ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

А. Г. АВЕТИСЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ВЕРШИНЫ СОСТАВНОГО УПРУГОГО КЛИНА

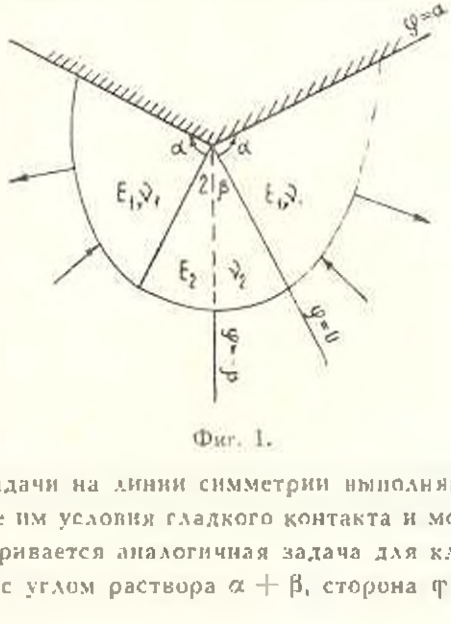
Исследование напряженного состояния вблизи края поверхности контакта составного упругого тела проведено в работах [1—11].

В настоящей работе при помощи местного решения плоской задачи теории упругости [4] исследуется напряженное состояние около края поверхности соединения в композиции, представляющей из себя спай трех плоских клиньев, соединенных по боковым сторонам. Края составного клина заделаны. Материалы боковых клиньев одинаковы и углы раствора равны. На замыкающей части контура составного клина задана внешняя нагрузка, обуславливающая плоскую деформацию или плоское напряженное состояние.

Решение рассматриваемой задачи приводится к отысканию корня трансцендентного уравнения.

Анализ результатов вычислений, проведенных для трех серий значений пяти параметров задачи для плоского напряженного состояния составного клина, показывает, что характер напряженного состояния около рассматриваемого края поверхности соединения существенным образом зависит от упругих деформативных характеристик соединенных материалов и от геометрии соединения.

1. Пусть тело изготовлено из трех спаянных между собой по боковым поверхностям цилиндрических тел. Поперечным сечением тела является составной клин с заделанными краями и углом раствора $2(\alpha+\beta)$. Материалы боковых клиньев одинаковы с одинаковым углом раствора α, а между боковыми клиньями расположен клин из другого материала с углом раствора 2β (фиг. 1).



Фиг. 1.

Вследствие симметричности задачи на линии симметрии выполняются условия симметрии или идентичные им условия гладкого контакта и можно считать, что одновременно рассматривается аналогичная задача для клина, составленного из двух материалов с углом раствора $\alpha+\beta$, сторона $\varphi=\alpha$

(в полярной системе координат r, φ) которого заделана, а на стороне $\varphi = -\beta$ выполняются условия гладкого контакта. Линия контакта материалов принимается за полярную ось ($\varphi = 0$), на замкнутой части контура действует внешняя нагрузка (фиг. 1).

При отсутствии массовых сил компоненты напряжений через функцию напряжений Эри Φ в полярных координатах выражаются формулами

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) \tag{1.1}$$

Функция $\Phi(r, \varphi)$ в областях I и II (фиг. 1) удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 \Phi_i = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^2 \Phi_i = 0 \quad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.2) в областях I и II имеет вид [4]

$$\Phi_i = r^{\lambda+1}\,\Theta_i(\lambda, \varphi) \tag{1.3}$$

где

$$\Theta_i = A_{i1}\sin(\lambda+1)\varphi + A_{i2}\cos(\lambda+1)\varphi + A_{i3}\sin(\lambda-1)\varphi + A_{i4}\cos(\lambda-1)\varphi \tag{1.4}$$

A_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$) — постоянные интегрирования;
λ — некоторый параметр.

Краевые условия и условия на линии контакта в случае плоского напряженного состояния через функцию Φ имеют следующий вид [12]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} - \nu_1\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} = 0$$

$$(2+\nu_1)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right) + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} -$$

$$-\frac{2}{r^3}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \varphi^3} = 0 \qquad \text{при} \quad \varphi = \alpha \tag{1.5}$$

$$(2+\nu_2)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\right) + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} -$$

$$-\frac{2}{r^3}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \varphi^3} = 0$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} = 0 \qquad \text{при} \quad \varphi = -\beta$$

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}$$

$$\frac{1}{E_1}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} - \nu_1\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{E_2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} - \nu_2\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2}\right) \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{E_1}\left[(2+\nu_1)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial r^2\partial\varphi}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\varphi^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{E_2}\left[(2+\nu_2)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial r^2\partial\varphi}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r\partial\varphi}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r\partial\varphi}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial\varphi^3}\right] \qquad \text{при } \varphi=0$$

где E_i и ν_i ($i=1, 2$) — модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов. Для плоской деформации вместо ν_i подставляется $\nu_i/(1-\nu_i)$.

Удовлетворяя (1.5) и (1.6), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования A_{ij} ($i=1, 2$; $j=1, 2, 3, 4$)

$$\lambda[\nu_1^+\lambda^+ s_1^+ A_{11}+\nu_1^+\lambda^+ c_1^+ A_{12}+(\nu_1^-\lambda^+-4)s_1^- A_{13}+(\nu_1^-\lambda^+-4)c_1^- A_{14}]=0$$

$$\lambda^-\lambda[\nu_1^+\lambda^- c_1^+ A_{11}-\nu_1^+\lambda^- s_1^+ A_{12}+(\nu_1^-\lambda^-+4)c_1^- A_{13}-(\nu_1^+\lambda^-+4)s_1^- A_{14}]=0$$

$$-\lambda[\nu_2^+\lambda^- c_2^+ A_{21}+\nu_2^+\lambda^+ s_2^+ A_{22}+(\nu_2^-\lambda^-+4)c_2^- A_{23}+(\nu_2^+\lambda^-+4)s_2^- A_{24}]=0$$

$$\lambda(\lambda^+ c_2^+ A_{21}+\lambda^+ s_2^+ A_{22}+\lambda^- c_2^- A_{23}+\lambda^- s_2^- A_{24})=0$$

$$\lambda\left\{\frac{1}{E_1}[\nu_1^+\lambda^- A_{12}+(\nu_1^+\lambda^--4)A_{14}]-\frac{1}{E_2}[\nu_2^+\lambda^+ A_{22}+(\nu_2^+\lambda^+-4)A_{24}]\right\}=0$$

$$\lambda^-\lambda\left\{\frac{1}{E_1}[\nu_1^+\lambda^+ A_{11}+(\nu_1^-\lambda^-+4)A_{13}]-\frac{1}{E_2}[\nu_2^+\lambda^+ A_{21}+(\nu_2^+\lambda^-+4)A_{23}]\right\}=0$$

$$A_{12}+A_{14}-A_{22}-A_{24}=0 \qquad (1.7)$$

$$\lambda^- A_{11}+\lambda^- A_{13}-\lambda^+ A_{21}-\lambda^- A_{23}=0$$

В системе (1.7) для краткости приняты обозначения

$$s_1^+=\sin(\lambda+1)\alpha,\quad s_2^+=\sin(\lambda+1)\beta,\quad s_1^-=\sin(\lambda-1)\alpha,\quad s_2^-=\sin(\lambda-1)\beta$$

$$c_1^+=\cos(\lambda+1)\alpha,\quad c_2^+=\cos(\lambda+1)\beta,\quad c_1^-=\cos(\lambda-1)\alpha,\quad c_2^-=\cos(\lambda-1)\beta$$

$$\lambda^+=\lambda+1,\quad \lambda^-=\lambda-1,\quad \nu_i^+=\nu_i+1 \quad i=1,\ 2$$

Для существования нетривиального решения однородной системы (1.7) необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю

$$\Delta(\lambda,\ \mu,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \alpha,\ \beta)=0$$

который после ряда громоздких преобразований приводится к трансцендентному уравнению относительно λ

$$\Delta=-\frac{64\lambda^6\lambda^{-3}\lambda^{+3}}{E_1}\left\{m_1^2\mu\lambda\sin 2(\alpha+\beta)+\left[m_1^2-m_1^2\mu-\right.\right.$$

$$\left.-m_1^2\frac{m_1-\mu m_2}{2}+2\left(\frac{m_1-m_2\mu}{4}\right)^2(m_1^2-4m_1+8)\right](\lambda\sin 2\beta+\sin 2\lambda\beta)+$$

$$+\frac{m_1-\mu m_2}{2}\mu(m_1^2-4m_1+8)\sin 2\lambda\beta+m_1(m_1-4)\frac{m_1-\mu m_2}{2}\Bigl(1-$$

$$-\frac{m_1-\mu m_2}{4}\Bigr)(\lambda\sin 2\beta\cos 2\lambda\alpha+\sin 2\lambda\beta\cos 2\lambda\alpha)-$$

$$-\mu m_1(m_1-4)\frac{m_1-\mu m_2}{2}\sin 2\lambda\beta\cos 2\lambda\alpha+$$

$$+2m_1^2\left(\frac{m_1-\mu m_2}{4}\right)^2(\cos 2\alpha-1)(\lambda^2\sin 2\beta+\lambda^2\sin 2\lambda\beta)+$$

$$+\mu m_1^2\frac{m_1-\mu m_2}{2}(\cos 2\alpha-1)\lambda^2\sin 2\lambda\beta+$$

$$+\mu m_1(m_1-4)\sin 2\lambda(\alpha+\beta)\Bigr\}=0 \tag{1.8}$$

где

$$\mu=\frac{E_1}{E_2}, \quad m_i=\nu_i+1, \quad i=1,\ 2$$

Трехкратный корень $\lambda=1$ уравнения $\Delta=0$ исключен, так как ему соответствует тривиальное решение рассматриваемой краевой задачи для Θ.

В следующих частных случаях уравнение (1.8) примет вид

при $\beta=0$
$$\lambda\sin 2\alpha+\frac{m_1-4}{m_1}\sin 2\lambda\alpha=0 \tag{1.9}$$

при $\alpha=0$
$$\lambda\sin 2\beta+\frac{m_2-4}{m_2}\sin 2\lambda\beta=0 \tag{1.10}$$

при $\mu=1,\quad \nu_1=\nu_2=\nu,\quad m=\nu+1$

$$\lambda\sin 2(\alpha+\beta)+\frac{m-4}{m}\sin 2\lambda(\alpha+\beta)=0 \tag{1.11}$$

а при $\mu=0$

$$\lambda\sin 2\beta+\sin 2\lambda\beta=0 \tag{1.12}$$

$$\lambda^2\sin^2\alpha-\left(\frac{m_1-4}{m_1}\right)^2\sin^2\lambda\alpha=0 \tag{1.13}$$

Уравнения (1.9) — (1.11) соответствуют известным случаям однородного клина с различными граничными условиями [1].

Для каждой комбинации конкретных значений параметров α, β, μ, ν_1 и ν_2 уравнение (1.8) имеет бесконечное множество корней, расположенных в комплексной плоскости λ симметрично относительно осей координат. Корням (1.8), имеющим отрицательные действительные части, соответствуют решения, которые для вершины клина не имеют смысла. Остальные корни (1.8), которым соответствуют нетривиальные решения, пронумеруем по порядку возрастания действительных частей. При равных действительных частях нумерация ведется по возрастанию мнимой части. Принимаем, что все эти корни простые.

Решение плоской задачи теории упругости в рассматриваемой области может быть представлено в виде ряда [13]

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} r^{\lambda_k+1} \Theta(\varphi, \lambda_k) \tag{1.14}$$

где

$$\Theta(\varphi, \lambda_k) = \begin{cases} \Theta_1(\varphi, \lambda_k) & \text{при} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha \\ \Theta_2(\varphi, \lambda_k) & \text{при} \quad -\beta \leqslant \varphi \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

Система функций $\Theta(\varphi, \lambda_k)$ в интервале $(-\beta, \alpha)$ является четырехкратно полной в классе действительных функций, непрерывных со своими производными до четвертого порядка в интервалах $(-\beta, 0)$, $(0, \alpha)$ и удовлетворяющих условиям (1.14) и (1.15) [4, 6].

Из (1.1) и (1.14) видно, что если $0 \leqslant \mathrm{Re}(\lambda_1) < 1$, то напряжения при приближении к угловой точке линии раздела областей неограниченно возрастают, причем порядок особенности напряжений при этом равен $|\mathrm{Re}(\lambda_1) - 1|$. А если $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 1$, то напряжения затухают при $r \to 0$.

Таким образом, исследование характера напряженного состояния в окрестности края поверхности соединения нагруженного составного тела при заданных граничных условиях приводится к отысканию корней с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения (1.8).

Искомый корень уравнения (1.8) вычислен на ЭВМ для следующих значений параметров задачи:

$$\nu_1, \nu_2 = 0.2, \ 0.3, \ 0.4$$

$$\mu = 2^{-n}; \ n = 0, 1, 2, 4, 5, 6; \ \mu = 2^m; \ m = 1, 2, 4, 6; \ \mu = 1 \pm 2^{-k},$$
$$k = 1, 2, 4, 6;$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} n_1, \ \alpha = \frac{\pi}{24} q, \ q = 1, 2, \ldots, 11 + 2n_1, \ n_1 = -1, 0, 1.$$

В табл. 1, 2, 3 приведены значения наименьших положительных действительных частей корней трансцендентного уравнения (1.8) для некоторых комбинаций указанных значений параметров, характерных для рассматриваемой задачи.

2. Анализ результатов вычислений, проведенных для трех серий значений пяти параметров задачи (α, β, μ, ν_1 и ν_2), позволяет выявить следующие общие закономерности характера напряжений вблизи вершины составного клина:

а) $$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$

При одинаковых значениях коэффициентов Пуассона ($\nu_1 = \nu_2$, табл. 1) вблизи вершины клина ($r \to 0$) напряжения затухают, если $0.5 < \mu < 64$,

Таблица 1

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$

	μ	$\alpha = \frac{\pi}{24} q$						
		$q = 1$	3	5	6	7	8	9
$\nu_1 = \nu_2 = 0.2$	0.25	0.9432	0.7567	0.6751	0.6630	0.6736	0.7180	0.8294
	0.50	1.0457	0.9424	0.8854	0.8779	0.8886	0.9240	0.9947
	0.75	1.0866	1.0138	1.0164	1.0105	1.0202	1.0384	1.0681
	1.0	1.1081	1.1081	1.1084	1.1084	1.1084	1.1084	1.1084
	128	1.1778	1.3795	1.6281	1.3866	1.21474	1.0911	1.0048
$\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.2$	0.25	0.9577	0.7738	0.6924	0.6761	0.6817	0.7208	0.8262
	0.5	1.0537	0.9570	0.8983	0.8875	0.8935	0.9232	0.9865
	0.75	1.0920	1.0516	1.0207	1.0144	1.0168	1.0300	1.0545
	1.0	1.1125	1.1113	1.1027	1.0981	1.0941	1.0910	1.0887
	64.0	1.1771	1.3762	1.4629	1.2519	1.1018	0.9959	0.9209
	128	1.177						
$\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.4$	0.25	0.9355	0.7555	0.6755	0.6643	0.6755	0.7209	0.8324
	0.5	1.0283	0.9348	0.8847	0.8799	0.8929	0.9295	0.9991
	0.9375	1.0791	1.0746	1.0834	1.0902	1.0968	1.1021	1.1058
	1.0	1.0829	1.0868	1.1031	1.1113	1.1163	1.1170	1.1139
	64.0	1.1114	1.3030	1.6061	1.3959	1.2269	1.1077	1.0305
	128.0							

при любых значениях угла β, где $\mu = \frac{E_1}{E_2}$, а E_1, ν_1 и α соответствуют (материалу) клину с заделанным краем. В этом случае характер напряжений соответствует характеру напряжений около вершины однородного клина при $\alpha < \pi$.

Если $\mu < 0.5$, то вблизи вершины составного клина затухание напряжений невозможно и напряжения имеют особенности. С увеличением α в интервале $0 < \alpha < \alpha_1$ порядок особенности напряжений увеличивается, а в интервале $\alpha_1 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ уменьшается. Предельный угол α_1 находится в $6\frac{\pi}{24} < \alpha_1 < 7\frac{\pi}{24}$. Изменения значений коэффициентов Пуассона почти не влияют на интервал малонапряженности, но несколько изменяют порядок особенности напряжений.

При $\beta = 0$ задача приводится к однородому клину с заделанными краями с углом раствора $2\alpha < \pi$, и около вершины этого клина напряжения затухают [6].

Если $\mu > 64$ и $\alpha > 7\frac{\pi}{24}$, вблизи вершины клина затухание напряжений невозможно. Интервал изменения значений параметров задачи, при котором появляется особенность напряжений, увеличивается при увеличении μ.

б) $$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

При одинаковых значениях коэффициентов Пуассона материалов ($\nu_1 = \nu_2 = 0.2$, 0.3, 0.4, табл. 2) около вершины клина независимо от углов α и β напряжения затухают, если $\mu > 1$, имеют конечные значения, если $\mu = 1$, и бесконечно возрастают (имеют особенность), если $\mu < 1$.

С увеличением значения коэффициентов Пуассона порядок особенности напряжений уменьшается.

При различных значениях коэффициентов Пуассона ($\nu_1 \neq \nu_2$) указанные интервалы существенно изменяются.

Если увеличивается ν_1 (соответствующий материалу с заделанным краем), то при малых значениях угла α интервал изменения значений μ, соответствующий зоне малонапряженности, уменьшается ($\mu > 0.75$, $\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.2$).

Если увеличивается ν_2, интервал изменения значений параметров задачи, при котором напряжения около края поверхности контакта имеют особенности, увеличивается при малых значениях α и уменьшается при больших значениях α (табл. 2).

Таблица 2

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

	μ	$\alpha = \frac{\pi}{24} q$								
		$q = 1$	3	5	6	7	8	9	10	11
$\nu_1 = \nu_2 = 0.2$	0.98437	0.999	0.998	0.996	0.9954	0.9951	0.9953	0.9959	0.9970	0.998
	1.0					1.0				
	1.0156	1.0007	1.0023	1.0039	1.0045	1.0048	1.0046	1.0040	1.0030	1.0016
	16.0	1.0470	1.1662	1.3565	1.4213	1.2560	1.1422	1.0626	1.0109	0.9870
	64.0	1.0495	1.1753	1.3763	1.3931	1.2199	1.0961	1.0055	0.9410	0.9047
	128.0	1.0500	1.1768	1.3792	1.3872	1.2130	1.0872	0.9939	0.9252	0.8806
$\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.2$	0.75	0.9918	0.9702	0.9445	0.9336	0.9264	0.9246	0.9303	0.9452	0.9695
	0.9375	1.0030	1.0044	0.9985	0.9944	0.9906	0.9882	0.9879	0.9901	0.9944
	0.98437	1.0051	1.0114	1.0099	1.0072	1.0041	1.0013	0.9994	0.9987	0.9990
	1.0	1.0058	1.0136	1.0135	1.0113	1.0084	1.0055	1.0031	1.0014	1.0005
	4	1.0389	1.1326	1.2445	1.2522	1.1979	1.1370	1.0888	1.0532	1.0260
	16	1.0475	1.1668	1.3355	1.2665	1.1337	1.0365	0.9696	0.9304	0.9256
	64	1.0496	1.1755	1.3675	1.2488	1.0974	0.9873	0.9070	0.8508	0.8240
$\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.4$	0.9375	0.9919	0.9803	0.9787	0.9814	0.9856	0.9900	0.9940	0.9969	0.9988
	0.98437	0.9941	0.9871	0.9906	0.9955	1.0009	1.0053	1.0074	1.0068	1.0040
	1.0	0.9948	0.9893	0.9944	1.0	1.0089	1.0102	1.0016	1.0099	1.0057
	1.0156	0.9954	0.9914	0.9981	1.0014	1.0107	1.015	1.0158	1.0130	1.0073
	1.0625	0.9973	0.9973	1.0088	1.0173	1.0248	1.0288	1.0277	1.0216	1.0118
	1.25	1.0036	1.0173	1.0459	1.0627	1.0749	1.0773	1.0682	1.0500	1.0263

Таким образом, для получения более широкого интервала малонапряженности около вершины составного клина необходимо, чтобы материал, имеющий заделанный край, имел меньший коэффициент Пуассона ($\nu_1 \ll \nu_2$) и больший угол раствора ($\alpha \gg \beta$), или же больший коэффициент Пуассона и меньший угол раствора.

В этом случае также имеется особенность напряжений вблизи вершины составного клина при достаточно больших значениях α и μ (табл. 2).

в) $$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$$

Как показывает анализ результатов вычислений (некоторые характерные для задачи вычисления приведены в табл. 3), имеется узкий интер-

Таблица 3

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$$

	μ	$\alpha = \frac{\pi}{24}q$							
		$q = 2$	4	5	8	9	10	11	12
$\nu_1 = \nu_2 = 2.0$	1.25	0.9270	0.9439	0.9533	0.9774	0.9882	0.9730	0.9623	0.9473
	1.5	0.9383	0.9679	0.9851	1.0315	1.0315	1.0195	0.9985	0.9718
	2	0.9529	1.0000	1.0289	1.1149	1.1066	1.0781	1.0411	1.0000
	4	0.9759	1.0525	1.1028	1.1208	1.1648	1.1061	1.0600	1.0167
	64	0.9985	1.1049	1.1740	1.0929	0.9996	0.9304	0.8800	0.8470
	128	0.9992	1.1066	1.1762	1.0854	0.9908	0.9194	0.8659	0.8283
$\nu_1 = 0.2\ \nu_2 = 0.4$	1.25	0.9322	0.9408	0.9493	0.9885	0.9950	0.9916	0.9788	0.9593
	1.5	0.9427	0.9628	0.9785	1.0465	1.0541	1.0425	1.0173	0.9847
	2	0.9564	0.9918	1.0179	1.1473	1.1472	1.1098	1.0634	1.0142
	4	0.9777	1.0382	1.0814	1.1495	1.1061	1.1470	1.0874	1.0343
	16	0.9943	1.0745	1.1283	1.1596	1.0640	1.0931	0.9642	0.9427
	64	0.9985	1.0836	1.1390	1.0972	1.0034	0.9345	0.8850	0.8535
$\nu_1 = 0.4\ \nu_2 = 0.2$	1.25	0.9352	0.9605	0.9721	0.9917	0.9896	0.9827	0.9718	0.9578
	1.5	0.9452	0.9819	1.0007	1.0365	1.0323	1.0196	1.0008	0.9780
	2	0.9582	1.0106	1.0398	1.0937	1.0791	1.0551	1.0271	0.9965
	4	0.9786	1.0575	1.1059	1.1216	1.0711	1.0337	1.0063	0.9841
	16	0.9946	1.0954	1.1602	1.0226	0.9493	0.8905	0.8671	0.8555
	64	0.9986	1.1051	1.1739	0.9827	0.8998	0.8379	0.7930	0.7644

вал изменения значений параметров задачи, при котором напряжения затухают (в отличие от однородного тела, когда имеется концентрация напряжений при всех значениях параметров задачи). Затухание напряжений возможно при $\mu > 1.25$ и $\alpha > \frac{\pi}{12}$, то есть когда клин с углом раствора 2β и с заделанными краями около вершины не имеет особенности напряжений.

Порядок особенности напряжений увеличивается с увеличением угла α до некоторого предела $\alpha < \alpha_1$ и уменьшается при $\alpha > \alpha_1$. Предельный угол α_1 находится в интервале $\frac{9}{24}\pi < \alpha_1 < \frac{10}{24}\pi$. Изменение коэффициентов Пуассона почти не влияет на интервал малонапряженности и на значение предельного угла α (табл. 3).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 9 VII 1980

Ա. Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԱՐՔԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԵՊԻ ԿՈՇՏ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ԳԱԳԱԹԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի տեղական լուծումների օգնությամբ հետազոտվում է լարվածային վիճակը բաղադրյալ հարթ սեպի ամրակցված գագաթի շրջակայքում։ Բաղադրյալ սեպը իրենից ներկայացնում է եզրերով իրար միացված երեք սեպերի միացություն։ Եզրային սեպերի նյութերը միևնույնն են և բացվածքի անկյունները հավասար։

Սեպի եզրագծի փակող մասի վրա տրված է արտաքին բեռնվածք։

Դիտարկվող խնդրի լուծումը բերվում է տրանսցենդենտ հավասարման արմատների որոշմանը։

Հաշվումների արդյունքների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ լարվածային վիճակի բնույթը միացման մակերևույթի դիտարկվող եզրերի շրջակայքում էապես կախված է միացվող նյութերի առաձգա-դեֆորմատիվ բնութագրիչներից և միացման երկրաչափությունից։

AN INVESTIGATION OF STRESS BEHAVIOUR NEAR THE RIGIDLY FIXED TOP OF A COMPOSITE ELASTIC WEDGE

A. G. AVETISIAN

S u m m a r y

By means of a local solution of the plane problem in the theory of elasticity, the stressed state near the rigidly fixed top of an elastic wedge, representing a combination of three wedges, joined by their lateral sides, is investigated. The materials of the lateral wedges are similar and the angles of opening are equal. On the closed part of the wedge contour an external load is given. The solution of the problem is reduced to the finding of a root of transcendental equations. The analysis of the calculation results shows that the pattern of the stressed state near the edge of the junction surface essentially depends on elastic deformative characteristics of the joined materials and on the geometry of joint.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extention. J. of Appl. Mech., 1952, vol. 19.
2. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 173—186.
3. *Болли Д.* Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по граням. ПМ, 1968, т. 35, серия Е, № 3.

4. *Чобанян К. С.* Способ повышения вибропрочности соединения. Авт. свид. 307869. «Бюллетень открытия, изобретения...», № 21, 1971.
5. *Чобанян К. С., Геворкян С. Х.* Поведение поля напряжений около угловой точки линии раздела в задаче плоской деформации составного упругого тела. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. 24, № 5.
6. *Аветисян А. Г., Чобанян К. С.* Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела, нагруженного в условиях плоской задачи теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 6.
7. *Аветисян А. Г.* Особенности напряжений в составном теле при контурных условиях гладкого контакта. «Исследования по теории пластин и оболочек». Вып. 12, Казань, изд-во КГУ, 1976.
8. *Knein M.* Zur Theorie der Druckversuchs. Abhand der Aerodynamische Inst. u. d. Techn. Hochschule, Aachen, Germany, 1927, v. 7, pp. 43–62.
9. *Rao A. K.* Stress concentrations and singularities at interface corners. ZAMM, 1971, 51, s. 395–406.
10. *Hein V. L. and Erdogan F.* Stress singularities in a two-material wedge. Int. Journ. of Fracture Mech., 1971, 7, № 3, pp. 317—330.
11. *Theocaris P. S., Gdoutos E. E. and Thireos C. G.* Stress Singularities in a Bi-wedge Under Various Boundary Conditions. Acta mechanica, 1978, vol. 29, № 1—4, pp. 55—73.
12. *Чобанян К. С.* О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. Докл. АН Арм. ССР, 1961, т. 32, № 2.
13. *Ворович И. И.* О поведении основных краевых задач плоской теории упругости в окрестности особых точек границы. Тезисы докладов на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. М., 1968.