{в остальных точках } T \end{cases} \tag{3.2}$$

Очевидно, что для этой функции условие (3.1) выполняется. Тем не менее, мы не можем брать ее в качестве искомой, поскольку в общем случае функция, определяемая из соотношения (3.2) является кусочно-непрерывной, что противоречит условию непрерывной дифференцируемости, наложенному на функции, принадлежащие классу Π.

Заметим, что функционал $\hat{\delta}$ линеен, а значит и непрерывен по аргументу ν. Поэтому условие (3.1) будет иметь место и для некоторой непрерывно-дифференцируемой функции $\bar{\nu}(t)$, аппроксимирующей функцию $\nu(t)$ с достаточно высокой степенью точности. Кроме того, функция $\bar{\nu}(t)$ может быть выбрана так, чтобы ее значения совпадали со значениями функции $\nu(t)$ в заданных точках, число которых конечно. Ввиду этого, при численном решении можно пользоваться значениями, получаемыми из соотношения (3.2).

Перепишем выражение для $\hat{\delta}_s[\bar{x}, \bar{u}, \nu]$ в несколько ином виде:

$$\hat{\delta}_s[\bar{x}, \bar{u}, \nu] = \int_T \nu_{is}^i \bar{z}_{is}^i dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_T \sum_{\bar{T}^j \in \rho_s^j} \bar{\delta}(t^j - \bar{T}^j) [\nu_s^i(t) \bar{x}_s^i(t) |_{\bar{T}^j - 0}^{\bar{T}^j + 0}] dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_T \nu_s^i [\bar{z}_{is}^i + \sum_{\bar{T}^j \in \rho_s^j} \bar{\delta}(t^j - \bar{T}^j) \bar{x}_s^i(t) |_{\bar{T}^j - 0}^{\bar{T}^j + 0}] dt \tag{3.3}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

Через $\bar{\delta}(\cdot)$ в этом выражении обозначена дельта-функция Дирака. Из (3.3) следует, что приняв

$$\nu_s^i(t) = \bar{z}_{is}^i + \sum_{\bar{T}^j \in \rho_s^j} \bar{\delta}(t^j - \bar{T}^j) \bar{x}_s^i(t) |_{\bar{T}^j - 0}^{\bar{T}^j + 0}$$

мы снова придем к неравенству (3.1).

Во многих задачах, в частности в линейных задачах с выпуклым функционалом, функцию $\nu^j(t)$ удобно брать зависящей лишь от j-ой переменной. Для этого случая равенство (3.3) запишется так:

$$\hat{\delta}_s = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_1^j} \nu_s^i \int_{T^j} [\bar{z}_{is}^i(t) + \sum_{\bar{T}^j \in \rho_s^j} \bar{\delta}(t^j - \bar{T}^j) \bar{x}_s^i(t) |_{\bar{T}^j - 0}^{\bar{T}^j + 0}] dt_j dt^j$$

и в качестве ν_s^i можно взять

$$\nu^j_{is}(t) = \int\limits_{T_j} [\bar{z}^j_{js}(t) + \sum_{\bar{t}^j \in \rho^j_s} \bar{\delta}(t^j - \bar{t}^j)\,\bar{x}^j_s(t)\,|^{\bar{t}^j+0}_{\bar{t}^j-0}\,]\,dt_j$$

Задание функций ν^j в таком виде обеспечивает максимальный рост функционала $\dot{\delta}$.

Можно предложить еще один способ нахождения функций ν, обеспечивающих условие (2.5).

Будем разыскивать функции ν^j в виде тригонометрического ряда

$$\nu^j_{is} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}^{ij}_{ki} \cos kt^j + \tilde{b}^{ij}_{ki} \sin kt^j$$

Подставляя функции ν^j_{is} в выражение для функционала и производя несложные преобразования, получим соотношение

$$\delta_s\,[\bar{x},\ \bar{u},\ \nu] = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}^s_{ki} \left(A^0_{1s} - \int\limits_{T} A_{1s} dt \right)^i_k + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}^s_{ki} \left(A^0_{2s} - \int\limits_{T} A_{2s} dt \right)^i_k \qquad (3.4)$$

где

$$A^0_{1s} = \sum_{j=1}^{m} \cos kt^j_1 \int\limits_{T^j} \bar{x}^{j1}_{js}\, dt_j - \sum_{j=1}^{m} \cos kt^j_0 \int\limits_{T^j} \bar{x}^{j0}_{js}\, dt_j$$

$$A^0_{2s} = \sum_{j=1}^{m} \sin kt^j_1 \int\limits_{T^j} \bar{x}^{j1}_{js}\, dt_j - \sum_{j=1}^{m} \sin kt^j_0 \int\limits_{T^j} \bar{x}^{j0}_{js}\, dt_j$$

$$A_{1s} = \sum_{j=1}^{m} [\cos kt^j \times a^j_{jl} \bar{x}^j_s + \cos kt^j \times b^j_{jp}\, \bar{u}^p_s - k \sin kt^j \times \bar{x}^j_s]$$

$$A_{2s} = \sum_{j=1}^{m} [\sin kt^j \times a^j_{jl} \bar{x}^j_s + \sin kt^j \times b^j_{jp}\, \bar{u}^p_s + k \cos kt^j \times \bar{x}^j_s]$$

Здесь

$$\bar{x}^{j0,1}_j = \bar{x}^j\,(t^1,\ t^2, \ldots, t^j_{0,1}, \ldots, t^m), \qquad (i,\ l = 1, \ldots, n;\ \ p = 1, \ldots, d),$$

$$\tilde{a}^{is}_{kl} = \tilde{a}^{(s-1)}_{kl}, \qquad \tilde{b}^{is}_{kl} = \tilde{b}^{(s-1)}_{kl}$$

Из (3.4) следует, что для выполнения условия (3.1) достаточно задать

$$\tilde{a}^s_{ki} = L^s_{ki}\,\mathrm{sign}\left(A^0_{1s} - \int\limits_{T} A_{1s}\, dt \right)^i_k$$

$$\tilde{b}^s_{ki} = M^s_{ki}\,\mathrm{sign}\left(A^0_{2s} - \int\limits_{T} A_{2s}\, dt \right)^i_k$$

где L^s_{ki} и M^s_{ki} — произвольные числа, большие нуля.

При доказательстве сходимости применяемого здесь алгоритма в работе [2] используется понятие нормировки функций ν:

1) $|\nu_s(t)| \leqslant 1$;

2) существует число $C \in (0, 1)$ такое, что при всех s

$$\delta_s[\bar{x}_s, \bar{u}_s] > C\{\Delta^1[\bar{z}_s] + \Delta^2[\bar{x}_s(t)]\} \tag{3.5}$$

3) число λ_s выбирается согласно усиленному варианту.

Фигурирующие в условии (3.5) величины Δ^1 и Δ^2 характеризуют отличие элемента $(x, u) \in E'$ от D. Этот элемент не содержится в классе D, если при каких-либо значениях t нарушаются основные уравнения связи $z(t) = 0$, либо имеют место разрывы $x(t)$. В соответствии с этим имеем

$$\Delta^1 = \int\limits_T \sum_{j=1}^m |z_j(t)|\, dt, \qquad \Delta^2 = \sum_{j=1}^m \int\limits_{T^j} \sum_{t \in \rho^j} |x(t)|_{t^j-0}^{t^j+0} dt_j$$

Сходимость последовательности процессов $\{\bar{x}_s, \bar{u}_s\}$ к D, о которой шла речь в п. 1, понимается в смысле равенств

$$\lim_{s\to\infty} \Delta_s^1 = 0, \qquad \lim_{s\to\infty} \Delta_s^2 = 0$$

Возвращаясь к условиям нормировки 1) и 2), отметим, что они легко учитываются первыми двумя из указанных выше способов реализации ЭО. Для этого достаточно в первом способе под функцией $\bar{\nu}^j$ понимать единичный вектор e^j, совпадающий в каждый момент t с направлением $\bar{\nu}^j$, а во втором — единичный вектор по направлению

$$\int\limits_{T^j} |\bar{z}_j + \sum_{T^j \in \rho^j} \bar{\delta}(t^j - \bar{t}^j)\, x(t)|_{t^j-0}^{t^j+0}|\, dt_j$$

Для третьего способа условия нормировки будут выполнены, если в пределах ограничения

$$\sum_{i=0}^{n} (|\bar{a}_{ki}^s| + |\tilde{b}_{ki}^s|) < 1 \tag{A}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad s = 1, 2, \ldots)$$

удастся удовлетворить условию роста (3.1) функционала δ.

Выше было предложено три способа реализации элементарной операции. Основным преимуществом первых двух из них является то, что они выполнимы всегда, коль скоро выполнима элементарная операция вообще. При этом, второй способ, использующий $\bar{\delta}$-функцию, обладает большей универсальностью, так как он позволяет представить функцию ν одинаковым образом во всех точках рассматриваемой области, что значительно облегчает работу на ЭВМ.

Возможности третьего способа несколько ограничены, поскольку выполнение условия (A) является труднопроверяемым.

4. Процедуры алгоритма

Выпишем конструкцию $R(t, x, u)$, задав функции φ^j линейными относительно фазовых координат

$$\varphi^j = \psi_i^j(t)\, x^i$$

$$R(t, x, u) = \psi_i^j \left(a_{jl}^i x^l + b_{jk}^i u^k\right) - a_i^0 x^{i^2} - b_i^0 u^{k^2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi_i^j}{\partial t^j} x^i$$

Найдем значения x и u, доставляющих максимум $R(t, x, u)$.

Простые вычисления показывают, что

$$\bar{x}^{\omega} = \frac{\psi_i^j a_{j\omega}^i + \dfrac{\partial \psi_\omega^j}{\partial t^j}}{2a_\omega^0} \qquad \omega = 1, 2, \ldots, n \tag{4.1}$$

$$\bar{u}^{\omega'} = \frac{\psi_i^j b_{j\omega'}^i}{2b_{\omega'}^0} \qquad \omega' = 1, 2, \ldots, d \tag{4.2}$$

В этих выражениях $\psi_i^j = \dfrac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}$.

Из (4.1) и (4.2) следует соотношение

$$z_\omega^k = \frac{\dfrac{\partial \psi_i^j}{\partial t^k} a_{j\omega}^i + \dfrac{\partial^2 \psi_\omega^j}{\partial t^j \partial t^k}}{2a_\omega^0} - a_{\omega l}^k \frac{a_{jl}^i \psi_i^j + \dfrac{\partial \psi_l^j}{\partial t^j}}{2a_l^0} - b_{\omega\omega'}^k \frac{b_{j\omega'}^i \psi_i^j}{2b_{\omega'}^0} \tag{4.3}$$

Пусть на S-ом шаге нам известны величины

$$\bar{x}_s^{\omega}(t),\ \bar{u}_s^{\omega'}(t),\ \bar{z}_{ms}^k(t),\ \psi_{is}^j(t)$$

$$(i, \omega = 1, \ldots, n; \quad j, k = 1, \ldots, m; \quad \omega' = 1, \ldots, d)$$

Подставив в правые части формул (4.1), (4.2) и (4.3) функции $\psi_{is}^j + \lambda \nu_{is}^j$, мы сможем явно выписать функции $\bar{x}_s^{\omega}(t, \lambda)$, $\bar{u}_s^{\omega'}(t, \lambda)$, $\bar{z}_{ms}^k(t, \lambda)$. Далее определяем число λ_s в силу усиленного варианта.

Схема реализации алгоритма выглядит следующим образом. Обозначим через Δ_s^1, Δ_s^2, l_s значения функционалов Δ^1, Δ^2 и l, соответствующие процессу $\{\bar{x}_s, \bar{u}_s\}$ и функции φ_s на s-ом шаге.

Пусть последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такова, что

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0, \qquad \varepsilon_n > 0$$

При данном s проверяем условие

$$\max \left| \Delta_{s+1}^1 - \Delta_s^1,\ \Delta_{s+1}^2 - \Delta_s^2,\ l_{s+1} - l_s \right| < \varepsilon_n$$

Если это условие выполнено при достаточно большом N, то проверяем условие

$$\max\{\Delta_s^1, \Delta_s^2\} < \varepsilon_N.$$

Если выполнено и это условие, то принимаем $l_s = \bar{l}$ и считаем решение задачи законченным. В противном случае, по одному из способов переходим к $s + 1$.

5. Общий случай

Выше всюду предполагалось, что значения фазовых координат на границе S заданы. Здесь мы рассмотрим общий случай, а именно, будем предполагать, что $2m$ граней исходного параллелепипеда T разбиты на три группы: в первую группу (их число обозначим через k') входят те грани, на которых значения функций $x^i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ не заданы, во вторую группу входят грани (их число обозначим через k''), на которых требуется минимизировать функционал; на остальных гранях значения искомых фазовых координат заданы.

Допустим, кроме того, что противолежащие грани принадлежат одной и той же группе. Это условие может быть легко обобщено и вводится нами лишь для облегчения записи.

Как следует из аппарата достаточных условий, для получения оптимальных значений фазовых координат на границе необходимо изучить на минимум функцию

$$G = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{T^j} \varphi^j [t, x(t)] \Big|_{0}^{l_j} dt_j + F[q(t)], \qquad q(t) = x(t \in S)$$

При сделанных выше предположениях функция G принимает вид

$$G[q(t)] = \sum_{j=1}^{k'} \int\limits_{T^j} \varphi^j (t, x) \Big|_{t^j=0}^{t^j=l_j} dt_j + \sum_{j'=1}^{k''} \int\limits_{T^{j'}} \varphi^{j'} (t, x) \Big|_{t^{j'}=0}^{t^{j'}=l_{j'}} dt_{j'} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j'=1}^{k''} [(x_{j'}^{i1} - h_{j'}^{i1})^2 + (x_{j'}^{i0} - h_{j'}^{i0})^2] dt_{j'} \tag{5.1}$$

Для единственности функций, доставляющих минимум G, добавим к правой части (5.1) слагаемое

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k'} \int\limits_{T^j} [(x_j^{0i})^2 + (x_j^{1i})^2] dt_j, \qquad \varepsilon > 0$$

откуда получим

$$\bar{x}_j^{i1} = \underset{x_j^{i1} \in W}{\operatorname{argmin}} G[q(t), \varepsilon] = \frac{2h_j^{i1} - \psi_j^i(t_1^i)}{2} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, k'' \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_j^{i0} = \underset{x_j^{i0} \in W}{\operatorname{argmin}} G[q(t), \varepsilon] = \frac{2h_j^{i0} - \psi_j^i(t_0^i)}{2} \tag{5.2}$$

$$\bar{x}_j^{i1} = \underset{x_j^{i1}}{\operatorname{argmin}} G[q(t), \varepsilon] = -\frac{\psi_j^i(t_1^i)}{2\varepsilon} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, k' \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_j^{i0} = \underset{x_j^{i0}}{\operatorname{argmin}} G[q(t), \varepsilon] = \frac{\psi_j^i(t_0^i)}{2\varepsilon}$$

Здесь

$$G[q(t), \varepsilon] = G[q(t)] + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k'} [(x_j^{0i})^2 + (x_j^{1i})^2]\, dt_j$$

Полученные значения следует использовать при вычислении функционалов $\hat{\varepsilon}$, l, Δ^1, Δ^2.

Правомерность замены задачи минимизации функции $G[q(t)]$ на задачу минимизации функции $G[q(t), \varepsilon]$ обосновывается следующей леммой:

пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ к функции $f_0(x)$, монотонно не возрастая. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_x f_n(x) = \inf\limits_x f_0(x)$, и если последовательность точек $\{x_n\}$ такова, что $f_n(x_n) \leqslant \inf\limits_x f_n(x) + \varepsilon_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_0(x_n) = \inf_x f_0(x)$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $\varepsilon_n > 0$.

Доказательство. По любому $\varepsilon > 0$ существует точка x_0 и номер N такие, что

$$f_0(x_0) \leqslant \inf_x f_0(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad f_n(x_0) - f_0(x_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > N$$

Тогда

$$0 \leqslant \inf_x f_n(x) - \inf_x f_0(x) \leqslant \inf_x f_n(x) - f_0(x_0) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f_n(x_0) - f_0(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

откуда следует первое утверждение.

Для точек $\{x_n\}$ имеем

$$f_0(x_n) \leqslant f_n(x_n) \leqslant \inf_x f_n(x) + \varepsilon_n$$

и так как

$$\lim_{n\to\infty} \inf_x f_n(x) = \inf_x f_0(x)$$

то получим

$$f_0(x_n) - \inf_x f_0(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

и т. д.

Ясно, что функции $G(q, \varepsilon)$ и $G(q)$ удовлетворяют условиям леммы и поэтому при достаточно малых $\varepsilon > 0$ полученные значения функций $\operatorname{argmin} G(q, \varepsilon)$ можно считать хорошими приближениями к оптимальным значениям.

Автор выражает глубокую благодарность В. Ф. Кротову за постоянное внимание к работе.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 VI 1980

Մ. Խ. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

ԲԱՇԽՎԱԾ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԿԱՌԱՎԱՐՎՈՂ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՕՊՏԻՄԻԶԱՑՄԱՆ ՀԱՇՎԱՅԻՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Նկարագրվում են բաշխված պարամետրերով գծային ղեկավարվող համակարգերի լուծման և օպտիմիզացման հաշվային ալգորիթմները, որոնք հիմնված են Վ. Ֆ. Կրոտովի օպտիմալության բավարար պայմանների վրա։

Բերված են ուսումնասիրվող ալգորիթմների հիմնական գործողության իրականացման միջոցները։

Առաջարկված են գծային խնդիրների լուծման, ինչպես նաև քառակուսային որակի ֆունկցիոնալով խնդիրների համար բերված հաշվային ալգորիթմների իրականացման միջոցները հաշվի առնող սխեմաներ։

ON CALCULATIVE ALGORITHMS FOR THE SOLVING AND OPTIMIZATION OF LINEAR CONTROLLABLE SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

M. Kh. GHUKASIAN

Summary

Calculative algorithms for the solving and optimization of linear controllable systems with distributed parameters, based on the sufficient conditions of V. Krotov's optimality are described. The ways of realization of the basic operation of the studied algorithms are presented. A sufficiently general case of moving boundaries is considered. The solution scheme of linear problems as well as those with a quadratic functional of quality is suggested, taking into account the given ways of realization.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. М., «Наука», 1973, стр. 434.
2. *Кротов В. Ф.* Вычислительные алгоритмы решения и оптимизации управляемых систем уравнения. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1975, №№ 5, 6.
3. *Кротов В. Ф.* Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий оптимальности, ч. I, II, III. — Автоматика и телемеханика, 1962, № 12; 1963, № 5; 1964, № 7