

Ж. Г. АПИКЯН, М. А. ЗАДОЯН

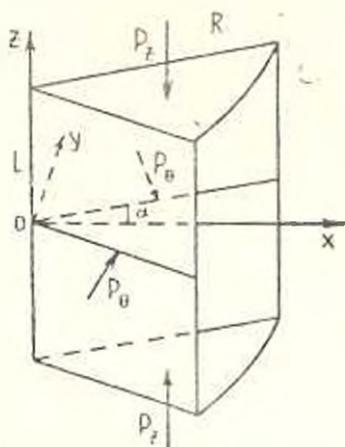
ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОГО КЛИНА МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Сжатие прямоугольной массы жестко-пластического материала между жесткими параллельными шероховатыми плитами рассмотрено в [1]. Плоское и осесимметричное пластические течения через клинообразный и конусообразный каналы рассмотрены в работах [1—3]. В настоящей работе рассматривается пространственная задача прочности клина из несжимаемого пластически неоднородного анизотропного материала. Принимается, что материал подчиняется соотношениям жестко-пластического тела Мисеса—Хилла [1].

1. Пусть пространственный клин (фиг. 1) сжимается шероховатыми жесткими наклонными плитами $\theta = \pm \alpha$, вращающимися вокруг продольной оси z с угловой скоростью ω . Одновременно клин вдавливается в торцевых сечениях $z = \pm l$ жесткими шероховатыми плитами при заданных скоростях перемещений w_0 . Далее, как обычно, принимается, что касательное напряжение τ_{rz} , возникающее между плитами и клином, равняется предельному значению mk , где k — пластическая постоянная, а m ($0 \leq m \leq 1$) — показатель степени шероховатости плит. Принимаем, что плиты обладают свойством шероховатости только вдоль радиального направления, а в направлении оси z они идеально гладки. Учитывая эти условия, полуобратным способом принимаем, что $\tau_{rz} = \tau_{zr} = 0$ по всему объему клина. На свободной поверхности условие отсутствия нормального и касательного напряжений заменяется условием равенства нулю главного вектора напряжений.

Исходя из характера напряженно-деформированного состояния, полуобратным способом [4] принимаем, что для рассматриваемой задачи тензор скоростей деформаций не зависит от r и z .

Ввиду симметрии поставленной задачи рассматривается напряженное состояние клина ($0 \leq \theta \leq \alpha$, $0 \leq z \leq l$, $0 \leq r \leq R$).



Фиг. 1.

Очевидно, будем иметь следующие граничные условия:

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=0} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\alpha} = -mk, \quad v|_{r=0} = 0, \quad v|_{r=r_0} = w_0 \quad (1.1)$$

$$w|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=l} = w_0, \quad \int_0^{\pi} (\tau_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) d\theta|_{r=r_0} = 0 \quad (1.2)$$

Принимается, что в каждой точке тела анизотропные свойства «подобны», то есть принимается, что параметры анизотропии пропорциональны пластически неоднородной функции. Таким образом, условие пластичности Мизеса—Хилла берется в виде

$$a_{11}(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + a_{22}(\sigma_z - \sigma_r)^2 + a_{33}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 2a_{12}\tau_{r\theta} = \sigma^2 \quad (1.3)$$

Соотношения между скоростями перемещений, скоростями деформаций и компонентами напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \beta e^{-2\lambda\theta} [a_{33}(\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta) + a_{22}(\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_z)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \beta e^{-2\lambda\theta} [a_{11}(\dot{\sigma}_\theta - \dot{\sigma}_z) + a_{33}(\dot{\sigma}_\theta - \dot{\sigma}_r)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \beta e^{-2\lambda\theta} [a_{22}(\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_r) + a_{11}(\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_\theta)]$$

$$2\tau_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 2\beta e^{-2\lambda\theta} a_{12}\dot{\sigma}_{r\theta}$$

Дифференциальные уравнения равновесия имеют вид

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} = 0 \quad (1.5)$$

Учитывая граничные условия и используя соотношения (1.4), находим [4]

$$u = r z, \quad v = \frac{w_0}{l} r \theta - 2r \int_0^\theta \varepsilon_r d\theta, \quad w = -\frac{w_0}{l} z \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_r = A_0 + 2 \int_0^\theta \tau_{r\theta} d\theta, \quad \varepsilon_z = -\frac{w_0}{l}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w_0}{l} - \varepsilon_r \quad (1.7)$$

Из соотношений (1.4) также имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{a_{12}}{\alpha} [(a_{11} + a_{22}) \varepsilon_r + a_{22} \varepsilon_z] \frac{\tau_{r\theta}}{\tau_{r\theta}} \\ \sigma_z - \sigma_\theta &= \frac{a_{12}}{\alpha} [a_{22} \varepsilon_r + (a_{22} + a_{33}) \varepsilon_z] \frac{\tau_{r\theta}}{\tau_{r\theta}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\sigma_r - \sigma_z = \frac{a_{12}}{x} (a_{11} \varepsilon_r - a_{33} \varepsilon_z) \frac{\tau_{r\theta}}{\tau_{r\theta}}$$

где

$$x = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22}$$

Из (1.5) и (1.8) следует

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} + \frac{a_{12}}{x} [(a_{11} + a_{22}) \varepsilon_r + a_{22} \varepsilon_z] \frac{\tau_{r\theta}}{\tau_{r\theta}} + M = 0 \quad (1.9)$$

$$\tau_{r\theta} = M \ln r + N - 2 \int_0^\theta \tau_{r\theta} d\theta \quad (1.10)$$

где M, N — произвольные постоянные.

Из (1.3), (1.8) — (1.10) имеем

$$\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_{r\theta}} = \frac{\sqrt{x}}{a_{12}} T = \frac{1}{a_{12}^2} \frac{\Omega}{k} \quad (1.11)$$

где

$$\frac{\Omega}{k} = \sqrt{e^{2\lambda} - 2 a_{12}^2 \tau_{r\theta}^2 - \frac{x}{a_{11} + a_{22}} (\tau_{r\theta} + M)^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{e^{2\lambda} - 2 a_{12}^2 \tau_{r\theta}^2}{(a_{11} + a_{22}) \varepsilon_r^2 + 2 a_{22} \varepsilon_r \varepsilon_z + (a_{22} + a_{33}) \varepsilon_z^2}}$$

После некоторых преобразований из (1.7), (1.9) — (1.11) найдем

$$\Omega \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\Omega} \left(\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} + M \right) \right] + 2 a_{12} \frac{a_{11} + a_{22}}{\Omega} \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.12)$$

Разрешая уравнение (1.12) относительно старшей производной, получим

$$\tau_{r\theta}' = 2 a_{12} \tau_{r\theta} \left[\frac{M}{f} (\tau_{r\theta} + M) - \frac{a_{11} + a_{22}}{x} \right] + \lambda \frac{e^{2\lambda}}{f} (\tau_{r\theta} + M) \quad (1.13)$$

где

$$f = e^{2\lambda} - 2 a_{12}^2 \tau_{r\theta}^2$$

Полагая $\tau_{r\theta} = k\tau$, $M = kM_0$, $N = kN_0$, из (1.13) имеем

$$\tau' = 2 a_{12} \tau \left[\frac{k^2 M_0}{f} (\tau + M_0) - \frac{a_{11} + a_{22}}{x} \right] + \lambda \frac{e^{2\lambda}}{f} (\tau + M_0) \quad (1.14)$$

2. Можно показать, что при малом угле α решение задачи приводится к квадратуре. Оставив первые члены в соответствующих разложениях при малом α , найдем

$$\varepsilon_r \approx A_0, \quad \tau \approx -\frac{m}{\alpha} \theta, \quad A_0 \approx \frac{w}{2\alpha}, \quad M_0 \approx \frac{m}{\alpha} \quad (2.1)$$

Сделаем замену независимой переменной θ в уравнении (1.14) $\theta = M_0 \theta$. В результате получим уравнение

$$\frac{d^2 \tau}{dx^2} = 2 a_{12} \tau \left[\frac{k^2}{f_1} \left(\frac{d\tau}{dx} + 1 \right) - \frac{a_{11} + a_{22}}{2M_0^2} \right] + \frac{i}{M_0} \frac{e^{\frac{2\lambda}{M_0} x}}{f_1} \left(\frac{d\tau}{dx} + 1 \right) \quad (2.2)$$

где

$$f_1 = e^{\frac{2\lambda}{M_0} x} - 2 a_{12} k^2 \tau^2$$

Пренебрегая малыми членами в уравнении (2.2), найдем

$$\frac{d^2 \tau}{dx^2} = 2 a_{12} k^2 \tau \left(\frac{d\tau}{dx} + 1 \right), \quad f_2 = 1 - 2 a_{12} k^2 \tau^2 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) явно не содержит независимой переменной x . Сделаем замену $\tau' = \varphi(\tau)$, из уравнения (2.3) получаем

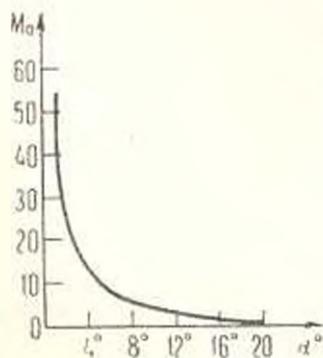
$$\frac{2 a_{12} k^2 \tau d\tau}{1 - 2 a_{12} k^2 \tau^2} = \frac{\varphi d\varphi}{\varphi + 1} \quad (2.4)$$

интеграл которого будет

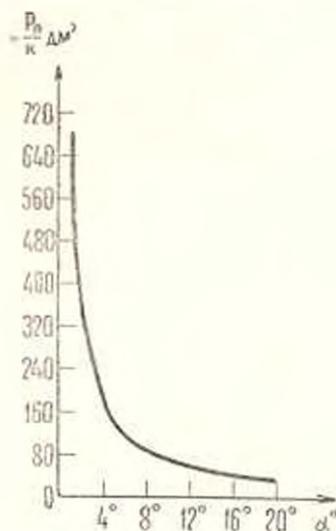
$$\tau = - \frac{1}{\sqrt{2 a_{12} k}} \sqrt{1 - \frac{(\varphi + 1)^2}{(\varphi_0 + 1)^2} e^{-2(\varphi + \varphi_0)}} \quad (2.5)$$

здесь φ_0 — произвольная постоянная. С другой стороны, имеем

$$\theta = - \frac{1}{\sqrt{2 a_{12} k M_0}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{(\varphi + 1)^2 e^{2(\varphi_0 - \varphi)} d\varphi}{(\varphi_0 + 1)^2 \sqrt{1 - \frac{(\varphi + 1)^2}{(\varphi_0 + 1)^2} e^{-2(\varphi - \varphi_0)}}} \quad (2.6)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Соотношения (2.5), (2.6) дают связь $\tau = \tau(0)$ в параметрической форме. Произвольные постоянные φ_0 , M_0 определяются из условий

$$z(z) = -m, \frac{d^2 z(0)}{d\theta^2} = M_0 \gamma_0 \quad (2.7)$$

3. Проведено численное исследование задачи при следующих значениях параметров:

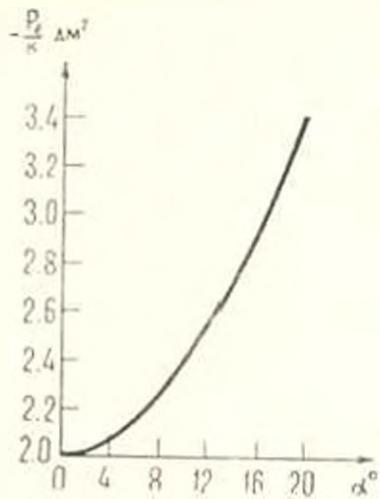
$$a_{11} = a_{21} = \frac{1}{8k^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{10k^2},$$

$$a_{12} = \frac{1}{4k^2}, \quad \lambda = 0, \quad l = 30 \text{ см.}$$

$$k = 20 \text{ см.}, \quad \omega_0 = 0.3 \text{ см/сек.}$$

$$\omega = 0.01 \text{ сек}^{-1}, \quad \alpha = 1^\circ, 2^\circ, \dots, 20^\circ.$$

Приведены графики зависимостей $M_r, P_1/k, P_2/k$ от α , где



Фиг. 4

$$P_1 = 2l \int_0^R z_1(r, \alpha) dr, \quad P_2 = 2 \int_0^R \int_0^\alpha z_2(r, \theta) r dr d\theta$$

суммарные давления соответственно на гранях $\theta = \pm \alpha$ и $z = \pm l$ (фиг. 2—4).

Вычислены также соответствующие значения $M_r, P_1/k, P_2/k$ для изотропного материала. Сравнение величин для изотропного и анизотропного случаев показывает, что анизотропия незначительна при малых углах раствора клина и эффект от анизотропии возрастает с увеличением угла α . Так, при $\alpha = 1^\circ$ величины $M_r, P_1/k, P_2/k$ в анизотропном случае отличаются от соответствующих величин в изотропном случае на 0.2%, 0.6%, 0.7% соответственно, а при $\alpha = 20^\circ$ — уже на 12.4%, 13.4%, 9%.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 IX 1980

ժ. Գ. ԱՅԿՅԱՆ Ե Ա. ԶԱԿՈՅԱՆ

ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՍԵՊՈՒ ՏԱՐԱՆԱԿԱՆ ՀՈՍՔԸ
ԿՈՇՏ ԱՆՀԱՐՔ ՍԱԼԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքում դիտարկվում է անսեղմելի պլաստիկորեն անհամասեռ անիզոտրոպ նյութից սեպի ամրության տարածական խնդիրը:

Այնպով յարվածային-ղեֆորմացիոն փիճակի բնույթից կիսահակադարձ եղանակով բնութանված է, որ դեֆորմացիաների արագության տեղորոք կախված է միայն բնեռային անկյունից, և լարման մի բաղադրիչի համար ստացված է երկրորդ կարգի ստիտրական ոչ-զծային դիֆերենցիալ հավասարում: Սեպի բացվածքի փոքր անկյան դեպքում խնդրի լուծումը բերվում է կվադրատային Ռերված է թվային օրինակ:

SPACE FLOW OF A PLASTICALLY ANISOTROPIC WEDGE BETWEEN RIGID ROUGH PLATES

J. G. APKIAN, M. A. ZADOIAN

S u m m a r y

The space problem in strength of a wedge of incompressible plastic non-homogeneous anisotropic material is considered. Proceeding from the pattern of the stress-strain state, using a half-inverse method, it is assumed that the deformation velocity tensor depends on the polar angle only, and the ordinary non-linear differential equation of second order is obtained for the stress component. For a small angle of the wedge opening the solution of the problem is reduced to quadratures. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехтеориздат, 1956.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности, М., «Высшая школа», 1969.
3. Шилл Р. Т. Пластическое течение в сходящемся коническом канале. Сб. переводов «Механика», 1956, № 3.
4. Задоян М. А. Частное решение уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. ДАН СССР, 1964, т. 157, № 1.