ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 2, 1981 Механика

Ф. М. ПОЛАДЯН

КРУЧЕНИЕ КРИВОЙ РАЗНОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается задача о кручении круговой разностенной трубы, материал которой обладает свойством нелинейной наследственной ползучести [1].

Пусть полый стержень с круговой осью и постоянным поперечным сечением находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R — радиус оси стержня), приложенных на торцевых сечениях (фиг. 1).

Решение такой задачи для упрочняющегося материала приведено в работах [2, 3]. Задача о кручении тонкостенных призматических стержней с учетом нелинейной ползучести исследована в [4].

§ 1. *Основные уравнения задачи.* Принимаем, что для материала стержня справедливы соотношения нелинейно-наследственной теории ползучести Н. Х. Арутюняна [1]

$$2G\varepsilon_{ij} = s_{ij} - \int_{\tau_1}^{t} s_{ij} f(\tau_0) K(t,\tau)\, d\tau \tag{1.1}$$

где $G = E/3$, а E принимается постоянным, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$, δ_{ij} — символ Кронекера, σ — среднее давление, $f(\tau_0)$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, τ_0 — интенсивность касательных напряжений, $K(t,\tau) = 3G\dfrac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}$, $C(t,\tau)$ — мера ползучести при одноосном напряженном состоянии.

Воспользуемся тороидальными координатами α, β, γ: $x = \rho\cos\gamma$, $y = \rho\sin\gamma$, $z = H\sin\beta$, где $\rho = a\,\mathrm{sh}\,\alpha\,(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)^{-1}$, $H = a \times (\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)^{-1}$; здесь $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$, $-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$ (фиг. 2).

Для компонентов деформации будем иметь [5]

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\beta}{H}\right), \quad 2\varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{H}{\rho}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) + \frac{\rho}{H}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\gamma}{\rho}\right)\Big|_{(\alpha,\beta)}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) + \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}u_\alpha + \frac{\partial H}{\partial\beta}u_\beta\right)\Big|_{(\alpha,\beta)}$$

$$\varepsilon_{\gamma\gamma} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma} + \frac{1}{H\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}u_\alpha + \frac{\partial\rho}{\partial\beta}u_\beta\right) \tag{1.2}$$

Положим, что все компоненты напряжения, за исключением $\sigma_{\alpha\gamma}$ и $\sigma_{\beta\gamma}$, в любой момент времени t равны нулю, тогда из уравнений равновесия остается [5]

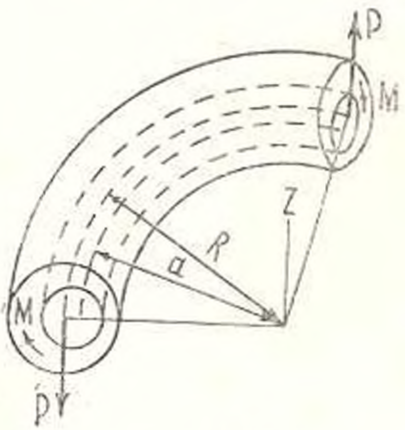
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(H\rho^2\sigma_{\alpha\gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(H\rho^2\sigma_{\beta\gamma}\right)=0 \tag{1.3}$$

а из остальных следует, что напряженное состояние стержня не зависит от γ, следовательно, тензор деформации также не зависит от γ. Перемещения из (1.2) представим в виде

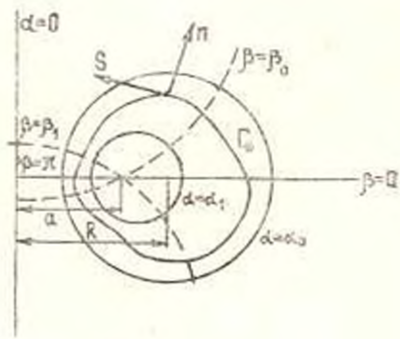
$$u_\alpha=u_{\alpha0}+\int F_\alpha d\gamma\Big|_{(\alpha,\beta)},\qquad F_\alpha=2\rho\varepsilon_{\alpha\gamma}-\frac{\rho^2}{H}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\gamma}{\rho}\right)\Big|_{(\alpha,\beta)}$$

$$u_\gamma=u_{\gamma0}+\int\left(\rho\varepsilon_{\gamma\gamma}-\frac{1}{H}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}u_\alpha-\frac{1}{H}\frac{\partial\rho}{\partial\beta}u_\beta\right)d\gamma \tag{1.4}$$

где $u_{\alpha0}$, $u_{\beta0}$, $u_{\gamma0}$ — произвольные функции α, β и t.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Подставляя (1.4) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, получим

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}=\frac{1}{H}\frac{\partial u_{\alpha0}}{\partial\alpha}+\frac{1}{H^2}\frac{\partial H}{\partial\beta}u_{\beta0}\Big|_{(\alpha,\beta)},\qquad 2\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_{\beta0}}{H}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_{\alpha0}}{H}\right) \tag{1.5}$$

а относительно F_α, F_β приходим к системе трех дифференциальных уравнений, решением которой будет

$$F_\alpha=(D_0+D_1 z)\frac{1}{H}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}+(D-D_1\rho)\frac{1}{H}\frac{\partial z}{\partial\alpha}\Big|_{(\alpha,\beta)} \tag{1.6}$$

где D_0, D_1, D — произвольные функции от t.

Исключая из (1.4) u_γ и используя (1.6), получаем уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{H}{\rho}\varepsilon_{\beta\gamma}\right)-\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{H}{\rho}\varepsilon_{\alpha\gamma}\right)=D\frac{H^2}{\rho^2} \tag{1.7}$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформации, кроме $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ и $\varepsilon_{\beta\gamma}$, получаем систему относительно $u_{\alpha 0}$, $u_{\beta 0}$, решением которой будет

$$u_{\alpha 0}=-\frac{N_1}{H}\frac{\partial \rho}{\partial \alpha}-\frac{N_2}{H}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\Bigg|_{(\alpha,\beta)} \tag{1.8}$$

где

$$N_1=\frac{A}{4}(\rho^2-z^2)+\frac{B}{2}\rho z+\frac{C_1}{2}\rho-E_1 z$$

$$N_2=\frac{A}{2}\rho z-\frac{B}{4}(\rho^2-z^2)+\frac{C_1}{2}z+E_1\rho$$

здесь A, B_1, C_1, E_1 — произвольные функции от t.

После подстановки (1.6) и (1.8) в (1.4) получаем выражения для перемещений u_α, u_β, u_γ.

Вводя функцию напряжений

$$\tau_{\alpha\gamma}=-\frac{1}{H\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad \tau_{\beta\gamma}=\frac{1}{H\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \tag{1.9}$$

от (1.1) и (1.7) приходим к основному уравнению задачи

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)-$$

$$-\int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{f(\tau_0)}{\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right]+\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{f(\tau_0)}{\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right]\right\}K(t,\tau)\,d\tau=DG\frac{H^2}{\rho^2} \tag{1.10}$$

где

$$\tau_0=\frac{1}{H\rho^2}\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)^2} \tag{1.11}$$

Таким образом, задача приводится к определению функций $\Phi(\alpha,\beta,t)$ из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях

$$\Phi(\alpha_0,\beta,t)=0, \quad \Phi(\alpha_1,\beta,t)=b(t) \tag{1.12}$$

где $b(t)$—неизвестная функция t, а $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$ соответствуют линиям внешнего и внутреннего контура (фиг. 2).

Крутящий момент выражается формулой

$$M=\iint_{\Omega}[(\rho-R)\tau_{\alpha\gamma}-z\tau_{\beta\gamma}]\,d\Omega \tag{1.13}$$

где

$$d\Omega = H^2 d\alpha d\beta = d\gamma\, dz$$

Переходя от $\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$ к $\tau_{\beta\gamma}, \tau_{\alpha\gamma}$ и подставляя в (1.13), после применения формулы Грина-Остроградского получим

$$M = -\oint_{\gamma} \Phi d\left(\frac{z}{\rho}\right) - R \oint_{\gamma} \frac{\Phi}{\rho^2} dz + 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{\rho^3} d\Omega$$

Принимая $\Phi = 0$ на внешном контуре, для двухсвязной области получим

$$M = -R\Phi_1(t) \oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{\rho^2} + 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{\rho^3} d\Omega \tag{1.14}$$

где $\Phi_1(t)$ — значение Φ на контуре Γ_1.

§ 2. *Обобщение теоремы Бредта.* Пусть Γ_* — замкнутая кривая, целиком лежащая в поперечном сечении скручиваемого стержня. Область, ограниченную контуром Γ_*, обозначим через Ω_* (фиг. 2). Интегрируя обе части уравнения (1.10) в области Ω_* и переходя к контурному интегралу, получим

$$\int_{\Gamma_*} \frac{1}{\rho^3} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0) \frac{\partial \Phi}{\partial n} K(t, \tau) d\tau \right\} ds = \frac{DG}{2} \int_{\Gamma_*} \frac{dz}{\rho^2} \tag{2.1}$$

где n — направление внешней нормали к контуру Γ_*, а s — дуга этого контура. Формула (2.1) представляет собой обобщение теоремы Бредта о циркуляции деформации сдвигов при кручении стержня с кривой осью при произвольном законе нелинейной связи между деформациями ползучести и напряжениями.

§ 3. *Решение интегро-дифференциального уравнения* (1.10). Положим, что

$$f(\sigma_0) = 1 + \lambda\sigma_0^2 \tag{3.1}$$

где λ—физический параметр, характеризующий нелинейный закон ползучести. Решение уравнения (1.10) ищем в виде ряда

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(\alpha, \beta, t) \tag{3.2}$$

где Φ_0 соответствует случаю линейно-упругого материала. Подставляя (3.2) в (1.10) и (1.11), приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \beta^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \beta} = H^2 \tau_n \tag{3.3}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

здесь

$$\varphi_0(t) = GD(t) + \int_{\tau_1}^{t} D(\tau) R(t, \tau)\, d\tau \tag{3.4}$$

а $\varphi_n(\alpha, \beta, t)$ при $n \geqslant 1$ определяются соотношениями

$$\varphi_n(\alpha, \beta, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_1}^{t} N(t, \tau)(\omega_k \varphi_{n-1-k} + \text{grad}\, \Phi_k\, \text{grad}\, \varphi_{n-1-k})\, d\tau \tag{3.5}$$

где

$$N(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} R(t, \xi) K(\xi, \tau)\, d\xi \tag{3.6}$$

$$\omega_k = \rho^{-1} \sum_{i=0}^{k} \text{grad}\, \Phi_i\, \text{grad}\, \Phi_{k-i} \tag{3.7}$$

а $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$. Если

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \tag{3.8}$$

то

$$R(t, \tau) = \gamma_0 - \eta'(\tau) + [\eta''(\tau) - \eta'^2(\tau) - \gamma_0 \eta'(\tau)] e^{\eta(\tau)} \int_{\tau}^{t} e^{-\eta(x)} dx \tag{3.9}$$

где

$$\eta(t) = \gamma_0 \int_{\tau_1}^{t} [1 - 3G\varphi(\tau)]\, d\tau$$

причем, согласно [1] $\varphi(\tau) = C_0 + A_1 \tau^{-1}$, где C_0, A_1 и γ_0 — некоторые постоянные, характеризующие свойство ползучести материала.

Вводя новую функцию $\Psi_n(\alpha, \beta, t)$ при помощи подстановки

$$\Phi_n(\alpha, \beta, t) = (\text{ch}\, \alpha - \cos \beta)^{1/2} \text{sh}^{2} \alpha\, \Psi_n(\alpha, \beta, t)$$

из (3.3) получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \beta^2} + \text{cth}\, \alpha \frac{\partial \Psi_n}{\partial \alpha} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{\text{sh}^2 \alpha}\right) \Psi_n =$$

$$= \frac{H^2 (\text{ch}\, \alpha - \cos \beta)^{1/2}}{\text{sh}^2 \alpha} \varphi_n \tag{3.10}$$

Из (1.12) получим $\Psi_n(\alpha_0, \beta, t) = 0$ на внешней окружности, а на внутренней $\Psi_n(\alpha_1, \beta, t) = b_n^1 (\text{ch}\, \alpha_1 - \cos \beta)^{3/2} \text{sh}^{-2} \alpha_1$, где $b_0^1 = b(t)$, $b_1^1 = b_2^1 =$ $= \ldots = 0$.

Введем функцию

$$Z_n^m(\alpha, \beta) = P_n^m(\operatorname{ch}\alpha)\, Q_n^m(\operatorname{ch}\beta) - P_n^m(\operatorname{ch}\beta)\, Q_n^m(\operatorname{ch}\alpha)$$

где $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ — присоединенные сферические функции соответственно первого и второго рода m-го порядка n-го индекса.

Решая уравнения (3.10), удовлетворяющие указанным выше условиям и переходя к $\Phi_n(\alpha, \beta, t)$, получим

$$\Phi_n(\alpha, \beta, t) = \frac{b_n^1(t)}{2\pi\, \operatorname{sh}^2\alpha_1} \frac{\operatorname{sh}^2\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{3/2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\eta)^{3/2} L(\alpha, \beta; \eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh}^2\alpha}{2\pi(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{3/2}} \iint\limits_{\Omega} \varphi_n(\xi, \eta, t)(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)^{3/2}\, \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta)\, d\Omega \qquad (3.11)$$

где

$$L(\alpha, \beta; \eta) = \frac{Z^2_{-1/2}(\alpha_0, \alpha)}{Z^2_{-1/2}(\alpha_0, \alpha_1)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^2_{n-1/2}(\alpha_0, \alpha)}{Z^2_{n-1/2}(\alpha_0, \alpha_1)} \cos n(\beta - \eta)$$

а $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ — функция Грина для данной задачи, причем $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ при $\xi \leqslant \alpha$, где

$$B(\alpha, \beta; \xi, \eta) = \frac{16}{9} Z^2_{-1/2}(\xi, \alpha_0) \frac{Z^2_{-1/2}(\alpha_1, \alpha)}{Z^2_{-1/2}(\alpha_0, \alpha_1)} +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^2_{n-1/2}(\xi, \alpha_0)\, Z^2_{n-1/2}(\alpha_1, \alpha)}{(n^2 - 9/4)(n^2 - 1/4)\, Z^2_{n-1/2}(\alpha_0, \alpha_1)} \cos n(\beta - \eta)$$

и $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B(\xi, \eta; \alpha, \beta)$ при $\alpha \leqslant \xi$.

§ 4. *Определение функции* $b(t)$. Для определения функции $b(t)$ воспользуемся обобщенной теоремой Бредта (2.1), которая в данном случае принимает следующий вид:

$$\int\limits_{\beta_1}^{\beta} \frac{1}{\rho^3} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} - \int\limits_0^t f(\tau) \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} K(t, \tau)\, d\tau \right] d\beta = \frac{\pi DG}{a\, \operatorname{sh}^2\alpha_1} \qquad (4.1)$$

Если в общем решении (3.2) ограничиться первыми двумя приближениями, то из (3.11) получим

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = m_1 b(t) + m_2\varphi_0(t) + \int\limits_0^t N(t, \tau)[n_1 b^3(\tau) +$$

$$+ n_2 b^2(\tau)\varphi_0(\tau) + n_3 b(\tau)\varphi_0^2(\tau) + n_4\varphi_0^3(\tau)]\, d\tau + O(\varepsilon^2) \qquad (4.2)$$

где

$$m_1 = m_1(\alpha, \beta) = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{2\pi \operatorname{sh}^2 \alpha_1 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \eta)^{3/2} L(\alpha, \beta; \eta)\, d\eta$$

$$m_2 = m_2(\alpha, \beta) = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{2\pi (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \iint\limits_{\Omega} (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^{1/2} \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta)\, d\Omega\,,$$

а $n_i = n_i(\alpha, \beta)$ определяются через m_1, m_2.

Пользуясь методом решения, изложенным выше и ограничиваясь только первыми двумя приближениями $b(t)$ и $\varphi_0(t)$, получим

$$b(t) = b_0(t) + \lambda b_1(t) + O(\lambda^2), \quad \varphi_0(t) = \varphi_{00}(t) + \lambda \varphi_{01}(t) + O(\lambda^2)$$

Подставляя (4.2) в (1.14), (4.1) и пользуясь (4.3), получим

$$b(t) = Z(t) + \int\limits_{t_1}^{t} Z(\tau) K(t, \tau)\, d\tau + \int\limits_{t_1}^{t} \left[Z(\tau) + \int\limits_{t_1}^{\tau} Z(x) K(\tau, x)\, dx \right] \times$$

$$\times R(t, \tau)\, d\tau + k_1 \lambda \left[g_*(t) + \int\limits_{t_1}^{t} g_*(\tau) K(t, \tau)\, d\tau \right] + O(\lambda^2)$$

где

$$Z(t) = k_2 [k_3 M(t) + \lambda h(t)]$$

$$h(t) = \int\limits_{t_1}^{t} N(t, \tau) (k_4 b_0^3 + k_5 b_0^2 \varphi_{00} + k_6 b_0 \varphi_{00}^2 + k_7 \varphi_{00}^3)\, d\tau$$

$$g_*(t) = -\int\limits_{t_1}^{t} N(t, \tau) Y(\tau)\, d\tau + \int\limits_{t_1}^{t} K(t, \tau)\, d\tau \int\limits_{t_1}^{\tau} N(\tau, x) Y(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} (k_8 b_0^3 + k_9 b_0^2 \varphi_{00} + k_{10} b_0 \varphi_{00}^2 + k_{11} \varphi_{00}^3) K(t, \tau)\, d\tau$$

$$Y(t) = k_{12} b_0^3 + k_{13} b_0^2 \varphi_{00} + k_{14} b_0 \varphi_{00}^2 + k_{15} \varphi_{00}^3$$

$b_0(t)$, $\varphi_{00}(t)$ определяются из системы

$$b_0(t) - \int\limits_{t_1}^{t} b_0(\tau) K(t, \tau)\, d\tau = k_{16} \left[\varphi_{00} + \int\limits_{t_1}^{t} \varphi_{00}(\tau) K(t, \tau)\, d\tau \right]$$

$$\varphi_{00}(t) = k_3 M(t) + k_{17} b_0(t)$$

а коэффициенты k_i — постоянные и определяются через m_1, m_2.

§ 5. *Исследование сходимости ряда* (3.2). Для доказательства существования решения надо показать, что ряд (3.2), где коэффициенты $\Phi_n(\alpha, \beta, t)$ определяются из рекуррентных формул (3.11), сходится абсолютно и равномерно. Для этой цели оценим $\Phi_n(\alpha, \beta, t)$ в зависимости от n. Зададимся фиксированным промежутком изменения времени $\tau_1 \leqslant t \leqslant T$ и положим

$$\max |K(t, \tau)| = K_T, \quad \max |R(t, \tau)| = R_T, \quad \tau_1 \leqslant \tau, \quad t \leqslant T$$

Тогда из (3.6) следует, что

$$|N(t, \tau)| \leqslant K_T(1 + R_T T) = N_T \tag{5.1}$$

Вводя норму

$$\|X\| = \max |X| + \sup \frac{|X(A) - X(B)|}{|AB|^\delta}$$

где A, B — произвольные точки внутри поперечного сечения стержня, $0 < \delta < 1$, при помощи априорных оценок Шаудера [6], которые в данном случае пишутся в виде

$$\|D^2\Phi_n\| \leqslant c_* \|\varphi_n\| \tag{5.2}$$

где c_* — некоторая постоянная, зависящая от формы области, получаем рекуррентную систему неравенств. Из (3.4), (3.5), (3.7), в силу (5.1) и (5.2) получим

$$\|\Phi_n\| \leqslant \nu \sum_{k=0}^{n} \|\varphi_k\| q_{n-k}$$

где

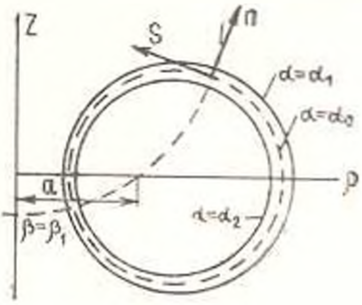
$$\nu = 2N_T T \mu c_*^2 (1 + 6\mu c_*)$$

$$\mu = \max_{(\alpha, \beta) \in \sigma} \left\{ \|H^{-2}\|, \left\| \frac{\partial}{\partial \alpha}(H^{-2}\rho^{-4}) \right\|, \left\| \frac{\partial}{\partial \beta}(H^{-2}\rho^{-4}) \right\|, \|H^{-2}\rho^{-4}\| \right\}$$

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} \|\varphi_k\| \|\varphi_{n-k}\|$$

Рассмотрим ряд с общим членом $\lambda^n \|\varphi_0\| n^{-2} \lambda_*^{-n}$. Методом индукции можно показать, что $\|\varphi_n\| \leqslant \|\varphi_0\| n^{-2} \lambda_*^{-n}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n \|\varphi_n\|$ и ряд (3.2) сходятся абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $\lambda = \lambda_* = (364\nu\|\varphi_0\|^2)^{-1}$.

§ 6. *Случай тонкостенной трубы.* Рассмотрим тонкостенный разностенный стержень, сечение которого ограничено двумя неконцентрическими окружностями $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ (фиг. 3). Ввиду тонкостенности стержня положим, что касательные напряжения по всей толщине стенки профиля постоянны и направлены параллельно его средней линии. Отнесем сечение стержня к координатной системе (s, n), где s-координата, отсчитываемая вдоль средней линии профиля Γ_0 от некоторой ее точки, а n-координата, отсчитываемая по нормали к ней. Γ_0 определяется через $\alpha = \alpha_0$, а систему (s, n) можно заменить системой (β, α).



Фиг. 3

Ввиду тонкостенности стержня, как обычно, Φ принимаем линейной функцией от координаты. Полагая на внешнем контуре $\Phi = 0$, а на внутреннем $\Phi_1(t)$, найдем ($2h(s)$ — толщина стенки стержня)

$$\Phi = \frac{\Phi_1(t)}{2}\left[1 - \frac{2n}{h(s)}\right] \qquad (6.1)$$

Пренебрегая двойным интегралом в (1.14), получим

$$M(t) = 2\pi\,\mathrm{ch}\,\alpha_0\,\mathrm{sh}^{-3}\alpha_0\Phi_1(t) \qquad (6.2)$$

Пользуясь обобщенной формулой Бредта (2.1) и соотношениями (6.1) и (6.2), определяем

$$D(t) = \frac{a\,\mathrm{sh}^2\alpha_0}{2\pi^2 G\,\mathrm{ch}\,\alpha_0}\int_{\Gamma_0}\frac{H}{\xi^3 h}\left[M(t) - \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\,M(\tau)\,K(t, \tau)\,d\tau\right]d\beta \qquad (6.3)$$

Здесь

$$\sigma_0(t) = \sigma_1(t) = \mathrm{sh}^3\alpha_0 M(t)\left(2\pi\,\mathrm{ch}\,\alpha_0\xi^2 h\right)^{-1}$$

$$h = h(\beta) = H(\alpha_0, \beta)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Принимая $M(t) = M = \mathrm{const}$ и пользуясь (3.1) и (3.8), получим

$$D(t) = \frac{\mathrm{sh}^3\alpha_0 M}{2\pi a^2 G(\alpha_2 - \alpha_1)}\Big\{(2\,\mathrm{ch}^2\alpha_0 + 3) + 3G\left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1}\right)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}\right]\times$$

$$\times\left[(2\,\mathrm{ch}^2\alpha_0 + 3) + \lambda\left(\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 M}{2\pi a^3\,\mathrm{ch}\,\alpha_0(\alpha_2 - \alpha_1)}\right)^2 c^*\right]\Big\} \qquad (6.4)$$

где

$$c^* = 2\,\mathrm{ch}^8\alpha_0 + 36\,\mathrm{ch}^6\alpha_0 + \frac{189}{2}\,\mathrm{ch}^4\alpha_0 + \frac{105}{2}\,\mathrm{ch}^2\alpha_0 + \frac{315}{64}$$

Рассмотрим задачу релаксации напряжений. В начальный момент стержню сообщим крутку $D(\tau_1)$, которая определяется формулой

$$D(\tau_1) = \mathrm{sh}^2\alpha_0(2\,\mathrm{ch}^2\alpha_0 + 3)\,M(\tau_1)\left[2\pi a^2 G(\alpha_2 - \alpha_1)\right]^{-1} \qquad (6.5)$$

Пользуясь обобщенной формулой Бредта (2.1), а также соотношениями (6.1), (6.2), (6.5) и принимая $f(\sigma_*) = 1 + \lambda\sigma_*$ получим

$$\Phi_1(t) - \int_{\tau_1}^{t} \Phi_1(\tau) K(t, \tau) d\tau - \lambda_* \int_{\tau_1}^{t} \Phi_1^2(\tau) K(t, \tau) d\tau = g \tag{6.6}$$

где

$$\lambda_* = \frac{\lambda (16 \operatorname{ch}^6 \alpha_0 + 120 \operatorname{ch}^4 \alpha_0 - 90 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 + 5)}{8\pi a^3 \operatorname{sh}^2 \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 (2 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 - 3)(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$g = \frac{GD(\tau_1)(\alpha_2 - \alpha_1) a^2 \operatorname{sh} \alpha_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 (2 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 + 3)}$$

Ограничиваясь первыми двумя приближениями, получим выражения крутящего момента

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0(t, \tau_1) + \lambda_1 \left[H_1(t, \tau_1) - \int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau) d\tau \right] + O(\lambda_1^2) \tag{6.7}$$

где

$$H_0(t, \tau_1) = 1 - 3G\gamma_0\varphi(\tau_1) e^{r\tau_1} \int_{\tau_1}^{t} e^{-r\tau - p\tau} d\tau$$

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} H_0^2(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau$$

$$r = \gamma_0(1 + 3GC_0), \quad p = 3GA_1\gamma_0, \quad \lambda_1 = \lambda_* M(\tau_1) \operatorname{sh}^3 \alpha_0 (2\pi \operatorname{ch} \alpha_0)^{-1}$$

Аналогичным образом, ограничиваясь в общем решении (3.2) первыми тремя приближениями, получим

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0(t, \tau_1) + \lambda_1 \left[H_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau) d\tau \right] +$$

$$+ 2\lambda_1^2 \left[H_2(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau) d\tau \right] + O(\lambda_1^3) \tag{6.8}$$

где

$$H_2(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} \left[H_0(\tau, \tau_1) H_1(\tau, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} H_1(x, \tau_1) R(\tau, x) dx \right] K(t, \tau) d\tau$$

а $R(t, \tau)$ определяется из (3.9).

Для старого материала можно положить $A_1 = 0$. Тогда из уравнения (6.6) получим замкнутое решение

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = \frac{(g - x_2)\, x_1 - (g - x_1)\, x_2 e^{-\lambda_2 (x_1 - x_2)(t - \tau_1)}}{g\left[g - x_2 - (g - x_1)\, e^{-\lambda_2 (x_1 - x_2)(t - \tau_1)}\right]} \tag{6.9}$$

где $\lambda_2 = 3GC_0\gamma_0\lambda_*$, а x_1 и x_2 — корни уравнения

$$\lambda_2 x^2 + \gamma_0 (1 + 3GC_0)\, x - g\gamma_0 = 0$$

Аналогичным образом, если принять (3.1), то решение получается в квадратурах

$$\ln\left|\frac{\Phi_1(t) - \xi}{g - \xi}\right| \sqrt{\frac{g^2 + \xi g + p_1 + \xi^2}{\Phi_1^2(t) + \xi\Phi_1(t) + p_1 + \xi^2}} -$$

$$- \frac{3\xi}{\sqrt{4p_1 + 3\xi^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{4p_1 + 3\xi^2}\,[\Phi_1(t) - g]}{4p_1 + 3\xi^2 + [2\Phi_1(t) + \xi][2g + \xi]} =$$

$$= A_* (3\xi^2 + p_1)(t - \tau_1) \tag{6.10}$$

где

$$\xi = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad Q = \left(\frac{p_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

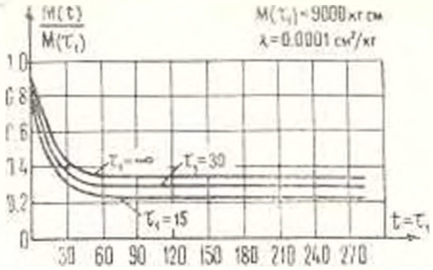
$$p_1 = a^6 (1 + 3GC_0)\, \mathrm{sh}^4 \alpha_0 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 (2\,\mathrm{ch}^2 \alpha_0 + 3)\,(3GC_0\lambda c^*)^{-1}$$

$$q = a^6 D(\tau_1)\,(\alpha_2 - \alpha_1)^3\, \mathrm{sh}^3 \alpha_0\, (3\,\mathrm{ch}\,\alpha_0 C_0 \lambda c^*)^{-1}$$

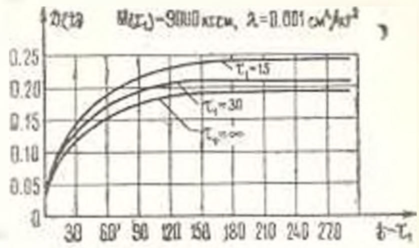
$$A_* = -3GC_0\gamma_0 c^* \left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 a^4\, \mathrm{sh}^4 \alpha_0 (2\,\mathrm{ch}^2 \alpha_0 + 3)\right]^{-1}$$

На ЭВМ „ЕС—1022" при значении параметров $\mathrm{ch}\,\alpha_0 = 3$, $a = 6\sqrt{8}$ *см*, $\alpha_2 - \alpha_1 = 1/\sqrt{8}$, $\gamma_0 = 0.026$ *1/день*, $3G = 2\cdot10^5$ *кг/см²*, $C_0 = 0.9\cdot10^{-5}$ *см²/кг*, $A_1 = 4.82\cdot10^{-5}$ *см²/кг день* дано решение задачи ползучести и о релаксации крутящего момента тонкостенного стержня. Вычисления показывают, что значения крутящих моментов, полученные при помощи формул (6.7) и (6.8), отличаются на 10^{-5}, следовательно, в общем решении (3.2) уравнения (6.6) можно ограничиться первыми двумя приближениями. Кроме того, вычисления показывают, что значения крутящих моментов, полученные при помощи формул (6.9) и (6.10), почти совпадают со значениями, полученными при помощи формулы (6.7) при больших значениях τ_1.

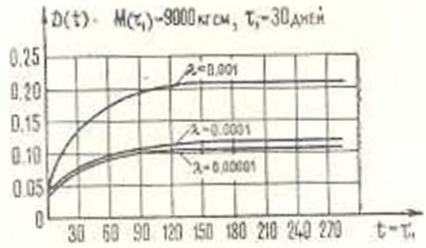
На фиг. 4 показано изменение крутящего момента во времени в зависимости от возраста материала τ_1 и продолжительности действия нагрузки $t-\tau_1$. На фиг. 5 и 6 показано изменение деформации ползучести при различных значениях τ_1 и λ.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

За постановку задачи и постоянное внимание выражаю благодарность моему научному руководителю проф. М. А. Задояну.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 2 VI 1980

Ն. Մ. ՓԱԼԱԴՅԱՆ

ԿԵՐ ՏԱՐԱՊԱՏ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է տարապատ կոր խողովակի ոլորումը ոչ-գծային ժառանգական սողքի հաշվառումով։ Օգտագործելով տորական կոորդինատները, կիսադարձային մեթոդով խնդիրը բերվում է ոչ-գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման՝ լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ։ Այդ հավասարման լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի տեսքով, և ապացուցվում է այդ շարքի զուգամիտությունը։

Լուծված են սողքի և ռելաքսացիայի խնդիրները բարակապատ կոր խողովակի համար, և այդ դեպքերի համար կառուցված են գրաֆիկներ թվային օրինակների հիման վրա։

THE TORSION OF A CURVILINEAR PIPE WITH DIFFERENT WALL THICKNESS UNDER NON-LINEAR CREEP

F. M. POLADIAN

S u m m a r y

The torsion of a curvilinear pipe of different wall thickness with non-linear hereditary creep is investigated. By using the toroidal coordinates and the semi-reverse method the problem is reduced to the non-linear integro-differential equation with respect to the stress function.

The solution of this problem is sought in the form of a power series and the series convergence is shown. For a thin-walled curvilinear pipe the problem of creep and relaxation is solved and for these cases graphs are plotted on the basis of numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
2. *Задоян М. А.* Пластическое кручение неполного тора. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
3. *Задоян М. А.* Пластическое кручение сектора кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
4. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, 1958, т. 22, в. 6.
5. *Новожилов В. В.* Теория упругости. М.—Л., Судстройиздат, 1962.
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1965.