

С. И. БОЯРЧЕНКО

ВЫГУЧИВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ  
 УПРУГОЙ ПЛИТЫ

В трехмерной постановке исследуется устойчивость упругой плиты с переменным по толщине модулем упругости при комбинированном нагружении.

1. Рассмотрим плиту из несжимаемого неогуковского материала с модулем сдвига  $\mu$ , убывающим от торцов плиты к срединной поверхности  $x_3 = 0$  по закону

$$\mu = \mu_0 \exp[\nu (|x_3| - h)] \quad (\nu > 0, \mu_0 = \text{const})$$

где  $2h$  — толщина плиты.

Докритическое состояние представляет собой конечную аффинную деформацию, одна главная ось которой совпадает с осью  $x_3$ . Торцы плиты в этом состоянии незагружены. При указанных условиях уравнения нейтрального равновесия в перемещениях в метрике недеформированного тела имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{w} - \nu p \cdot U^{*2} &= \pm \text{sgn } x_3 \bar{i}_3 \cdot (\nabla \bar{w} - p U^{*1}) \\ \pm \bar{i}_1^2 \bar{i}_2^2 U^{*1} \cdot (\nabla \bar{w})^T \cdot U^{*2} &= 0, \quad \nabla \cdot U^{*1} \cdot \bar{w} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{i}_k$  — набла-оператор в отсчетной конфигурации,

$\bar{i}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — единичные векторы, направленные по главным осям тензора  $U^*$ ; вектор  $\bar{w} = w \bar{i}_3$  связан с вектором добавочного перемещения  $\bar{v}$  соотношением  $\bar{w} = \bar{v} \cdot A^*$ , где  $A^*$  — тензор поворота в докритическом состоянии;  $p$ , как и вектор  $\bar{w}$  — неизвестная функция координат, появление которой обусловлено несжимаемостью материала;  $U^*$  — положительно определенный квадратный корень из меры деформации Коши докритического состояния,

$$U^* = \bar{i}_1 \bar{i}_1 \bar{i}_1 + \bar{i}_2 \bar{i}_2 \bar{i}_2 + \bar{i}_3^{-1} \bar{i}_3^{-1} \bar{i}_3 \bar{i}_3$$

Граничные условия при  $x_3 = \pm h$ , выражающие отсутствие добавочной нагрузки, имеют вид:

$$\vec{i}_3 (\nabla \vec{w} + p U^{\alpha-1} + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} U^{\alpha-1} (\nabla \vec{w})^T \cdot U^{\alpha-1}) = 0 \quad (1.2)$$

Требуется отыскать соотношение между параметрами нагружения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , при котором краевая задача (1.1), (1.2) имеет нетривиальные решения.

Пусть  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — декартовы координаты в недеформированном состоянии тела, оси которых направлены по ортам  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ . Введем безразмерные координаты  $\xi_k = x_k/h$ . В координатах  $\xi_k$  система уравнений (1.1) относительно неизвестных  $u_k$  и  $p$  примет вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_1 + \lambda_1^{-1} \partial_1 p + t \operatorname{sgn} \zeta_3 (\partial_3 u_1 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \partial_1 u_3) &= 0 \\ \nabla^2 u_2 + \lambda_2^{-1} \partial_2 p + t \operatorname{sgn} \zeta_3 (\partial_3 u_2 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} \partial_2 u_3) &= 0 \\ \nabla^2 u_3 + \lambda_1 \lambda_2 \partial_3 p + t \operatorname{sgn} \zeta_3 (2\partial_3 u_3 + \lambda_1 \lambda_2 p) &= 0 \\ \lambda_1^{-1} \partial_1 u_1 + \lambda_2^{-1} \partial_2 u_2 + \lambda_1 \lambda_2 \partial_3 u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \partial_k &= \frac{\partial}{\partial \xi_k}; \quad \nabla = \partial_k \vec{i}_k \\ t = \kappa h &= \ln [\mu(h)/\mu(0)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Вместо (1.2) будем иметь при  $\zeta_3 = \pm 1$

$$\begin{aligned} \partial_3 u_1 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \partial_1 u_3 &= 0 \\ \partial_3 u_2 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} \partial_2 u_3 &= 0 \\ 2\partial_3 u_3 + \lambda_1 \lambda_2 p &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Решение краевой задачи (1.3), (1.5) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_k &= f_k(\zeta_3) \exp[i(\alpha \zeta_1 + \beta \zeta_2)] \quad (k = 1, 2, 3) \\ p &= f_4(\zeta_3) \exp[i(\alpha \zeta_1 + \beta \zeta_2)] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тогда относительно функций  $f_k(\zeta_3)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f_1 + t \operatorname{sgn} \zeta_3 f_1 - s f_1 + i \alpha t \operatorname{sgn} \zeta_3 \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} f_3 + i \alpha \lambda_1^{-1} f_4 &= 0 \\ f_2 + t \operatorname{sgn} \zeta_3 f_2 - s f_2 + i \beta t \operatorname{sgn} \zeta_3 \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} f_3 + i \beta \lambda_2^{-1} f_4 &= 0 \\ f_3 + 2t \operatorname{sgn} \zeta_3 f_3 - s f_3 + \lambda_1 \lambda_2 f_4 + \lambda_1 \lambda_2 t \operatorname{sgn} \zeta_3 f_4 &= 0 \\ i \alpha \lambda_1^{-1} f_1 + i \beta \lambda_2^{-1} f_2 + \lambda_1 \lambda_2 f_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $s = \alpha^2 + \beta^2$ .

Характеристическое уравнение системы (1.7) имеет следующие корни:

а) при  $\zeta_3 > 0$

$$\begin{aligned} n_{1,2}^* &= -t/2 \pm \sqrt{t^2/4 + s}, \quad n_{3,4}^* = -t/2 \pm \sqrt{T + X} \\ n_{5,6}^* &= -t/2 \pm \sqrt{T - X} \end{aligned}$$

б) при  $\zeta_3 < 0$

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= t/2 \pm \sqrt{t^2/4 + s}, & n_{3,4} &= t/2 \pm \sqrt{T + X} \\ n_{5,6} &= t/2 \pm \sqrt{T - X} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T &= t^2/4 - s(1+z)/2, & X &= \sqrt{s^2(1-z)^2/4 - t^2sz} \\ z &= \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} (\alpha^2 \lambda_1^{-2} - \beta^2 \lambda_2^{-2}) (\alpha^2 + \beta^2)^{-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Обозначим решения в полуплоскости  $\zeta_3 > 0$  через  $u_k^+$ ,  $p^+$ , в полуплоскости  $\zeta_3 < 0$  — через  $u_k^-$ ,  $p^-$ . Заметим, что  $n_{2l} = -n_{2l-1}^+$ ,  $n_{2l-1}^- = -n_{2l}^+$  ( $l = 1, 2$ ). Положим  $n_k = n_k^+$  ( $k = 1, \dots, 6$ ). Будем предполагать, что среди  $n_k$  нет одинаковых корней. Случай кратных корней будет рассмотрен ниже.

Решения системы (1.3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= [\lambda_1 \alpha^{-1} (A_1 e^{-\alpha \zeta_3} + A_2 e^{-\alpha \zeta_3}) + \alpha \lambda_1 \sum_{j=3}^6 A_j e^{-\lambda_j \zeta_3}] e^{i \alpha x_1} e^{i \alpha x_2} \\ u_2 &= [-\lambda_2 \beta^{-1} (A_1 e^{-\beta \zeta_3} + A_2 e^{-\beta \zeta_3}) + \beta \lambda_2 \sum_{j=3}^6 A_j e^{-\lambda_j \zeta_3}] e^{i \beta x_1} e^{i \beta x_2} \\ u_3 &= -\lambda_3^{-1} \lambda_2 \sum_{j=3}^6 A_j n_j^{-1} e^{-n_j \zeta_3} e^{i n_j x_1} e^{i n_j x_2} \\ p &= \beta \lambda_2 \sum_{j=3}^6 A_j [n_j] e^{-n_j \zeta_3} e^{i n_j x_1} e^{i n_j x_2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} [n] &= (n_j^2 + 2t n_j - s) (n_j - t)^{-1} n_j^{-1} \\ \zeta_3 &= \zeta_3 \operatorname{sgn} \zeta_3 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Константы  $A_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) связаны условиями неразрывности добавочных перемещений  $u_k$  и напряжений, действующих в срединной плоскости плиты. Таким образом, при  $\zeta_3 = 0$

$$\begin{aligned} u_1^+ &= u_1^-, & u_2^+ &= u_2^-, & u_3^+ &= u_3^- \\ \partial_1 u_1^+ + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} \partial_1 u_1^+ &= \partial_1 u_1^- + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} \partial_1 u_1^- \\ \partial_2 u_2^+ + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} \partial_2 u_2^+ &= \partial_2 u_2^- + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} \partial_2 u_2^- \\ 2\sigma_1 u_3^+ + \lambda_1 \lambda_2 p^+ &= 2\sigma_1 u_3^- + \lambda_1 \lambda_2 p^- \end{aligned} \quad (1.11)$$

Разобьем задачу на две независимых задачи, которые будем рассматривать при  $\zeta_3 > 0$

А)  $u_{1,2}$ ,  $p$  — четные функции,  $u_3$  — нечетная функция  $\zeta_3$ , то есть

$$u_{1,2} = [u_{1,2}(\zeta_3) + u_{1,2}(-\zeta_3)]/2$$

$$u_3 = [u_3(\zeta_3) - u_3(-\zeta_3)]/2; \quad p = [p(\zeta_3) + p(-\zeta_3)]/2 \quad (1.12)$$

В)  $u_{1,2}$ ,  $p$  — нечетные функции,  $u_3$  — четная функция  $\zeta_3$ , то есть

$$u_{1,2} = [u_{1,2}(\zeta_3) - u_{1,2}(-\zeta_3)]/2$$

$$u_3 = [u_3(\zeta_3) + u_3(-\zeta_3)]/2, \quad p = [p(\zeta_3) - p(-\zeta_3)]/2 \quad (1.13)$$

Задача (А) описывает симметричные, а задача (В) — антисимметричные относительно срединной плоскости, или изгибные, формы бифуркации равновесия плиты.

Используя (1.9), (1.11)—(1.13), получим решения задач (А) и (В), которые здесь не приводятся в силу их громоздкости.

Удовлетворяя граничным условиям (1.5) при  $\zeta = 1$ , найдем для каждой из задач (А) и (В) уравнение для определения критического соотношения между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

В задаче (А)

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 C_{ij} [i, j] \exp(n_i + n_j) = 0 \quad (1.14)$$

где

$$C_{31} = n_5^2 - n_2^2, \quad C_{32} = n_4^2 - n_6^2, \quad C_{33} = n_3^2 - n_1^2$$

$$C_{41} = n_6^2 - n_3^2, \quad C_{42} = n_5^2 - n_4^2, \quad C_{43} = n_2^2 - n_1^2$$

$$[i, j] = (n_i^2 + s_2)(n_i^2 + s)(n_j^2 + t)^{-1} - (n_j^2 + s_2)(n_j^2 + s)(n_i^2 + t)^{-1}$$

В задаче (В)

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 D_{ij} [i, j] n_i^{-1} n_j^{-1} \exp(n_i + n_j) = 0 \quad (1.15)$$

где

$$D_{31} = [n_6] - [n_5], \quad D_{32} = [n_4] - [n_3]$$

$$D_{33} = [n_5] - [n_4], \quad D_{41} = [n_6] - [n_3]$$

$$D_{42} = [n_3] - [n_5], \quad D_{43} = [n_4] - [n_3]$$

$[n_i]$  определяются (1.10).

Заметим, что, если

$$1 \leq z \leq 1 + 2t^2 s^{-1} + 2ts^{-1/2} \sqrt{t^2 + s}$$

то корни  $n_1$  и  $n_2$ ,  $n_3$  и  $n_4$  будут комплексно-сопряженными. Нетрудно показать, что уравнения (1.14), (1.15) при этом не изменятся и коэффициенты их останутся действительными.

При  $t = 0$  уравнения (1.14) и (1.15) переходят, соответственно, в следующие уравнения:

$$(1+z)^2 \operatorname{cth} \sqrt{s z} = 4z^{3/2} \operatorname{cth} \sqrt{s}$$

$$(1+z)^2 \operatorname{th} \sqrt{s z} = 4z^{3/2} \operatorname{th} \sqrt{s}$$

Положим  $y = -n_1 + n_2 = n_1 - n_2$ . Тогда левые части уравнений (1.14), (1.15) можно рассматривать как функции  $F_1(n_1, n_2, y)$ ,  $F_2(n_1, n_2, y)$  от  $y$ , зависящие от  $n_1, n_2$  как от параметров. Непосредственно проверяется, что  $y = 0$  — двукратный корень уравнений (1.14), (1.15).

Пусть характеристическое уравнение системы (1.7) имеет кратные корни  $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4$  (это единственно возможные кратные корни). Можно показать, что в этом случае уравнения для определения критического соотношения между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в задачах (А) и (В) будут эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} F_1(n_2, n_1, y) \Big|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} F_2(n_2, n_1, y) \Big|_{y=0} = 0$$

Представляет интерес исследование устойчивости сильно неоднородной плиты, то есть решение задачи при больших значениях параметра  $l$ . Рассматривая возможные случаи поведения функции  $z(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , получим, что единственно возможным является представление в виде ряда по степеням  $zt^{-2}$ . Для вычисления коэффициентов ряда была составлена алгоритмная программа, которая, в частности, дает для обеих задач (А) и (В)

$$z(t) \sim 1 + 4st^{-2} + 12s^2t^{-4} + 88s^3t^{-6} + 856s^4t^{-8} + \dots$$

Значения переменной  $z$  зависят и от отношения толщины плиты к длине волны, возникающей в горизонтальной плоскости при потере устойчивости, которое входит в уравнения (1.14), (1.15) посредством параметра  $s$ . Можно показать, что, если  $s$  стремится к нулю при фиксированных параметрах  $l$  и  $h$  (что соответствует стремлению к бесконечности длины волны, возникающей в горизонтальной плоскости), то в задаче (А)  $z(s) \sim s^{-1}$ , а в задаче (В)

$$z(s) = 1 + 4st^{-2}(t^2 - 2t + 2(1 - e^{-t}))(1 - e^{-t})^{-1} + o(s) \quad (1.16)$$

В случае однородной плиты ( $l = 0$ ) в задаче (В)

$$z(s) = 1 + 4s/3 + o(s)$$

Если параметр  $s$  стремится к бесконечности при фиксированных значениях параметра  $l$  (то есть при стремлении к нулю длины волны), то решения уравнений (1.14), (1.15) стремятся к решению уравнения  $(z+1)^2 = 4z^{3/2}$ , отличному от единицы, откуда  $z \approx 11.3565$ .

Если неограниченно возрастает толщина плиты  $h$  при фиксированных значениях параметра  $\kappa$  и длине волны, возникающей в горизонтальной плоскости, то решения уравнений (1.14), (1.15) приближаются к решению уравнения

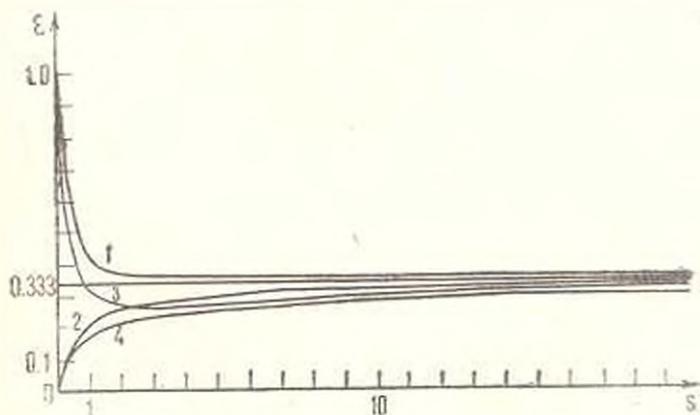
$$\rho_3 \lambda^2 - \rho_2 \rho_3 (z - 1) + \kappa (\kappa^2 + \beta^2)^{-1/2} h^{-3} (\rho_2 + \rho_3) (z - 1) + \rho_2 + \rho_3 + z = 0$$

из которого определяется критическое соотношение между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в задаче устойчивости неоднородного полупространства.

Корни уравнений (1.14), (1.15) отыскивались численным методом. Результаты счета показали, что при конечных значениях параметра  $l$  и при малых или конечных значениях параметра  $s$  изгибные формы бифуркации равновесия возникают раньше, чем симметричные. При стремлении к бесконечности параметров  $l$  или  $s$  решения уравнений (1.14), (1.15) асимптотически совпадают.

Линия, составленная из участков кривых, наиболее близко расположенных к началу координат в плоскости  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ ), отделяет область устойчивости от области неустойчивости и называется пограничной. Оказывается, что пограничной является линия, составленная из кривой  $\varepsilon_1(\varepsilon_2)$  при  $\beta = 0$  и  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$  и кривой  $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$  при  $\alpha = 0$  и  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ . Пограничные кривые расположены симметрично относительно прямой  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ . Точка пересечения пограничных кривых с прямой  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  связана с корнями уравнений (1.14), (1.15) соотношением  $\varepsilon = 1 - (z(s, l))^{-1/2}$ .

Зависимость  $\varepsilon(s)$  показана на фиг. 1 для значений параметра  $l = 0$  и  $l = 1$ .

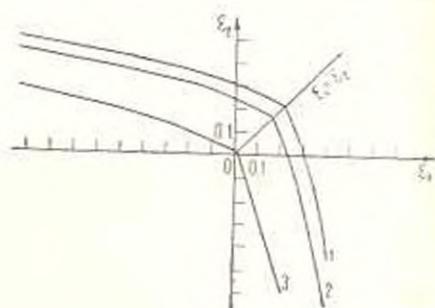


Фиг. 1. График зависимости  $\varepsilon(s)$ . Цифрами 1, 2 обозначены решения задач (А) и (В) для однородной плиты, цифрами 3, 4 — для неоднородной плиты.

С ростом параметра  $l$  точка  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  как и в задаче (А), так и в задаче (В), смещается к началу координат вдоль прямой  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , начиная от  $\varepsilon = \varepsilon_c$  для однородной плиты ( $l = 0$ ). Изменение положения пограничных кривых в зависимости от значений параметра  $l$  показано на фиг. 2 для изгибных форм бифуркации равновесия плиты. Как следует из полученных результатов, неоднородность уменьшает жесткость плиты в целом по сравнению с однородной плитой.

Сравним полученное строгое решение задачи устойчивости с результатами прикладной теории выпучивания оболочек и пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа [3]. В рамках этой теории анализ изгибных форм бифуркации равновесия сжатой плиты сводится к решению следующего уравнения для прогиба срединной поверхности  $w(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} & \left( (1 - \lambda_1^{-4} \lambda_2^{-2}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \right. \\ & \left. + (1 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-4}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \times \\ & \times \int_0^h \mu(x_3) dx_3 - \left( (2 - \lambda_1 + \right. \\ & \left. + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}) (\lambda_1 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}) \times \right. \\ & \times \lambda_1^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \lambda_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \lambda_2^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \\ & \left. + (2 - \lambda_2 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}) \times \right. \\ & \left. \times (\lambda_2 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \lambda_2^{-2}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \lambda_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \lambda_2^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right) \int_0^h \mu(x_3) x_3^2 dx_3 = 0 \quad (1.17) \end{aligned}$$



Фиг. 2. Зависимость пограничных кривых от параметра  $l$  для изгибных форм бифуркации равновесия плиты. Кривая 1 соответствует значению  $l = 0$ ,  $2 - l = 1$ ,  $3 - l = 30$ .

Если уравнение (1.17) линеаризовать относительно начальных деформаций  $\epsilon_k = 1 - \lambda_k$ , то в случае однородной плиты ( $\mu = \text{const}$ ) придем к классическому уравнению Сен-Венана [4],

$$4/3 h^2 \gamma^4 w \Delta - \Delta \cdot T \cdot \gamma w = 0$$

где  $T$  — тензор напряжений Коши.

Представляя  $w$  в виде  $w = w_0 e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}$ , из (1.17) получим уравнение для определения критического соотношения между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в принятых ранее обозначениях

$$\begin{aligned} & (1 - z) t^2 (1 - e^{-t}) + z s \left( z + 2z \lambda_1 \lambda_2 - 1 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{s} (\lambda_1^{-1} z^2 + \lambda_2^{-1} \beta^2) \right) (t^2 - 2t + 2(1 - e^{-t})) = 0 \quad (1.18) \end{aligned}$$

При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  получим асимптотическую формулу

$$\lambda(s) = 1 - \frac{2}{3} s t^{-2} (t^2 - 2t + 2(1 - e^{-t})) (1 - e^{-t})^{-1} + o(s) \quad (1.19)$$

которая совпадает с формулой (1.16), если последнюю записать относительно  $\lambda = z^{-1} t^2$ .

Пусть  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Обозначим  $\lambda_2 = k\lambda_1$ ,  $\beta = \gamma\lambda_1$ , где  $k, \gamma$  — произвольные фиксированные величины. Тогда  $z = \lambda_1^{-1} k^{-1} z_0$ , где  $z_0 = (1 + k^{-2} \gamma^2)^{-1/2} \times (1 + \gamma^2)^{-1/2}$ .

Пусть  $\lambda_1 = \lambda_{10} + \alpha \lambda_{11} + \alpha^2 \lambda_{12} + \dots$ . Приравняв нулю члены порядка  $\alpha^0$  и  $\alpha$ , из обоих уравнений (1.16) и (1.18) получим  $\lambda_{10} = k^{-2} z_0^6$ ,  $\lambda_{11} = 0$ .

Рассмотрим теперь члены порядка  $\alpha^2$ . Из уравнения (1.16) будем иметь

$$\lambda_{12} = -\frac{2}{3} t^{-2} (1 - e^{-t})^{-1} (t^2 - 2t + 2(1 - e^{-t})) (1 + \gamma^2) \lambda_{10} \quad (1.20)$$

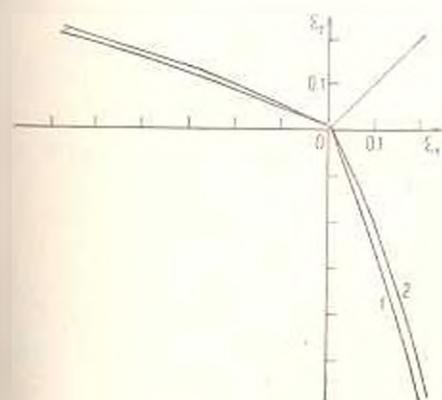
Уравнение (1.18) даст значение

$$\lambda_{12} = -\frac{1}{3} t^{-2} (1 - e^{-t})^{-1} (t^2 - 2t + 2(1 - e^{-t})) (1 + \gamma^2) \lambda_{10} (k \lambda_{10}^{-1} + \lambda_{10}^{-1} (1 + \gamma^2 k^{-2}) (1 + \gamma^2)^{-1}) \quad (1.21)$$

Из формул (1.20) и (1.21) следует, что как при  $\beta = 0$  (то есть  $\gamma = 0$ ) и  $k \geq 1$ , так и при  $\alpha = 0$  (то есть  $\gamma \rightarrow \infty$ ) и  $k < 1$ ,  $\lambda_{12}^2 > \lambda_{12}$ , следовательно,  $\epsilon_{1,2}^2 > \lambda_{1,2}$ , то есть пограничная кривая, полученная с использованием гипотез Кирхгофа, лежит выше истинной пограничной кривой, если  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ . Эти две кривые имеют единственную общую точку  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ . Таким образом, в случае равномерного сжатия тонкой плиты теория Кирхгофа дает результаты, близкие к истинным, при комбинированном нагружении эта теория дает завышенные результаты для нижней критической нагрузки даже в случае тонкой плиты. На фиг. 3 показаны истинная пограничная

кривая и пограничная кривая, рассчитанная по теории Кирхгофа для значений параметров  $t = 1$ ,  $s = 0.01$ .

Если определять критические значения параметров нагружения численным методом непосредственно из формулы (1.18), то даже в случае равномерного сжатия теория Кирхгофа дает завышенные результаты, погрешность которых увеличивается с ростом параметра  $s$ . Так, при  $s \sim 10^{-1}$  эта погрешность составляет около 0.001%, при  $s \sim 10^{-2}$  — около 0.006%, при  $s \sim 10^{-1}$  — около 0.8% по сравнению с точным решением задачи.



Фиг. 3. Цифрой 1 обозначена истинная пограничная кривая, цифрой 2 — кривая, рассчитанная по гипотезе Кирхгофа.

2. Приведем примеры конкретных задач, которые можно решить описанным выше методом.

Нетрудно показать, что, если

$$u_k = f_k(\zeta_3) \exp[i(\alpha_1^* \zeta_1 - \beta_2^* \zeta_2)], \quad p = f_4(\zeta_3) \exp[i(\alpha_1^* \zeta_1 + \beta_2^* \zeta_2)]$$

— решения системы (1.3), то  $u_k = f_k(\zeta_3) \exp[i(\pm \alpha_1^* \zeta_1 \pm \beta_2^* \zeta_2)]$

$$p = f_4(\zeta_3) \exp[i(\pm \alpha_1^* \zeta_1 \pm \beta_2^* \zeta_2)] \quad (k = 1, 2, 3)$$

и любая их линейная комбинация тоже является решением системы (1.3). В частности, решениями будут

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(\zeta_3) \sin \alpha_1^* \cos \beta_2^*, & u_2 &= f_2(\zeta_3) \cos \alpha_1^* \sin \beta_2^* \\ u_3 &= -f_3(\zeta_3) \cos \alpha_1^* \cos \beta_2^*, & p &= -f_4(\zeta_3) \cos \alpha_1^* \cos \beta_2^* \end{aligned} \quad (2.1)$$

а также

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(\zeta_3) \cos \alpha_1^* \sin \beta_2^*, & u_2 &= f_2(\zeta_3) \sin \alpha_1^* \cos \beta_2^* \\ u_3 &= f_3(\zeta_3) \sin \alpha_1^* \sin \beta_2^*, & p &= f_4(\zeta_3) \sin \alpha_1^* \sin \beta_2^* \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рассмотрим прямоугольную плиту  $-a < \zeta_1 < a$ ,  $-b < \zeta_2 < b$ . Положим  $\alpha = m\pi/a$ ,  $\beta = n\pi/b$ . Тогда решения (2.1) удовлетворяют на боковой поверхности плиты следующим граничным условиям:

1) в задаче (А)

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \quad R_{12} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_1 = \pm a \\ u_2 &= 0, \quad R_{21} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_2 = \pm b \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \bar{R}_\alpha \cdot \bar{I}_\beta; \quad \bar{R}_\alpha = \pm \int_{-1}^1 \bar{I}_\alpha \cdot K^* d\zeta_3 \\ K^* &= \mu(\gamma \bar{u} + pU^{-1} + \epsilon_1^{-2} \epsilon_2^{-2} U^{-2} \cdot (\gamma \bar{u})^T \cdot U^{-1}) \\ K^{*\tau} &= A^* \cdot \left| \frac{d}{d\zeta_3} D^* (\bar{R} + \gamma \bar{u}) \right|_{\zeta_3=0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\bar{R}$  — радиус-вектор частицы в докритическом состоянии,  $D^*$  — тензор напряжений Пнзола,  $\eta$  — малый параметр;

2) в задаче (В)

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \quad R_{11} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_1 = \pm a \\ u_2 &= 0, \quad R_{22} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_2 = \pm b \end{aligned}$$

Следовательно, решения (2.1) описывают выпучивание плиты со «скользящей заделкой».

Решения (2.2) удовлетворяют на боковой поверхности плиты следующим граничным условиям в задаче (В):

$$\begin{aligned} u_2 &= 0, \quad u_3 = 0, \quad M_{11} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_1 = \pm a \\ u_3 &= 0, \quad u_2 = 0, \quad M_{22} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_2 = \pm b \end{aligned}$$

где

$$M_{ij} = \bar{M}_k \cdot \bar{i}_{ij} \quad \bar{M}_k = \int_{-1}^1 \bar{i}_k \cdot K^* \zeta_3 d\zeta_3$$

Таким образом, решения (2.2) описывают изгибные формы бифуркации равновесия шарнирно опертой плиты.

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то задача инвариантна относительно любого поворота координатных осей вокруг оси  $O\zeta_3$ . Кроме того, решение зависит от параметров  $\alpha, \bar{p}$  только посредством комбинации  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \bar{p}^2}$ . Из сказанного следует, в частности, что критическому значению  $\lambda$  соответствует континуум решений

$$p = f_1(\zeta_3) \exp(i\gamma \zeta_3)$$

где  $\zeta_3 = \zeta_0 \cos \varphi - \zeta_1 \sin \varphi$ , а  $\varphi$  — любое действительное число. Обозначим  $\zeta_1 = r \cos \psi$ ,  $\zeta_2 = r \sin \psi$  и возьмем такую линейную комбинацию указанных решений:

$$p = \frac{1}{2\pi} f_4(\zeta_3) \int_{-2\pi}^0 \exp[i\gamma r \sin(\psi - \varphi)] d\varphi = f_4(\zeta_3) J_0(\gamma r) \quad (2.4)$$

Здесь использовано известное [2] интегральное представление бесселевой функции. Линейная комбинация (2.4) даст осесимметричные решения.

Рассмотрим задачу об осесимметричной бифуркации равновесия круглой плиты радиуса  $a$  из неогукковского материала, сжатой по боковой поверхности равномерным давлением.

Пусть  $r, \theta, \zeta_3$  — цилиндрические координаты недеформированной плиты;  $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_3$  — соответствующие им базисные векторы.

Для осесимметричных форм бифуркации  $u_\theta = \bar{w} \cdot \bar{e}_\theta = 0$ . Используя (2.4) и уравнения нейтрального равновесия в цилиндрических координатах [1], получим

$$u_1 = f_1(\zeta_3) J_1(\gamma r)$$

$$u_3 = f_2(\zeta_3) J_0(\gamma r)$$

Если выбрать  $\gamma$  так, чтобы  $f_1(\gamma a) = 0$ , то на боковой поверхности  $r = a$   $u_1 = 0$ . Пусть  $\gamma_n a$  — нули функции  $f_1(\gamma a)$ . Положим  $\gamma = \gamma_n$ . Тогда для каждого номера  $n$  будем иметь решение

$$u_{1n} = f_{1n}(\zeta_3) J_1(\gamma_n r)$$

$$u_{2n} = f_{2n}(\zeta_3) J_0(\gamma_n r)$$

$$p_n = f_{3n}(\zeta_3) J_0(\gamma_n r)$$

Решения (2.5) удовлетворяют на боковой поверхности плиты следующим условиям:

1) в задаче (А)

$$u_{i_3} = 0, M_{r1} = 0 \quad \text{при} \quad r = a$$

2) в задаче (В)

$$u_{i_3} = 0, R_{r3} = 0 \quad \text{при} \quad r = a$$

где

$$R_{r3} = \vec{R}_r \cdot \vec{i}_3, \quad M_{r3} = \vec{M}_r \cdot \vec{i}_3$$

$$\vec{R}_r = \int_{-1}^1 \vec{e}_r \cdot K^* d^*_{r3}, \quad \vec{M}_r = \int_{-1}^1 \vec{e}_r \cdot K^* r_3 d^*_{r3}$$

$K^*$  определяется (2.3), где

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z_3} \vec{i}_3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_r + u_3 \vec{i}_3; \quad U^{*-1} = r^{-1} \vec{e}_r \cdot \vec{i}_3 + r^2 \vec{i}_3 \vec{i}_3$$

Решения (2.5) описывают осесимметричную бифуркацию равновесия круглой плиты со «скользящей заделкой» по боковой поверхности. При малой толщине плиты такие краевые условия соответствуют жестко защемленной пластинке.

Автор благодарит А. М. Зубова за постановку задачи и внимание к работе.

Ростовский государственный  
университет

Поступила 11 III 1980

Ս. Ի. ՌՈՏԱՐՁԵՆԿՈ

ԸՍՏ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՌԱՋԳՆԱԿԱՆ  
ՍԱԼԻ ՈՒՌՈՒՑՆԵԿԱՆԱԼՔ

Ս. Վ Վ Ո Վ Ո Վ

Նույնպիսի դրվածքով ուսումնասիրվում է բազա հաստություն փոփոխական առաձգականության մոդուլով առաձգական սալի կայունությունը կոմքինացիան բևնավորման դեպքում:

# BUCKLING OF AN ELASTIC PLATE NON-HOMOGENEOUS IN THICKNESS

S. I. BOYARCHENKO

## S u m m a r y

The stability of an elastic plate with a modulus of elasticity variable in thickness under combined loading is investigated in three-dimensional representation.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов Л. М.* Вышучивание пластенок из неогукковского материала при аффинной начальной деформации. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. *Никифоров А. П., Уваров В. Б.* Основы теории специальных функций. М., «Наука», 1974, стр. 178—180.
3. *Зубов Л. М.* Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
4. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.