

Л. А. БАБЛОЯН, Н. О. ГУЛКАНЯН

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОЕДИНЕНИЯ ИЗ ТРЕХ ПОЛУПОЛОС ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ*

1. Рассмотрим плоскую контактную задачу для Y-образной области, составленной из двух материалов (I и II) при наличии одной оси симметрии MM (фиг. 1). Предполагается, что между составляющими материалами имеет место полное сцепление, а на границах заданы внешние нагрузки.

В силу наличия симметрии достаточно рассмотреть только заштрихованную часть области. Обозначим упругие постоянные в области I через ν_1, E_1 , а в области II — через ν_2, E_2 .

Введем в рассмотрение две полярные системы координат (r_n, φ_n) ($n = 1, 2$) с полюсами соответственно в точках O_1 и O_2 [1, 2].

Как известно, плоская задача сводится к определению бигармонической функции Эйри, которая для рассматриваемой задачи ищется в виде суммы двух «местных» решений, то есть

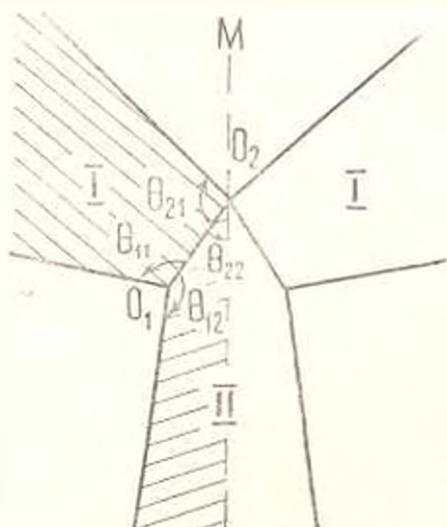
$$F = \sum_{n=1}^2 F_n(r_n, \varphi_n) \quad (1.1)$$

При этом напряжения и перемещения в соответствующих координатах выразятся через функцию напряжений Эйри по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(n)}(r_n, \varphi_n) &= \frac{1}{r_n} \frac{\partial F}{\partial r_n} + \frac{1}{r_n^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi_n^2} \\ \sigma_{\varphi}^{(n)}(r_n, \varphi_n) &= \frac{\partial^2 F}{\partial r_n^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{rr}^{(n)}(r_n, \varphi_n) = -\frac{\partial}{\partial r_n} \left(\frac{1}{r_n} \frac{\partial F}{\partial \varphi_n} \right)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(n)} &= \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r_n} = \frac{1}{E_k} (\varepsilon_r^{(n)} - \nu_k \varepsilon_{\varphi}^{(n)}) \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(n)} &= \frac{\partial u_{\varphi}^{(n)}}{r_n \partial \varphi_n} + \frac{u_r^{(n)}}{r_n} = \frac{1}{E_k} (\varepsilon_{\varphi}^{(n)} - \nu_k \varepsilon_r^{(n)}) \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 1.

* Работа доложена на Всесоюзной конференции по теории упругости в г. Ереване в 1979 г.

$$\varepsilon_{rz}^{(n)} = \frac{\sigma v^{(n)}}{dr_n} - \frac{v_z^{(n)}}{r_n} - \frac{1}{r_n} \frac{\sigma u_r^{(n)}}{dz_n} = \frac{2(1-\nu_k)}{E_k} \bar{\psi}_n^{(n)}(r_n, \bar{z}_n)$$

Здесь $\bar{\psi}_n = \begin{cases} \psi_1 & \text{при } n = 1 \\ \psi_2 - z & \text{при } n = 2 \end{cases}$

а «k» принимает значение «1» для верхнего материала (область I) и значение «2» для нижнего материала (область II).

На оси симметрии должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_{11}}^{(1)}(r_2, \theta_{22}) = 0 & \quad \left(\text{или } \frac{\sigma v_{\theta_{11}}^{(1)}(r_2, \theta_{22})}{dr_2} = 0 \right) \\ v_z^{(2)}(r_2, \theta_{22}) = 0 & \end{aligned} \quad (1.4)$$

На границе рассматриваемой области заданы условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{rn}^{(1)}(r_n, \theta_{n1}) = f_{n1}(r_n), \quad \sigma_{r_n \bar{z}_n}^{(1)}(r_n, \theta_{n1}) = g_{n1}(r_n) \\ \sigma_{rn}^{(2)}(r_n, \theta_{n2}) = f_{n2}(r_n), \quad \sigma_{r_n \bar{z}_n}^{(2)}(r_n, \theta_{n2}) = g_{n2}(r_n) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Потребуем, чтобы каждая из функций $F_n(r_n, \bar{z}_n)$ на линии $O_1 O_2$ удовлетворяла условиям полного сцепления двух материалов, то есть

$$\begin{aligned} \sigma_{rn}^{(1)}(r_n, 0) = \sigma_{rn}^{(2)}(r_n, 0), \quad \sigma_{r_n \bar{z}_n}^{(1)}(r_n, 0) = \sigma_{r_n \bar{z}_n}^{(2)}(r_n, 0) \\ u_{rn}^{(1)}(r_n, 0) = u_{rn}^{(2)}(r_n, 0), \quad v_{\bar{z}_n}^{(1)}(r_n, 0) = v_{\bar{z}_n}^{(2)}(r_n, 0) \quad (n = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Функции $F_n(r_n, \bar{z}_n)$ ($n = 1, 2$) ищем в виде интеграла Меллина

$$F_n(r_n, \bar{z}_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \Phi_n(s, \bar{z}_n) r_n^{s-1} ds \quad (n = 1, 2) \quad (1.7)$$

где

$$-1 + \varepsilon < c_n < 0, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

При этом

$$\Phi_n(s, \bar{z}_n) = \int_0^{\infty} F_n(r_n, \bar{z}_n) r_n^{s-1} dr_n \quad (1.8)$$

Функции $\Phi_n(s, \bar{z}_n)$ представим в виде

$$\Phi_n(s, \bar{z}_n) = \begin{cases} \Phi_{n1}(s, \bar{z}_n) & \text{в области I} \\ \Phi_{n2}(s, \bar{z}_n) & \text{в области II} \end{cases} \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) следует, что функции $\Phi_{nk}(s, \bar{z}_n)$ должны удовлетворять уравнению

$$\Phi_{nk}^{(1'')} + 2(s^2 - 1)\Phi_{nk}^{(1')} + (s^2 - 1)^2\Phi_{nk} = 0 \quad (1.10)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{nk}(s, \bar{z}_n) = & A_{nk} \cos(s-1)\bar{z}_n + B_{nk} \sin(s-1)\bar{z}_n + \\ & + C_{nk} \cos(s+1)\bar{z}_n + D_{nk} \sin(s+1)\bar{z}_n \end{aligned} \quad (1.11)$$

Если принять, что между коэффициентами A_{nk} , B_{nk} , C_{nk} и D_{nk} существуют связи

$$A_{n1} + C_{n1} = A_{n2} + C_{n2} = (s-1)^{-1}(\partial_2 C_{n2} - \partial_1 C_{n1}) \quad (1.12)$$

$$(s-1)B_{n1} + (s+1)D_{n1} = (s-1)B_{n2} + (s+1)D_{n2} = \partial_1 D_{n1} - \partial_2 D_{n2}$$

где

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial E_k}, \quad \partial = \frac{1+\partial_1}{E_1} - \frac{1+\partial_2}{E_2} \quad (k=1, 2) \quad (1.13)$$

то условия контакта (1.6) будут удовлетворены тождественно.

Удовлетворяя граничным условиям (1.5), условиям симметрии (1.4) и введя новые неизвестные функции $X_{nk}(s)$, $Y_{nk}(s)$

$$\begin{aligned} s(s-1)\Phi_{1k}(s, \bar{z}_{1k}) = \alpha^2 X_{1k}, \quad s(s-1)\Phi_{2k}(s, \bar{z}_{2k}) = \alpha^2 Y_{2k}(s) \\ s(s-1)\Phi_{21}(s, \bar{z}_{21}) = \alpha^2 X_{21} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4(s+1)}[\Phi_{22}^{(1'')}(\bar{z}_{22}, s) + (s-1)^2\Phi_{22}^{(1')}(\bar{z}_{22}, s)] = \alpha^2 X_{22}(s) \quad (n, k=1, 2) \quad (1.14)$$

после ряда преобразований для их определения получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} X_{nk}(s) + \int_{\bar{E}_k} [X_{pm}(\bar{z}) K_{nk}^{(1)}(\bar{z}, s) + Y_{pk}(\bar{z}) K_{nk}^{(2)}(\bar{z}, s) + \\ + X_{pm}(\bar{z}) K_{nk}^{(3)}(\bar{z}, s) + Y_{pm}(\bar{z}) K_{nk}^{(4)}(\bar{z}, s)] d\bar{z} = \bar{f}_{nk}(s) \\ Y_{nk}(s) + \int_{\bar{E}_p} [X_{nk}(\bar{z}) K_{nk}^{(5)}(\bar{z}, s) + Y_{pk}(\bar{z}) K_{nk}^{(6)}(\bar{z}, s) + \\ + X_{pm}(\bar{z}) K_{nk}^{(7)}(\bar{z}, s) + Y_{pm}(\bar{z}) K_{nk}^{(8)}(\bar{z}, s)] d\bar{z} = \bar{g}_{nk}(s) \\ (n, k=1, 2) \quad (n \neq p = k + m = 3) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь ядра интегральных уравнений имеют вид

$$K_{nk}^{(q)}(\bar{z}, s) = \frac{\beta(s+1, \bar{z}-s)}{2=i\Delta_p(\bar{z})} k_{pk}^{(q)}(\bar{z}, s) \quad (q=1, 2, \dots, 8) \quad (1.16)$$

где $B(x, y)$ — эйлеров интеграл первого рода, а функции $k_{pk}^{(j)}(\xi, s)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
 k_{pk}^{(1)}(\xi, s) &= \alpha_{nk}^- M_{pk}^- + (-1)^{n-k} \beta_{nk}^- N_{pk}^+ - (-1)^m \alpha_{pk}^- \cos(s-1) \beta_{nk}^- + \\
 &\quad + (-1)^n b_{pk}^+ \sin(s-1) \beta_{nk}^- \\
 k_{pk}^{(2)}(\xi, s) &= \alpha_{nk}^+ N_{pk}^- - (-1)^{n-k} \beta_{nk}^- M_{pk}^+ - (-1)^m b_{pk}^- \cos(s-1) \beta_{nk}^- - \\
 &\quad - (-1)^n \alpha_{pk}^+ \sin(s-1) \beta_{nk}^- \\
 k_{pk}^{(3)}(\xi, s) &= -\alpha_{nk}^+ Q_{pm}^- + (-1)^{n-k} \beta_{nk}^- P_{pm}^+ + (-1)^m \alpha_{pm}^- \cos(s-1) \beta_{nk}^- - \\
 &\quad - (-1)^n b_{pm}^- \sin(s-1) \beta_{nk}^- \\
 k_{pk}^{(4)}(\xi, s) &= \alpha_{nk}^- P_{pm}^- + (-1)^{n-k} \beta_{nk}^- Q_{pm}^+ + (-1)^m b_{pm}^- \cos(s-1) \beta_{nk}^- + \\
 &\quad + (-1)^n \alpha_{pm}^+ \sin(s-1) \beta_{nk}^- \quad (1.17) \\
 k_{pk}^{(5)}(\xi, s) &= (-1)^{n-k} \beta_{nk}^- M_{pk}^- - \alpha_{nk}^- N_{pk}^- + (-1)^n \alpha_{pk}^- \sin(s-1) \beta_{nk}^- + \\
 &\quad + (-1)^m b_{pk}^+ \cos(s-1) \beta_{nk}^- \\
 k_{pk}^{(6)}(\xi, s) &= (-1)^{n-k} \beta_{nk}^+ N_{pk}^- + \alpha_{nk}^- M_{pk}^+ + (-1)^n b_{pk}^- \sin(s-1) \beta_{nk}^- - \\
 &\quad - (-1)^m \alpha_{pk}^- \cos(s-1) \beta_{nk}^- \\
 k_{pk}^{(7)}(\xi, s) &= -(-1)^{n-k} \beta_{nk}^+ Q_{pm}^- - \alpha_{nk}^- P_{pm}^- - (-1)^n \alpha_{pm}^- \sin(s-1) \beta_{nk}^- - \\
 &\quad - (-1)^m b_{pm}^- \cos(s-1) \beta_{nk}^- \\
 k_{pk}^{(8)}(\xi, s) &= (-1)^{n-k} \beta_{nk}^- P_{pm}^- - \alpha_{nk}^- Q_{pm}^+ - (-1)^n b_{pm}^- \sin(s-1) \beta_{nk}^- + \\
 &\quad + (-1)^m \alpha_{pm}^+ \cos(s-1) \beta_{nk}^-
 \end{aligned}$$

В этих формулах « p » и « k » принимают значения 1 и 2, кроме сочетания $p=1, k=2, q=1 \div 4$, для этих значений параметров имеем

$$\begin{aligned}
 k_{12}^{(1)}(\xi, s) &= -M_{12}(\xi) \sin(s+1) \beta_{22} - N_{12}(\xi) \cos(s-1) \beta_{22} \\
 k_{12}^{(2)}(\xi, s) &= -N_{12}(\xi) \sin(s+1) \beta_{22} + M_{12}(\xi) \cos(s+1) \beta_{22} \\
 k_{12}^{(3)}(\xi, s) &= Q_{11}(\xi) \sin(s+1) \beta_{22} - P_{11}(\xi) \cos(s+1) \beta_{22} \quad (1.17') \\
 k_{12}^{(4)}(\xi, s) &= -P_{11}(\xi) \sin(s+1) \beta_{22} - Q_{11}(\xi) \cos(s+1) \beta_{22}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 M_{12}(\xi) &= \alpha_1 \alpha_2 \gamma_{1k}^+ + \alpha_{1m} \alpha_{2k} + (-1)^k \beta_k (d_{1m} - \alpha_m^2) \cos(\xi-1) \theta_{1k} \\
 M_{21}(\xi) &= \beta_1 \beta_{22} \gamma_{21}^+ + \alpha_2 [S^+(\xi, \theta_{22}) + \alpha_2 \sin 2\xi \theta_{22}] - \alpha_1 S^-(\xi, \theta_{22}) \times \\
 &\quad \times \cos(\xi-1) \theta_{21} \\
 M_{22}(\xi) &= d_{21} \sin(\xi+1) \theta_{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22}^-(\xi) &= \delta_1 \delta_2 | - (\xi + 1) \cos(\xi - 1) \theta_{22} + \cos[\xi(\theta_{22} - 2\theta_{21}) - \theta_{22}] + \\
&\quad \xi \cos[\xi\theta_{22} - \theta_{22} + 2\theta_{21}] + x_{22}^- d_{21} + 4\Delta_{21} \delta_2 \cos(\xi - 1) \theta_{22} \\
N_{1k}^+(\xi) &= \delta_1 \delta_2 \delta_{1k} - d_{1m} \delta_{1k} - (-1)^k \delta_k (d_{1m} - \delta_m^2) \sin(\xi - 1) \theta_{1k} \\
N_{21}^+(\xi) &= \delta_1 \delta_2 \mu_{21} - \beta_{21}^+ [S^+(\xi, \theta_{22}) + \delta_2 \sin 2\xi \theta_{22}] + \delta_1 S^+(\xi, \theta_{22}) \sin(\xi - 1) \theta_{21} \\
N_{22}^+(\xi) &= \delta_1 \delta_2 [S^+(\xi, \theta_{21}) \cos(\xi - 1) \theta_{22} - C_{21}^- \sin(\xi - 1) \theta_{22}] - \\
&\quad - d_{21} \beta_{22}^+ - 4\delta_2 \delta_{21} \sin(\xi - 1) \theta_{22} \quad (1.18) \\
N_{22}^-(\xi) &= -d_{21} \cos(\xi + 1) \theta_{22}
\end{aligned}$$

$$P_{1k}^+(\xi) = (-1)^k \delta_k [(-1)^m \delta_m \delta_{1k} - \beta_{1k}^- C_{1m} + \alpha_{1k}^- S^-(\xi, \theta_{1m})]$$

$$P_{21}^+(\xi) = \delta_1 \{ (\delta_1 - 1) \mu_{21} + (1 \pm \xi) x_{21} - \xi \lambda_{21} \}$$

$$\begin{aligned}
P_{22}^-(\xi) &= \delta_2 \{ \xi \cos(\xi - 1) \theta_{22} + (1 - \delta_1) \cos(\xi + 1) \theta_{22} - \\
&\quad - \cos[\xi(\theta_{22} + 2\theta_{21}) + \theta_{22}] - \xi \cos[\xi\theta_{22} + (\theta_{22} - 2\theta_{21})] \}
\end{aligned}$$

$$P_{22}^+(\xi) = \delta_2 \{ S^-(\xi, \theta_{21}) \alpha_{22} - C_{21}^- \beta_{22}^+ - \delta_1 \beta_{22}^+ \}$$

$$Q_{1k}^+(\xi) = (-1)^k \delta_k [(-1)^m \delta_m \alpha_{1k} - x_{1k}^- C_{1m} - S^-(\xi, \theta_{1m}) \beta_{1k}^-]$$

$$Q_{21}^+(\xi) = \delta_1 \{ (1 - \delta_1) \mu_{21} + x_{21}^+(\xi - 1) - \delta_2 \nu_{21} \}$$

$$\begin{aligned}
Q_{22}^-(\xi) &= -\delta_2 \{ (\xi - 1) \sin(\xi + 1) \theta_{22} + \sin[\xi(\theta_{22} + 2\theta_{21}) + \theta_{22}] - \\
&\quad - \xi \sin[\xi\theta_{22} + \theta_{22} - 2\theta_{21}] + \delta_1 \sin(\xi - 1) \theta_{22} \}
\end{aligned}$$

$$Q_{22}^+(\xi) = -\delta_2 [\delta_1 \alpha_{22} + x_{22}^- C_{21}^+ + S^-(\xi, \theta_{21}) \beta_{22}^-]$$

$$a_{pk}^+(\xi) = \delta_k M_{pk}^+ + \delta_m Q_{pk}^+$$

$$b_{pk}^+(\xi) = \delta_k N_{pk}^+ - \delta_m F_{pk}^+$$

При этом

$$a_{1k}^+(\xi) = 4\delta_k \Delta_{1m} \alpha_{1k}^+ + (-1)^m \delta_1 \delta_2 [S^-(\xi, \theta_{1m}) \beta_{1k}^- - C_{1m}^- \alpha_{1k}^+]$$

$$b_{1k}^+(\xi) = -4\delta_k \Delta_{1m} \beta_{1k}^- + (-1)^m \delta_1 \delta_2 [S^-(\xi, \theta_{1m}) \alpha_{1k}^+ + C_{1m}^- \beta_{1k}^-]$$

$$\begin{aligned}
a_{21}^+(\xi) &= \delta_1 \{ S^+(\xi, \theta_{22}) \alpha_{21} - \delta_2 [(S^-(\xi, \theta_{22} - \theta_{21}) - \\
&\quad - S^-(\xi, \theta_{22})) \cos(\xi - 1) \theta_{21} + S^+(\xi, \theta_{21}) \mu_{21} + C_{21}^- \mu_{21}] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{21}^+(\xi) &= \delta_1 \{ -\beta_{21}^- S^+(\xi, \theta_{22}) - \delta_2 [(S^-(\xi, \theta_{22} - \theta_{21}) - \\
&\quad - S^-(\xi, \theta_{22})) \sin(\xi - 1) \theta_{21} + S^-(\xi, \theta_{21}) \mu_{21} - C_{21}^- \mu_{21}] \}
\end{aligned}$$

$$a_{22}(\xi) = \delta_2 \{ -\delta_1 [C_{21} \sin(\xi + 1) \theta_{21} + S^-(\xi, \theta_{21}) \cos(\xi + 1) \theta_{22}] + \\ + 4(-\delta_1 \sin^2 \xi \theta_{21} + \Delta_{21}) \sin(\xi + 1) \theta_{22} \}$$

$$a_{21}(\xi) = \delta_2 \delta_1 [2\alpha_2 C_{21} - \beta_{21} S^-(\xi, \theta_{21})] + 4\Delta_{21} \alpha_{21}$$

$$b_{22}(\xi) = -\delta_2 \delta_1 [S^+(\xi, \theta_{21}) \alpha_{22} + \beta_{22} C_{21}] + 4\Delta_{21} \beta_{22}$$

$$b_{21}(\xi) = \delta_2 \{ \delta_1 [C_{21} \cos(\xi + 1) \theta_{22} - S^-(\xi, \theta_{21}) \sin(\xi + 1) \theta_{22}] + \\ + 4(\delta_1 \sin^2 \xi \theta_{21} - \Delta_{21}) \cos(\xi + 1) \theta_{22} \} \quad (1.18')$$

$$S^-(\xi, \theta) = \sin 2\xi \theta \pm \xi \sin 2\theta$$

$$C_{rk}(\xi, \theta_{rk}) = -2(\sin^2 \xi \theta_{rk} \pm \xi \sin^2 \theta_{rk})$$

$$d_{rk}(\xi, \theta_{rk}) = \delta_k^2 + 4(-1)^k \delta_k \sin^2 \xi \theta_{rk} + 4\Delta_{rk}$$

$$\Delta_{rk}(\xi, \theta_{rk}) = \sin^2 \xi \theta_{rk} - \xi^2 \sin^2 \theta_{rk}$$

$$x_{rk}(\xi, \theta_{rk}) = \alpha_{rk}(\xi, \theta_{rk}) - (-1)^k \delta_k \cos(\xi - 1) \theta_{rk} = \\ = 2(1 \mp \xi) \sin \xi \theta_{rk} \sin \theta_{rk}$$

$$\beta_{rk}(\xi, \theta_{rk}) = \beta_{rk}(\xi, \theta_{rk}) - (-1)^k \delta_k \sin(\xi - 1) \theta_{rk} = \\ = (1 \pm \xi) \sin(\xi + 1) \theta_{rk} + (1 \mp \xi) \sin(\xi - 1) \theta_{rk}$$

$$x_{21} = 0.5 \{ \cos[2\xi \theta_{21} + (\xi + 1) \theta_{21}] \mp \cos[(\xi + 1) \theta_{21} - 2\theta_{22}] \}$$

$$x_{21} = 0.5 \{ \cos[2\xi \theta_{21} + (\xi - 1) \theta_{21}] \mp \cos[(\xi - 1) \theta_{21} - 2\theta_{22}] \}$$

$$e_{21} = 0.5 \{ \sin[(\xi + 1) \theta_{21} - 2\theta_{22}] \mp \sin[2\xi \theta_{22} + (\xi + 1) \theta_{21}] \}$$

$$v_{21} = 0.5 \{ \sin[(\xi - 1) \theta_{21} - 2\theta_{22}] \mp \sin[(\xi - 1) \theta_{21} + 2\xi \theta_{22}] \}$$

$$\gamma_{12} = 2 \sin[\xi(\theta_{1m} + \theta_{1k}) - \theta_{1k}] \sin \xi \theta_{1m} \pm \\ \pm 2\xi \sin(\xi \theta_{1k} - \theta_{1m} - \theta_{1k}) \sin \theta_{1m}$$

$$\delta_{1k}^{\pm} = 2 \cos[\xi(\theta_{1m} + \theta_{1k}) - \theta_{1k}] \sin \xi \theta_{1m} \pm 2\xi \cos(\xi \theta_{1k} + \theta_{1m} - \theta_{1k}) \sin \theta_{1m}$$

$$2p_{21} = \sin[(\xi - 1) \theta_{21} - 2\xi \theta_{22}] \mp \sin[(\xi - 1) \theta_{21} + 2\theta_{22}]$$

$$2u_{21} = \cos[2\xi \theta_{22} - (\xi - 1) \theta_{21}] \mp \cos[2\theta_{22} + (\xi - 1) \theta_{21}]$$

$$\Delta_1(\xi) = 4(\delta_1^2 \Delta_{12} + \delta_2^2 \Delta_{11}) + 16(\Delta_{11} - \delta_1 \sin^2 \xi \theta_{11})(\Delta_{12} + \delta_2 \sin^2 \xi \theta_{12}) - \\ - 8\delta_1 \delta_2 [\sin \xi \theta_{11} \sin \xi \theta_{12} \cos \xi(\theta_{11} + \theta_{12}) - \xi^2 \sin \theta_{11} \sin \theta_{12} \cos(\theta_{11} - \theta_{12})]$$

$$\Delta_2(\xi) = \delta_1 \delta_2 [S^+(\xi, \theta_{22} - \theta_{21}) - S^-(\xi, \theta_{22})] + 4\delta_2 \Delta_{21} \sin 2\xi \theta_{22} + S^-(\xi, \theta_{21}) \theta_{21}$$

Свободные члены системы (1.15) выражаются через внешние нагрузки

$$\begin{aligned} \bar{f}_{n1}(s) &= a^{-1} \int_0^a f_{n1}(r_n) r_n^2 dr_n \\ \bar{g}_{n1}(s) &= a^{-1} \int_0^a g_{n1}(r_n) r_n^2 dr_n \end{aligned} \quad (1.19)$$

При этом

$$\bar{f}_{22}(s) = \bar{g}_{22}(s) = 0$$

В формулах (1.17) функции \bar{z}_{n1} и \bar{g}_{n1} зависят от аргументов (s, β_{n1}) , где $\beta_{n1} = \pi - |\theta_{n1}|$, а функции $M_{n1}, N_{n1}, P_{n1}, Q_{n1}, a_{n1}, b_{n1}$ зависят от аргумента ξ .

После решения интегральных уравнений старые неизвестные выражаются через X_{n1}, Y_{n1} по формулам

$$\begin{aligned} i\Delta_n(\xi) C_{n1}(\xi) &= a [X_{n1} M_{n1} + Y_{n1} N_{n1} - X_{n1} Q_{n1} + Y_{n1} P_{n1}] \\ i\Delta_n(\xi) D_{n1}(\xi) &= a [X_{n1} N_{n1} - Y_{n1} M_{n1} + X_{n1} P_{n1} - Y_{n1} Q_{n1}] \quad (1.20) \\ i(\xi - 1)\Delta_n(\xi) [A_{n1}(\xi) - C_{n1}(\xi)] &= a \sum_{k=1}^2 (-1)^k [X_{n1} a_{nk} - Y_{n1} b_{nk}] \\ i\Delta_n(\xi) [(\xi - 1)B_{n1} - (\xi + 1)D_{n1}] &= a \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} [X_{n1} b_{nk} - Y_{n1} a_{nk}] \end{aligned}$$

которые получаются из решения систем (1.12) и (1.14).

Контактные напряжения на отрезке $O_1 O_2$ ($\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = 0, r_1 + r_2 = a$) в силу (1.12) и (1.11) будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p,k}^2 \frac{(-1)^p}{r_p} \int_{L_p} [X_{p1}(\xi) a_{pk}(\xi) + Y_{p1}(\xi) b_{pk}(\xi)] \left(\frac{a}{r_p}\right) \frac{d\xi}{\Delta_p(\xi)} \quad (1.21) \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p,k}^2 \frac{(-1)^p}{r_p} \int_{L_p} [Y_{p1} a_{pk} - X_{p1} b_{pk}] \left(\frac{a}{r_p}\right) \frac{d\xi}{\Delta_p(\xi)} \\ \sigma_r^{(k)} &= -\sigma_r - \frac{2}{\pi i} \sum_{p=1}^2 \int_{L_p} i C_{p1}(\xi) r_p^{i-1} d\xi \quad (1.22) \end{aligned}$$

Из (1.22) и (1.20) можно вычислить скачок нормального напряжения σ_r на линии контакта

$$\sigma_{r_1}^{(1)} - \sigma_{r_2}^{(2)} = (4 - \lambda_1 + \lambda_2) \tau_0$$

Интегралы, входящие в выражения напряжений, можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. Из интегральных уравнений (1.15) видно, что

неизвестные функции $X_{nk}(s)$ и $Y_{nk}(s)$ имеют полюсы в точках $s = -n$ ($n = 1, 2, \dots$). Кроме этого, подынтегральные функции имеют полюсы в точках $S = \xi_{pq}$, где $\Delta_p(\xi_{pq}) = 0$.

Если окрестности точек O_1 и O_2 свободны от внешней нагрузки, то напряжения выражаются через степенные ряды

$$\begin{aligned}
 a\sigma_r &= \sum_q \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k}{\Delta_p(\xi_{pq})} [X_{rk}(\xi_{pq}) a_{rk}(\xi_{pq}) + Y_{rk}(\xi_{pq}) b_{rk}(\xi_{pq})] \times \\
 &\quad \times \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_1 \\
 a\sigma_{rz} &= \sum_q \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k}{\Delta_p(\xi_{pq})} [Y_{rk}(\xi_{pq}) a_{rk}(\xi_{pq}) - X_{rk}(\xi_{pq}) b_{rk}(\xi_{pq})] \times \\
 &\quad \times \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_2 \quad (1.23) \\
 a\sigma_r^{(1)} &= -a\sigma_r - 4 \sum_q \sum_{p=1}^2 \frac{1}{\Delta_p(\xi_{pq})} [X_{p1}(\xi_{pq}) M_{p1}(\xi_{pq}) + \\
 &\quad + Y_{p1}(\xi_{pq}) N_{p1}(\xi_{pq}) - X_{p2}(\xi_{pq}) Q_{p2}(\xi_{pq}) - Y_{p2}(\xi_{pq}) P_{p2}(\xi_{pq})] \times \\
 &\quad \times \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_3 \\
 a\sigma_r^{(2)} &= -a\sigma_r - 4 \sum_q \sum_{p=1}^2 \frac{1}{\Delta_p(\xi_{pq})} [-X_{p1}(\xi_{pq}) Q_{p1}(\xi_{pq}) + Y_{p1}(\xi_{pq}) P_{p1}(\xi_{pq}) + \\
 &\quad + M_{p2}(\xi_{pq}) X_{p2}(\xi_{pq}) + Y_{p2}(\xi_{pq}) N_{p2}(\xi_{pq})] \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_4
 \end{aligned}$$

где суммирование по q производится по всем ξ_{pq} — корням целых функций $\Delta_p(\xi)$, для которых $\text{Re}(\xi_{pq}) < 0$. Регулярные функции $R_k = R_k(r_1, r_2)$ ($r_1 + r_2 = a$, $k = 1 - 4$) появляются из-за конечности линии контакта.

При получении (1.23) были использованы значения

$$a_{ik}(-1) = 0, \quad b_{ik}(-1) = 0, \quad \Delta_1(-1) = 0$$

Исключением неизвестных $X_{rk}, X_{rp}, Y_{rk}, Y_{rp}$ система сингулярных интегральных уравнений (1.15) сводится к двум независимым системам интегральных уравнений второго рода относительно неизвестных функций $X_{nk}, X_{np}, Y_{nk}, Y_{np}$ с непрерывными ядрами

$$\begin{aligned}
 X_{nk}(s) [1 + \chi_{nk}^{(1)}(s)] + Y_{nk}(s) \chi_{nk}^{(2)}(s) + X_{np}(s) \chi_{np}^{(3)}(s) + Y_{np}(s) \chi_{np}^{(4)}(s) + \\
 + \int_{L_n} [X_{nk}(z) \bar{K}_{nk}^{(1)}(z, s) + Y_{nk}(z) \bar{K}_{nk}^{(2)}(z, s) + X_{np}(z) \bar{K}_{np}^{(3)}(z, s) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Y_{nm}(z) \bar{K}_{nk}^{(4)}(z, s)] dz = \bar{f}_{nk}(s) - \int_{L_p} [\bar{f}_{nk}(z) \bar{K}_{nk}^{(1)}(z, s) + \\
& + \bar{g}_{nk}(z) \bar{k}_{nk}^{(2)}(z, s) + \bar{f}_{nm}(z) \bar{K}_{nk}^{(3)}(z, s) - \bar{g}_{nm}(z) \bar{K}_{nk}^{(4)}(z, s)] dz \quad (1.24) \\
& X_{nk}(s) \gamma_{nk}^{(5)}(s) + Y_{nk}(s) [1 + \gamma_{nk}^{(6)}(s)] - X_{nm}(s) \gamma_{nk}^{(7)}(s) - Y_{nm}(s) \gamma_{nk}^{(8)}(s) + \\
& + \int_{L_n} [X_{nk}(z) \bar{K}_{nk}^{(5)}(z, s) + Y_{nk}(z) \bar{K}_{nk}^{(6)}(z, s) + X_{nm}(z) \bar{K}_{nk}^{(7)}(z, s) + \\
& + Y_{nm}(z) \bar{K}_{nk}^{(8)}(z, s)] dz = \bar{g}_{nk}(s) - \int_{L_p} [\bar{f}_{nk}(z) \bar{K}_{nk}^{(9)}(z, s) + \\
& + \bar{g}_{nk}(z) \bar{K}_{nk}^{(10)}(z, s) + \bar{f}_{nm}(z) \bar{K}_{nk}^{(11)}(z, s) + \bar{g}_{nm}(z) \bar{K}_{nk}^{(12)}(z, s)] dz \\
& \quad (n, k = 1, 2; \quad n + p = k + m = 3)
\end{aligned}$$

где

$$\bar{K}_{nk}^{(q)}(z, s) = \frac{\Gamma(s+1)}{z^2 \Gamma^2(z-1)} \int_{L_n} \frac{\Gamma(z-\xi) \Gamma(\xi-s)}{\Delta_n(z) \Delta_p(\xi)} \bar{K}_{nk}^{(q)}(z, \xi, s) d\xi$$

$$4\Delta_1(s) \Delta_2(s) \gamma_{nk}^{(q)}(s) = -\bar{K}_{nk}^{(q)}(s, s, s) \quad (q = 1, 2, \dots, 8) \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{nk}^{(9)}(z, \xi, s) &= k_{nk}^{(9)}(z, \xi) k_{nk}^{(10)}(\xi, s) + k_{nk}^{(9-4)}(z, \xi) k_{nk}^{(9)}(\xi, s) + \\
&+ k_{nm}^{(11)}(z, \xi) k_{nk}^{(13)}(\xi, s) + k_{nm}^{(12-4)}(z, \xi) k_{nk}^{(4)}(\xi, s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{nk}^{(10-4)}(z, \xi, s) &= k_{nk}^{(10)}(z, \xi) k_{nk}^{(15)}(\xi, s) + k_{nk}^{(10-4)}(z, \xi) k_{nk}^{(6)}(\xi, s) + \\
&+ k_{nm}^{(11)}(z, \xi) k_{nk}^{(7)}(\xi, s) + k_{nm}^{(12-4)}(z, \xi) k_{nk}^{(11)}(\xi, s)
\end{aligned}$$

$$l = l(q), \quad l(1) = 3, \quad l(2) = 4, \quad l(3) = 1, \quad l(4) = 2.$$

При этом была использована формула Пуанкаре-Бертрана перестановки сингулярных интегралов

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-l} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau} d\tau_1 = -\varphi^2(l, l) + \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1) d\tau}{(\tau-l)(\tau_1-\tau)}$$

Свободные члены в (1.24) ограничены по модулю. При соблюдении условий $\theta_{11} = \theta_{12} > \pi$, $\theta_{21} = \theta_{22} = \pi$ из (1.25) и (1.17), а также из свойств функций $H(x, y)$ следует, что

$$\int_{L_n} \int_{L_p} |\bar{K}_{nk}^{(1)}(z, s)|^p dz ds < \infty \quad (p > 1) \quad (1.26)$$

то есть уравнения (1.24) являются фредгольмовыми.

Система интегральных уравнений (1.15) может быть сведена также к решению бесконечной системы линейных уравнений.

Для этого представим неизвестные функции $X_{nk}(s)$ и $Y_{ni}(s)$ в виде рядов по функциям $\tilde{H}_q(s)$

$$\begin{aligned} X_{nk}(s) &= \sum_{q=0}^{\infty} x_{nk}^{(q)} \tilde{H}_q(s) \quad (n, k = 1, 2) \\ Y_{ni}(s) &= \sum_{q=0}^{\infty} y_{ni}^{(q)} \tilde{H}_q(s) \quad (s \in L_n) \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $\tilde{H}_q(s)$ — функции, связанные с многочленами Чебышева—Эрмита [4] следующим образом:

$$\tilde{H}_q(s) = r H_q\left(\frac{s-c}{l}\right), \quad s = c + iy \quad (1.28)$$

Подставляя (1.26) в (1.15), после некоторых преобразований для определения неизвестных коэффициентов разложений (1.27), получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} x_{nk}^{(l)} + \sum_{q=0}^{\infty} [A_{nk, lq}^{(1)} x_{nk}^{(q)} + A_{nk, lq}^{(2)} y_{ni}^{(q)} + A_{nk, lq}^{(3)} x_{pm}^{(q)} + A_{nk, lq}^{(4)} y_{pm}^{(q)}] &= F_{nk, l} \\ y_{ni}^{(l)} + \sum_{q=0}^{\infty} [A_{nk, lq}^{(5)} x_{nk}^{(q)} + A_{nk, lq}^{(6)} y_{ni}^{(q)} + A_{nk, lq}^{(7)} x_{pm}^{(q)} + A_{nk, lq}^{(8)} y_{pm}^{(q)}] &= G_{nk, l} \\ n, k = 1, 2; \quad n + p = 3; \quad k + m = 3; \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

где коэффициенты при неизвестных и свободные члены определяются соответственно по формулам

$$\begin{aligned} A_{nk, lq}^{(u)} &= \frac{(-2)^{l-1}}{l! l^{u-1}} \int_{L_p} \int_{L_n} \frac{B(s-1, 3-s)}{\Delta_p(\xi)} K_{lq}^{(u)}(\xi, s) \tilde{H}_q(\xi) \tilde{H}_l(\xi) e^{i(s-c)\xi} d\xi ds \\ F_{nk, l} &= \frac{(-2)^{l-1}}{l! l^{u-1}} \int_{L_n} \tilde{H}_l(s) \tilde{H}_l(s) a^{-s} e^{i(s-c)s} ds \\ G_{nk, l} &= \frac{(-2)^{l-1}}{l! l^{u-1}} \int_{L_n} \tilde{H}_l(s) \tilde{H}_l(s) a^{-s} e^{i(s-c)s} ds \end{aligned}$$

Заметим, что как коэффициенты, так и свободные члены бесконечной системы — действительные числа.

Использовав оценку (1.26) нетрудно доказать, что бесконечные системы являются вполне регулярными.

При некоторых значениях углов θ_{nk} из общего решения задачи могут быть получены решения для бесконечной плоскости с двумя горизонталь-

ными трещинами и одной вертикальной (или, наоборот), для полуплоскости с двумя симметрично расположенными полубесконечными трещинами, для полосы с полубесконечной трещиной, для T -образного тела и др.

Отметим, что аналогичные задачи другим методом рассмотрены Нуллером Б. М. [5]. Ворович И. И. [6] предложил приближенный метод для решения таких задач. Некоторые частные случаи рассмотрены Боджи Д. Б. [7]. Чобаяном К. С. [8] экспериментальным методом исследована задача для составной полосы без трещины.

2. Рассмотрим некоторые частные случаи

1) Если принять, что $E_2 = \infty$, то есть принять, что нижний материал абсолютно жесткий, то получим решение плоской задачи для бесконечного треугольника (фиг. 2), когда на линии O_1O_2 заданы нулевые перемещения, а на боковых ребрах верхнего материала заданы напряжения. При этом

$$\begin{aligned} \delta_2 &= 0, \quad \delta_1 = -1(1 + \nu_1)^{-1} \\ a_{p2} &= b_{p2} = c_{p2} = P_{p2} = 0 \\ K_{p1}^{(3)} &= K_{p1}^{(4)} = K_{p1}^{(5)} = K_{p1}^{(6)} = 0 \end{aligned}$$

Решение этой задачи сводится к решению системы из четырех сингулярных уравнений относительно неизвестных X_{p1} и Y_{p1} ($p = 1, 2$)

$$X_{p1}(s) + \int_{L_p} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2=ia_{p1}(\xi)} [X_{p1}(\xi)K_{p1}^{(1)}(\xi, s) + Y_{p1}(\xi)K_{p1}^{(2)}(\xi, s)] d\xi = \tilde{f}_{p1}(s) \quad (2.1)$$

$$Y_{p1}(s) + \int_{L_p} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2=ia_{p1}(\xi)} [X_{p1}(\xi)K_{p1}^{(3)}(\xi, s) + Y_{p1}(\xi)K_{p1}^{(4)}(\xi, s)] d\xi = \tilde{g}_{p1}(s)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_{p1}^{(1)}(\xi, s) &= \tilde{\alpha}_{p1}^+(\xi) \tilde{\alpha}_{p1}^-(s) + (-1)^n \tilde{\beta}_{p1}^+(\xi) \tilde{\beta}_{p1}^-(s) \\ K_{p1}^{(2)}(\xi, s) &= -[(-1)^n \tilde{\beta}_{p1}^-(s) \tilde{\alpha}_{p1}^+(\xi) + \tilde{\beta}_{p1}^+(\xi) \tilde{\alpha}_{p1}^-(s)] \\ K_{p1}^{(3)}(\xi, s) &= \tilde{\beta}_{p1}^+(\xi) \tilde{\alpha}_{p1}^-(s) + (-1)^n \tilde{\alpha}_{p1}^+(\xi) \tilde{\beta}_{p1}^-(s) \\ K_{p1}^{(4)}(\xi, s) &= (-1)^n \tilde{\beta}_{p1}^-(\xi) \tilde{\beta}_{p1}^-(s) + \tilde{\alpha}_{p1}^+(\xi) \tilde{\alpha}_{p1}^-(s) \end{aligned} \quad (2.2)$$

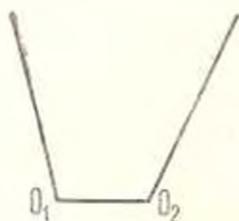
Суммирование в этом случае по индексу « n » при вычислении напряжений (1.23) производится по корням $\tilde{\xi}_{p0}$ трансцендентного уравнения

$$a_{p1}(\xi, b_{p1}) = 0 \quad (\operatorname{Re} \xi < 0)$$

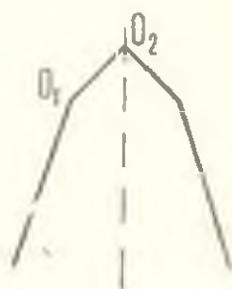
2) Пусть $E_1 = \infty$, тогда

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0, \quad \delta_2 = -1(1 + \nu_2)^{-1} \\ Q_{p1}(\xi) &= P_{p1}(\xi) = a_{p1}(\xi) = b_{p1}(\xi) = 0 \\ K_{p1}^{(3)} &= K_{p1}^{(4)} = K_{p1}^{(5)} = K_{p1}^{(6)} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

В этом случае получим решение для бесконечного симметричного четырехугольника (фиг. 3), на боковых гранях которого заданы напряжения, а на ломаной части границы — нулевые перемещения.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Решение этой задачи сводится к решению системы уравнений:

$$X_{12}(s) + \int_{L_1}^{\xi} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i S^+(\xi, \theta_{22})} [X_{22}(\xi) K_{22}^{(1)}(\xi, s) + Y_{22}(\xi) K_{22}^{(2)}(\xi, s)] d\xi = \bar{f}_{12}(s) \quad (2.4)$$

$$Y_{12}(s) + \int_{L_1}^{\xi} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i S^+(\xi, \theta_{22})} [X_{22}(\xi) K_{22}^{(5)}(\xi, s) + Y_{22}(\xi) K_{22}^{(6)}(\xi, s)] d\xi = \bar{g}_{12}(s)$$

$$X_{22}(s) + \int_{L_1}^{\xi} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i a_{12}} [X_{12}(\xi) K_{12}^{(1)}(\xi, s) + Y_{12}(\xi) K_{12}^{(2)}(\xi, s)] d\xi = 0$$

$$Y_{22}(s) + \int_{L_1}^{\xi} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i a_{12}} [X_{12}(\xi) K_{12}^{(5)}(\xi, s) + Y_{12}(\xi) K_{12}^{(6)}(\xi, s)] d\xi = 0$$

где ядра имеют вид

$$\begin{aligned} K_{12}^{(1)}(\xi, s) &= \bar{a}_{12}(s) \bar{a}_{22}(\xi) + \bar{\beta}_{12}(s) \bar{\beta}_{22}(\xi) \\ K_{22}^{(1)}(\xi, s) &= -\bar{\alpha}_{12}(s) \cos(\xi+1)\theta_{22} + \bar{\beta}_{12}(s) \sin(\xi+1)\theta_{22} \\ K_{12}^{(5)}(\xi, s) &= -\bar{\beta}_{12}(s) \bar{a}_{22}(\xi) + \bar{a}_{12}(s) \bar{\beta}_{22}(\xi) \\ K_{22}^{(5)}(\xi, s) &= \bar{\beta}_{12}(s) \cos(\xi+1)\theta_{22} + \bar{\alpha}_{12}(s) \sin(\xi+1)\theta_{22} \\ K_{12}^{(2)}(\xi, s) &= -\bar{\beta}_{12}(\xi) \cos(s+1)\theta_{22} - \bar{a}_{12}(\xi) \sin(s+1)\theta_{22} \\ K_{12}^{(6)}(\xi, s) &= \bar{\beta}_{12}(\xi) \sin(s+1)\theta_{22} + \bar{a}_{12}(\xi) \cos(s+1)\theta_{22} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$K_{12}^{(5)}(\xi, s) = \bar{\beta}_{22}(s) \bar{\alpha}_{12}(\xi) + \bar{\alpha}_{22}(s) \bar{\beta}_{12}(\xi)$$

$$K_{21}^{(5)}(\xi, s) = -\bar{\beta}_{12}(\xi) \bar{\beta}_{22}(s) - \bar{\alpha}_{22}(s) \bar{\alpha}_{12}(\xi)$$

$$\bar{S}^{-}(\xi, \theta_{22}) = S^{-}(\xi, \theta_{22}) + \delta_2 \sin 2\xi \theta_{22}$$

Стметим, что, как и в общем случае, системы сингулярных интегральных уравнений (3.1) и (2.4) исключенным неизвестных могут быть сведены к двум неизвестным регулярным интегральным уравнениям Фредгольма, каждое из которых содержит по два уравнения, а также могут быть сведены к бесконечным системам.

3) При $E_1 = E_2$ и $\nu_1 = \nu_2$ имеем случай одинаковых материалов, при этом $\delta_1 = \delta_2 = \infty$. В этом случае выражения ядер сингулярных интегральных уравнений (1.15) сильно упрощаются. Все величины в выражениях ядер, зависящие от ξ , заменяются следующими величинами:

$$\Delta_1(\xi) = 4 \{ \sin^2 \xi (\theta_{11} - \theta_{12}) - \xi^2 \sin^2 (\theta_{11} - \theta_{12}) \}$$

$$\Delta_2(\xi) = S^+(\xi, \theta_{22} - \theta_{21})$$

$$M_{1k}^+(\xi) = -Q_{1k}^+(\xi) = -2 \sin [\theta_{1k} + \xi \theta_{1m}] \sin \xi (\theta_{1m} - \theta_{1k}) + \\ + 2\xi \sin (\xi \theta_{1k} + \theta_{1m}) \sin (\theta_{1k} - \theta_{1m})$$

$$M_{21}(\xi) = -Q_{21}(\xi) = q_{21}(\xi)$$

$$M_{22}^+(\xi) = -Q_{22}^+(\xi) = \sin(\xi - 1) \theta_{22}$$

$$M_{22}^-(\xi) = -Q_{22}^-(\xi) = 2 \sin(\theta_{22} + \xi \theta_{21}) \sin \xi (\theta_{22} - \theta_{21}) + \\ + 2\xi \sin(\xi \theta_{22} + \theta_{21}) \sin(\theta_{22} - \theta_{21})$$

$$N_{1k}^+(\xi) = P_{1k}^+(\xi) = 2 \sin \xi (\theta_{1m} - \theta_{1k}) \cos (\xi \theta_{1m} + \theta_{1k}) + \\ + 2\xi \sin(\theta_{1m} - \theta_{1k}) \cos(\theta_{1m} + \xi \theta_{1k})$$

$$N_{21}(\xi) = P_{21}(\xi) = \mu_{21}(\xi)$$

$$N_{22}^+(\xi) = P_{22}^+(\xi) = 2 \sin \xi (\theta_{21} - \theta_{22}) \cos (\xi \theta_{21} + \theta_{22}) + \\ + 2\xi \sin(\theta_{21} - \theta_{22}) \cos(\xi \theta_{22} + \theta_{21})$$

$$N_{22}^-(\xi) = P_{22}^-(\xi) = -\cos(\xi - 1) \theta_{22}$$

$$a_{1k}^+(\xi) = 4\Delta_{1m} (-1)^k \cos(\xi - 1) \theta_{1k} + (-1)^m [S_{1m}^+ \beta_{1k} - C_{1m} \alpha_{1k}]$$

$$b_{1k}^+(\xi) = (-1)^m [S_{1m}^+ \alpha_{1k} + C_{1m}^+ \beta_{1k}] - 4(-1)^k \Delta_{1m} \sin(\xi - 1) \theta_{1k}$$

$$a_{21}(\xi) = -S^+(\theta_{22} - \theta_{21}) \cos(\xi - 1) \theta_{21} - S_{21} \mu_{21} - C_{21} \theta_{21}$$

$$b_{21}(\xi) = S^+(\theta_{22} - \theta_{21}) \sin(\xi - 1) \theta_{21} + S_{21} \mu_{21} - C_{21} \theta_{21}$$

$$a_{22}^{(2)}(\xi) = - [C_{21} \sin(\xi + 1) \theta_{22} - S_{21} \cos(\xi + 1) \theta_{22}] - 4 \sin^2 \xi \theta_{21} \sin(\xi - 1) \theta_{22}$$

$$a_{21}^{(2)}(\xi) = 2\gamma C_{21} - \beta_{22}^2 S_{21} + 4\Delta_{21} \cos(\xi - 1) \theta_{21}$$

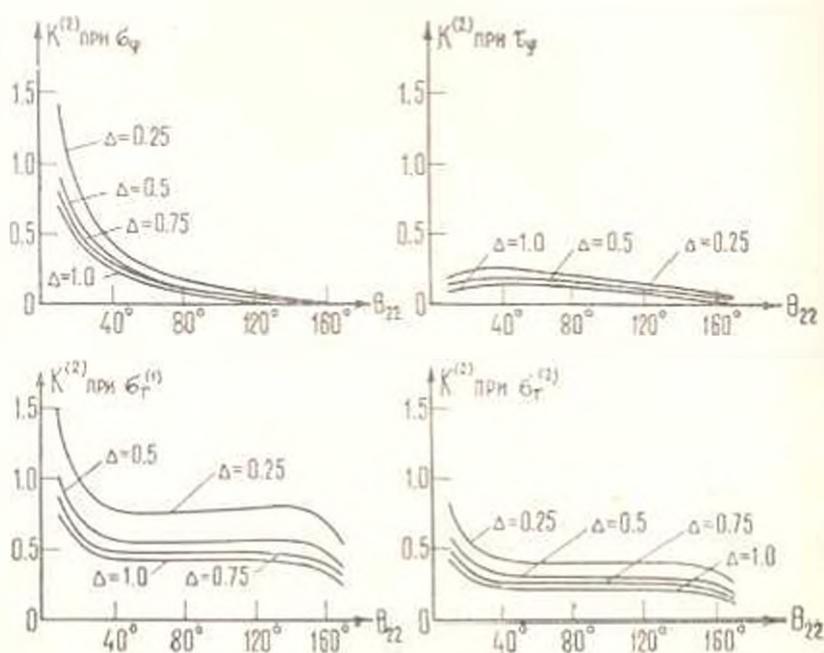
$$b_{22}^{(2)}(\xi) = - [S_{21} 2\gamma - \beta_{22}^2 C_{21} + 4\Delta_{21} \sin(\xi - 1) \theta_{22}]$$

$$b_{21}^{(2)}(\xi) = C_{21} \cos(\xi + 1) \theta_{22} - S_{21} \sin(\xi - 1) \theta_{21} + 4 \sin^2 \xi \theta_{21} \cos(\xi + 1) \theta_{22}$$

3. В качестве числового примера рассмотрим бесконечную составную полосу с полубесконечной трещиной, когда материалы соединены под углом (фиг. 4), а также составные области, представленные на фиг. 8—11.



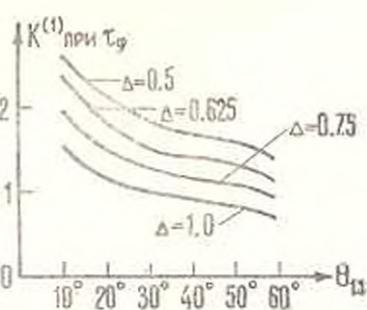
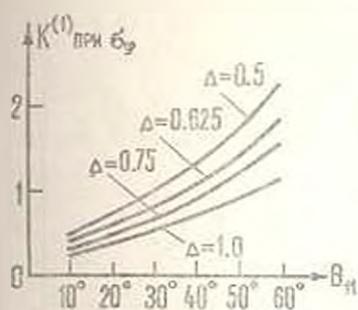
Фиг. 4.



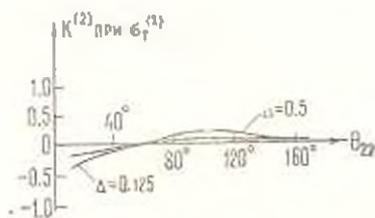
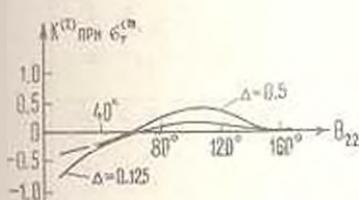
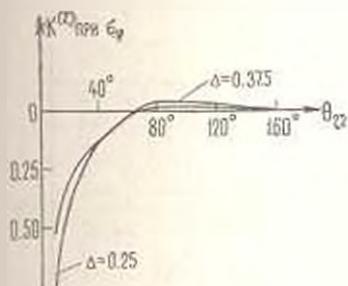
Фиг. 5.

Расчеты выполнены на ЭВМ «ЕС 1022». Для всех областей принято $E_2/E_1 = 2$, $\nu_1 = 0.33$, $\nu_2 = 0.25$, а также принято, что внешние нагрузки приложены в виде сосредоточенных сил, действующих на расстоянии «с» от ближайшего угла, то есть

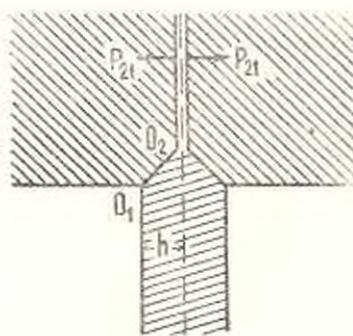
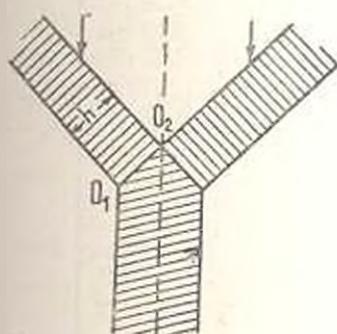
$$f_{nA}(r_n) = P_{nA} \delta(r_n - c), \quad g_{nA}(r_n) = Q_{nA} \delta(r_n - c)$$



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 9.

θ_{11}	ξ_{11}	ζ_{21}	η_{11}
10°	0.9125	0.4823	60
20°	0.8777	0.4655	70
30°	0.8793	0.4497	80°
40°	0.9043	0.4356	90°
50°	0.9430	0.4243	100°

№№ фиг.	θ_{11}	$-\theta_{12}$	$-\theta_{21}$	θ_{22}	ξ_{11}	ζ_{21}
8	90°	135°	90°	90°	1,658	0,434
9	135°	135°	135°	45°	0,557	0,429
10	120°	180°	40°	90°	0,50	1,429
10	100°	200°	60°	70°	0,491	0,422
10	80°	220°	100°	50°	0,469	0,430
11	150°	120°	30°	60°	0,571	0,411

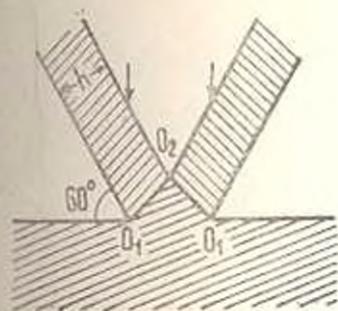
Таблица 1

α_{11}	β_{21}	θ_{11}	α_{11}	β_{21}	θ_{11}	α_{11}	β_{21}
0,9821	0,4170	110°	—	0,4451	160°	—	0,4971
—	0,4144	120°	—	0,4582	170°	—	0,4996
—	0,4166	130°	—	0,4709			
—	0,4231	140°	—	0,4822			
—	0,4330	150°	—	0,4912			

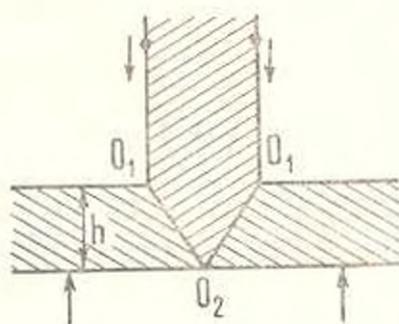
Таблица 2

$K^{(1)}$ при				$K^{(2)}$ при			
σ	σ	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_r^{(2)}$	σ	σ	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_r^{(2)}$
-0,288	-0,155	0,175	-0,109	-0,100	0,127	-0,193	0,104
0,165	0,022	0,145	0,085	0,206	0,137	0,421	0,226
0,227	-0,078	0,420	-0,227	0,025	0,162	0,132	0,068
-0,182	-0,095	0,493	-0,260	0,020	0,181	0,071	0,037
-0,144	-0,087	0,544	-0,283	0,006	0,201	0,025	0,003
-0,148	0,061	0,126	-0,074	-3,899	0,267	-6,03	-3,308

В табл. 1. приведены значения наименьших по модулю корней ξ_{11} и ξ_{21} (для которых $|\operatorname{Re} \xi_{p1}| < 1$) соответственно функций $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$ для полосы с полубесконечной трещиной (фиг. 4), а в табл. 2 — для областей, изображенных на фиг. 8—11.



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Для различных точек приложения внешних нагрузок (то есть различных $\Delta = c/h$, см. фиг. 4—11) и зависимости от угла наклона линии соединения материалов первые коэффициенты в разложениях (1.23), то есть коэффициенты интенсивности концентрации напряжений $K^{(p)}$ ($p = 1, 2$) у полюсов O_1 и O_2 .

Результаты вычислений для бесконечной полосы приведены на фиг. 5—7. при этом фиг. 5 соответствует случаю приложения нагрузок, когда $P_{11} = -1$, а остальные нагрузки равны нулю, фиг. 6 и 7 — случаю, когда $Q_{11} = 1$, $Q_{22} = -1$, а остальные силы равны нулю.

Из фиг. 5 видно, что коэффициент концентрации $K^{(2)}$ у полюса O_2 при $\xi_1, \xi_2, \xi_1^{(1)}$ и $\xi_2^{(2)}$ в пределах изменения угла θ_{22} от 60° до 140° практически остается постоянным. Из фиг. 6 имеем, что коэффициент концентрации $K^{(1)}$ у полюса O_1 при ξ_1 при изменении угла θ_{11} от 10° до 60° минимальное значение принимает при $\theta_{11} = 10^\circ$, а $K^{(1)}$ при ξ_2 — при $\theta_{11} = 60^\circ$.

Заметим, что в обоих случаях значения коэффициентов $K^{(p)}$ ($p = 1, 2$) при удалении точки приложения внешних нагрузок, то есть при увеличении отношения $\Delta = c/h$, до значения $\Delta = 1$, по абсолютному значению уменьшаются. Из фиг. 7 следует, что коэффициенты концентрации $K^{(2)}$ при ξ_1 и ξ_2 получаются минимальными, когда θ_{22} принимает значения, большие 60° , а коэффициенты концентрации $K^{(1)}$ при $\xi_1^{(1)}$ и $\xi_2^{(2)}$ получают минимальные значения при изменении угла θ_{22} в пределах от 50° до 70° и свыше 130° .

В табл. 2 приведены значения этих же коэффициентов для областей, изображенных на фиг. 8—11, для $\Delta = 1$.

Отметим, что аналогичным, как в данной статье, образом можно рассмотреть несимметричные задачи.

