

Н. В. БАНИЧУК, А. Д. ЛАРИЧЕВ

### ОПТИМИЗАЦИЯ БАЛОК С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ОСНОВАНИЯ

В данной работе рассматривается задача определения формы балки на упругом основании. При фиксированном объеме материала максимизируется изгибная жесткость. Выводятся необходимые условия оптимальности и с их помощью проводятся аналитические исследования и численные расчеты. Изучается влияние упругости основания на оптимальные формы балок. Ранее задачи оптимизации стержней с учетом упругости заделки рассматривались в [1, 2].

§ 1. *Постановка задачи и условие оптимальности.* Рассмотрим в прямоугольной системе координат  $xu$  задачу о равновесии балки переменной толщины  $h=h(x)$ , лежащей на упругом основании ( $y \geq 0$ ) и шарнирно закрепленной в точках  $x = \pm l, y = 0$ . Балка нагружена распределенной нагрузкой  $q(x)$ . Возникающее распределение прогибов балки обозначим через  $u(x)$ . Предполагается, что реакция основания в точке  $x$  пропорциональна величине прогибов  $u(x)$ . Распределение прогибов находится из решения краевой задачи для уравнения равновесия

$$A_m (h^m u_{xx})_{xx} + Cu = q \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$(u)_{x=\pm l} = (h^m u_{xx})_{x=\pm l} = 0 \quad (1.2)$$

где константа  $C$  — жесткость основания, а  $m$  — параметр, определяющий структуру поперечного сечения балки. Для сплошных балок прямоугольного поперечного сечения переменной толщины  $h$  и постоянной ширины  $b$ , значение  $m$  равно 3, а  $A_3 = Eb^3/12$ . Для трехслойных балок прямоугольного поперечного сечения  $m = 1$ ,  $A_1 = EN^2 b^3/4(1-\nu^2)$ , где  $N$  — постоянная толщина среднего слоя. Переменная  $1/2 h(x)$  в последнем случае ( $m = 1$ ) имеет смысл толщины внешних армирующих слоев.

В качестве функционала задачи примем «податливость» упругой системы [3, 4]

$$K = \int_{-l}^l q u dx \quad (1.3)$$

Распределение толщины по балке выбирается в качестве искомой управляющей функции, причем рассматриваются такие распределения  $h(x)$ , для которых удовлетворяется изопериметрическое условие

$$\int_{-l}^l h(x) dx = V \quad (1.4)$$

где  $V$  — заданная константа.

Сведем задачу оптимизации (1.1)—(1.4) к вариационной задаче без дифференциальных связей. Для этого воспользуемся известным вариационным принципом, согласно которому действительное распределение прогибов  $u(x)$  доставляет минимум функционалу [5].

$$J = \int_{-l}^l (A_m h^m u_{xx}^2 + C u^2 - 2 q u) dx \quad (1.5)$$

Для действительного распределения прогибов справедливо также равенство  $K = -J$ . Учитывая равенство  $K = -J$  и вариационный принцип, получаем  $K = -\min_u J$ . Данная формула позволяет свести сформулированную выше задачу оптимизации (1.1)—(1.4) к вариационной задаче без дифференциальных связей

$$K_* = \min_h K = -\max_h \min_u J \quad (1.6)$$

Следует заметить, что минимум по  $u$  в (1.6) разыскивается для всех  $h$ , удовлетворяющих граничным условиям  $u(-l) = u(l) = 0$  (второе граничное условие (1.2) является естественным для функционала  $J$ ), а максимум ищется при изопериметрическом условии (1.4).

§ 2. Исследование условий оптимальности. Выпишем выражение для первой вариации функционала  $J$  через вариации  $\delta u$ ,  $\delta h$  и воспользуемся необходимым условием экстремума  $\delta J = 0$ . Из условия  $\delta J = 0$  и произвольности вариации  $\delta u$  ( $-l < x < l$ ) вытекает, что  $u$  удовлетворяет уравнению (1.1) и, кроме того, экстремальные распределения  $u$  и  $h$  подчинены равенству

$$\int_{-l}^l h^{m-1} u_{xx}^2 \delta h dx = 0 \quad (2.1)$$

Вариации  $\delta h$  в силу изопериметрического условия (1.4) должны удовлетворять ограничению

$$\int_{-l}^l \delta h dx = 0 \quad (2.2)$$

Из (2.1), (2.2) получаем искомое условие оптимальности

$$h^{m-1} u_{xx}^2 = \lambda^2 \quad (2.3)$$

Здесь  $\lambda^2$  — неизвестная постоянная (множитель Лагранжа), для определения которой служит изопериметрическое условие (1.4).

С использованием условия (2.3) приходим к замкнутой краевой задаче (1.1), (1.2), (1.4), (2.3), служащей для определения функций  $u$  и  $h$ . Соотношение (2.3) получено из условия стационарности интеграла  $J$  и, следовательно, представляет собой необходимое условие минимума функционала  $K$ .

В случае  $m = 1$  можно показать, что это условие является не только необходимым, но и достаточным [6].

§ 3. *Случай сосредоточенной нагрузки.* Если прикладываемая к балке нагрузка представляет собой сосредоточенную силу  $P\delta(x-x_0)$ , действующую в точке  $x = x_0$ , то податливость  $K = Pu(x_0)$  и сформулированная задача оптимизации сводится к минимизации величины прогиба  $u(x_0)$ . Предположим, что сила приложена в центре, то есть  $x_0 = 0$ . Для удобства, вместо задачи минимизации прогиба в этой точке при заданной нагрузке  $P$  рассмотрим двойственную ей задачу. Максимальное значение силы обозначим через  $P_*$ . В двойственной задаче величина прогиба в точке  $x_0 = 0$  предполагается заданной, то есть  $u(0) = v$  ( $v$  — заданная константа), а максимизируется значение силы  $P$ , вызывающей данный прогиб балки.

С учетом симметрии относительно точки  $x = 0$  приходим к вариационной задаче

$$P_* = \max_P \min_u \frac{2}{v} \int_0^l (A_m h^m u_{xx}^2 + Cu^2) dx \quad (3.1)$$

Внутренний минимум по  $u$  в (3.1) разыскивается на классе функций  $u$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$u(0) = v, \quad u(l) = 0, \quad (h^m u_{xx})_{x=l} = 0 \quad (3.2)$$

$$u_x(0) = 0 \text{ при } h(0) \neq 0, \quad (h^m u_{xx})_{x=0} = 0 \text{ при } h(0) = 0 \quad (3.3)$$

Краевые условия (3.3) означают, что если толщина балки в точке  $x = 0$  отлична от нуля, то распределение прогибов в точке  $x = 0$  является гладкой функцией.

Исследование задачи (3.1)–(3.3) при  $C = 0$  содержится в работе [7].

§ 4. *Применение метода возмущений.* Для решения задачи оптимизации (3.1)–(3.3) воспользуемся методом возмущений и определим оптимальные формы сплошных балок ( $m = 3$ ) в случае малых жесткостей основания, то есть при  $C = \epsilon \ll 1$ . Представим искомые величины в виде рядов по малому параметру

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \dots, \quad h = h_0 + \epsilon h_1 + \dots, \quad P = P_0 + \epsilon P_1 + \dots \quad (4.1)$$

Аналогичное разложение используется и для  $\lambda$ . Подставим выражения (4.1) для  $u$ ,  $h$ ,  $P$ ,  $\lambda$  в основные соотношения задачи (уравнение равновесия  $A_m(h^3 u_{xx})_{xx} + Cu = 0$  ( $0 < x < l$ ), условие оптимальности, граничные условия, выражение для функционала и изопериметрическое условие) и

приравняем члены при одинаковых степенях  $v$ . Для отыскания величин нулевого приближения, отвечающих случаю отсутствия реакции основания ( $C = 0$ ), получим систему уравнений [7], решение которой имеет вид

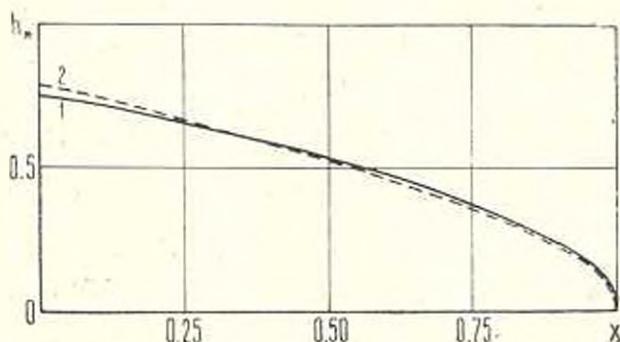
$$\begin{aligned} u_0 &= v(1-x/l)(3-2\sqrt{1-x/l}), \quad h_0 = 3/4V(1-x/l)^{1/2}l^{-1} \\ P_0 &= 81vA_3V^3/64l^6, \quad \lambda_0 = -9vV/8l^3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

С учетом (4.2) красную задачу для отыскания величин первого приближения запишем в виде

$$\begin{aligned} A_3[h_0^2(h_0u_{1xx} + 3h_1u_{1xx})]_{xx} + u_0 &= 0 \quad (0 < x < l) \\ h_1u_{0xx} + h_0u_{1xx} &= \lambda_1 \quad (0 < x \leq l), \quad u_1(0) = 0 \\ u_1(l) = 0, \quad u_{1x}(0) = 0, \quad (u_{1xx}h_0^2 + 3h_1^2h_0u_{0xx})_{x=l} &= 0 \\ \int_0^l h_1 dx &= 0, \quad P_1 = \frac{2}{v} \left( A_3 l^{-1} \lambda_0 V + \int_0^l u_0^2 dx \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Определим величины первого приближения, позволяющие учесть зависимость от параметра  $C = v$ . С этой целью проинтегрируем уравнение (4.3) и определим четыре постоянные интегрирования и константу  $\lambda_1$  из изопериметрического условия и четырех граничных условий, приведенных в (4.3). Получим поправки к распределению толщин и значению силы в первом приближении

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{8l^6}{27A_3V^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2} \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{16}{35} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2}\right) - \frac{9}{35} \right] \\ P_1 &= \frac{8}{7} vl, \quad \lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$



Фиг. 1.

На фиг. 1 в безразмерных переменных  $x' = x/l$ ,  $h' = hl/V$  показаны распределения толщин оптимальных балок, причем кривым с номерами 1, 2 отвечают значения параметра  $C = 0$ ; 0.4. Из приведенных графиков и формулы (4.4) для  $h$  видно, что при увеличении параметра  $C$  увеличи-

вается толщина оптимальной балки и ее средней части, а толщина балки у ее концов уменьшается (происходит заострение). Решение задачи для больших значений  $C$  проводилось численно и результаты расчетов приведены в § 6.

§ 5. Аналитическое решение при  $m=1$ . Условие оптимальности при  $m=1$  примет вид  $u_{xx}^2 = \lambda^2$ . Отсюда следует, что распределение прогибов для оптимальной балки удовлетворяет условию  $u_{xx} = \pm \lambda$ . Для оптимального решения таким образом допускаются разрывы второй производной функции прогибов. Исследуем сначала решение, для которого на всем интервале изменения  $x$  ( $x \in [0, l]$ ) функция  $u_{xx}$  не претерпевает разрывов и справедливо равенство  $u_{xx} = \lambda$ . Кроме того, будем предполагать  $u_x(0) = 0$ , что отвечает случаю  $h(0) \neq 0$ . На основании соотношения  $u_{xx} = \lambda$  с учетом граничных условий  $u(0) = v$ ,  $u(l) = 0$ ,  $u_x(0) = 0$  и формулы (3.1), получим

$$u = v \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2} P_0 = \frac{4v}{l^2} \left(A_1 V + \frac{4}{15} C l^3\right) \quad (5.1)$$

Отметим, что условие оптимальности, граничные условия и распределение прогибов (5.1) не зависят от  $C$ . Подставим далее найденное выражение для  $u$  (5.1) в уравнение  $A_1(hu_{xx})_{xx} + Cu = 0$  ( $0 < x < l$ ), являющееся уравнением Эйлера для функционала (3.1). Получим уравнение второго порядка, служащее для определения функции  $h(x)$ . Для вычисления постоянных интегрирования используем изопериметрическое равенство (1.4) и условие  $h(l) = 0$ , вытекающее из соотношений  $u_{xx} = \lambda$ ,  $(hu_{xx})_{x=l} = 0$ . Выполняя интегрирование и вычисление констант, будем иметь

$$h = \frac{Cl^2}{24A_1} \left[ -\left(\frac{x}{l}\right)^4 + 6\left(\frac{x}{l}\right) - 5 \right] + \left(\frac{4Cl^2}{15A_1} + \frac{V}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (5.2)$$

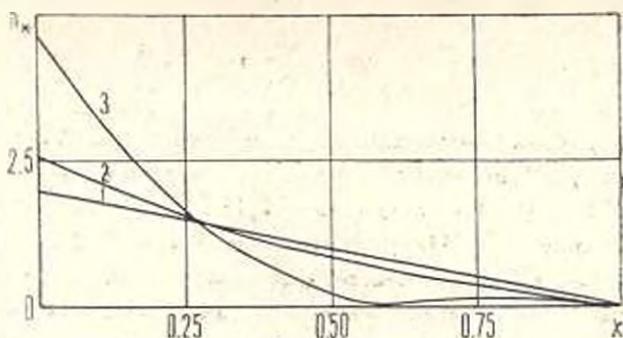
При отыскании решения (5.1), (5.2) предполагалось, что  $h(0) \neq 0$ ,  $u_x(0) = 0$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $h(0) = 0$  и вместо условия  $u_x(0) = 0$  следует использовать граничное условие  $(hu_{xx})_{x=0} = 0$ . Не приводя здесь соответствующих выкладок, укажем, что получающееся при этом значение функционала меньше значения  $P_0$ , определяемого формулой (5.1). Поэтому решение, отвечающее случаю  $h(0) = 0$ , обеспечивает меньшую «жесткость» и не является оптимальным.

Исследуем область применимости решения (5.1), (5.2). Для этого заметим, что распределение толщин балки должно по смыслу задачи удовлетворять условию  $h(x) \geq 0$ , которое не учитывалось при построении решения. Накладывая это ограничение на решение (5.2) и проводя непосредственное исследование зависимости  $h$  от параметра  $C$ , получим следующее условие неотрицательности  $h$ :  $C \leq C_0 \equiv 15A_1 V^2$ . Приходим к выводу, что формулы (5.1), (5.2) определяют оптимальное решение при  $C \leq C_0$ .

При отыскании оптимального решения для  $C > C_0$  следует допустить наличие разрывов у функции  $u_x$ . В предполагаемых точках  $x_i$  разрыва  $u_{,x}$  оптимальное решение должно удовлетворять условиям:

$$h(x_i) = 0, h_{,x}(x_i - 0) = -h_{,x}(x_i + 0), u_x(x_i - 0) = u_x(x_i + 0)$$

С использованием указанных дополнительных соотношений строились аналитические решения задач оптимизации для  $C > C_0$ , а при помощи условия  $h(x) \geq 0$  определялись интервалы изменения значений  $C$ , для которых построенные решения являются оптимальными. Опустим здесь из-за краткости изложения выкладки и получающиеся формулы и приведем лишь некоторые графики. Используем при этом безразмерные переменные  $x' = x/l$ ,  $h' = 2hl/V$ ,  $C' = 2CP/A_1V$ ,  $P' = P/A_1V$  (штрихи опускаем). На фиг. 2 кривыми 1, 2, 3 показаны оптимальные распре-

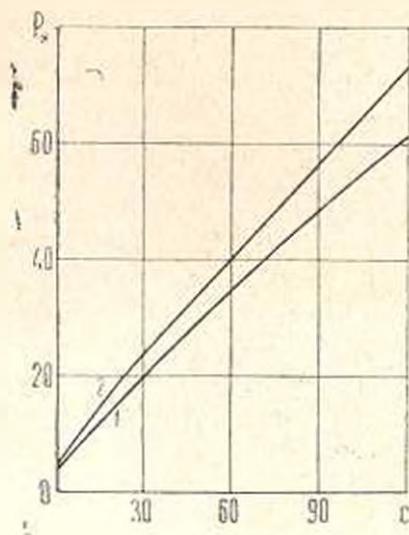


Фиг. 2.

деления толщины армирующих слоев балок для случаев  $C = 0, 10, 83$ . При отсутствии реакции основания ( $C = 0$ ) оптимальное распределение толщин является линейным. С увеличением  $C$ , как и для случая сплошных балок, происходит увеличение  $h$  в центре и уменьшение (заострение) у концов. При  $C > C_0$  толщина  $h$  обращается в нуль также в некоторой внутренней точке  $x_i$  интервала  $[0, 1]$  и оптимальная балка ( $-1 \leq x \leq 1$ ) „распадается“ на три балки, соединенные „шарнирами“. Для кривой 3, отвечающей случаю  $C = 83$ ,  $x_i = 0.6$ . Некоторые вопросы, связанные с появлением внутренних сингулярных точек, применительно к другим задачам оптимизации рассматривались ранее в работах [8, 9]. Решение задачи с одной точкой разрыва  $u_x$  для полубалки (двумя для балки) оказывается оптимальным при  $C_0 < C < C_1 \approx 417.738$  ( $C_1 \approx 208.869 A_1 V l^{-5}$  в размерных переменных). График зависимости  $P_*$  от  $C$  представлен на фиг. 3 кривой 1.

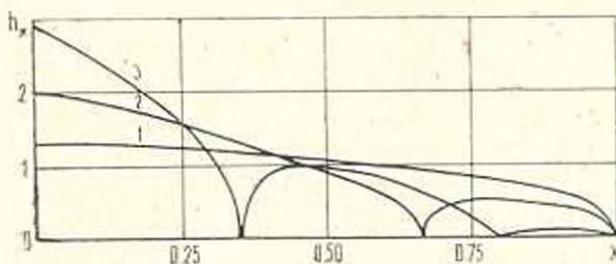
§ 6. Численное решение в случае  $m = 3$ . Для расчета сплошных балок ( $m = 3$ ) использовался алгоритм последовательной оптимизации, примененный ранее в работе [10] и учитывающий условие  $h(x) \geq 0$ . Алгоритм основывается на варьировании управляющей функции  $h$  и решении

«прямых» задач, заключающихся в отыскании функции прогибов для каждого текущего распределения толщин, то есть для каждой реализации  $h$ . В данном алгоритме для решения «прямых» задач используется метод локальных вариаций с переменными шагами паркирования, а для определения приближений управляющих функций  $h$  применяется метод проектиро-



Фиг. 3.

вания градиентов. В проведенных расчетах отрезок  $[0,1]$  разбивался на 50 равных частей, а критерием окончания счета служило условие  $|P(u^{j+1}, h^{j+1}) - P(u^j, h^j)| < 10^{-3}$ , где  $j$  — номер приближения. Для удобства проведения расчетов использовалось обезразмеривание  $C' = 8CF/A_2V^2$ ,  $P' = 4P/A_2V^2v$ , а безразмерные величины  $x'$ ,  $u'$ ,  $h'$  вводились теми же формулами, что и в § 5. Результаты численного расчета задачи при  $C=0$  сравнивались с аналитическим решением, полученным в [7], при этом отличие по функционалу не превосходило 1%. Полученные в результате расчетов при  $C=0, 128, 4096$  оптимальные распределения толщин для половины балки показаны на фиг. 4 кривыми 1, 2, 3. Как видно из графика, для  $C=128$  опти-



Фиг. 4.

мальное распределение толщин обращается в нуль во внутренней точке интервала  $[0, 1]$ , а при  $C=4096$  на указанном интервале по-

являются две точки, где  $h$  обращается в нуль (оптимальная балка „распадается“ на пять балок). Зависимость  $P_*$  от  $C$  представлена кривой 2 на фиг. 3.

Институт проблем  
механики АН СССР

Получила 14 I 1980

Ն. Վ. ԲԱՆԻՉՈՒԿ, Ա. Գ. ԼԱՐԻՉԵՎ

ՀԻՄԲԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ ՀԵՏԱՆՆԵՐԻ  
ՈՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՆ

Ս ւ մ փ ր ք և ռ ւ Վ

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է առաձգական հիմքի վրա դրանվող հեծանի ձևի որոշման խնդիրը: Հեծանի նյութի հաստատուն ծավալի դեպքում մարսիմալացվում է ծաման կոշտությունը: Արտածվում են օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները և նրանց օգնությամբ կատարվում են անալիտիկ ուսումնասիրություններ և թվային հաշվարկներ: Հետազոտվում է հիմքի առաձգականության ազդեցությունը հեծանների օպտիմալ ձևերի վրա:

OPTIMAL DESIGN OF THE BEAM ON AN ELASTIC  
FOUNDATION

N. V. BANICHUK, A. D. LARICHEV

S u m m a r y

The problems in optimal design of the beam, taking into account its elastic foundation, are considered. Necessary optimality conditions for beams of maximum rigidity are derived. Analytical and numerical solutions are obtained. Influence of elastic foundation on the optimal forms of the beams are investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Баничук Н. В. Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 4.
2. Gajewski A., Zyczkowski M. Optimal design of elastic columns subject to the general conservative behavior of loading. ZAMP, 1970, 21.
3. Wasitvynski Z. On the equivalence of design principles: minimum potential-constant volume and minimum volume-constant potential. Bull. Acad. Polonaise. Sci. Ser. Sci. Techn., 1966, vol. 14, No. 9.
4. Wasitvynski Z. On the criterion of minimum deformability design of elastic structures; effect of own weight of material. Bull. Acad. Polonaise. Sci., Ser. Sci. Techn., 1966, vol. 14, No. 9.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970, с. 512.

6. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М., «Наука», 1980. с. 255.
7. Баничук Н. В. Об оптимальных формах упругих пластин в задачах изгиба. Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 5.
8. Olhoff N., Taylor J. Designing continuous columns for minimum total cost of material and interior supports. J. Struct. Mech., 1978, vol. 6, No. 4.
9. Bantchak N. V., Karthahoo B. L. On the solution of optimization problems with singularities. Int. J. Solids and Struct., 1977, vol. 13, No. 8.
10. Баничук Н. В., Миронова А. А. Оптимизация частот колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.