ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 5, 1980 Механика

Р. С. МИНАСЯН, Г. А. ПОГОСЯН

РАСТЯЖЕНИЕ ОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО СЛЕГКА ИЗОГНУТОГО БРУСА

В статьях П. М. Риза [1], А. К. Рухадзе [2], Р. С. Минасяна [3, 4, 5], Г. М. Хатиашвили [6] и др. исследуется напряженное состояние слегка изогнутого бруса с осью, представляющей кривую второго порядка при различных видах деформации. В настоящей статье ставится более общая задача — исследовать напряженное состояние при растяжении бруса, ось которого — плоская кривая произвольного порядка.

1. *Постановка задачи.* Отнесем однородный анизотропный брус с одной плоскостью упругой симметрии (13 упругих постоянных) к прямоугольной, прямолинейной системе координат. Примем начало координат в центре тяжести нижнего закрепленного основания, а оси Ox и Oy направим по его главным центральным осям.

Положим, что брус слегка изогнут, ограничен боковой поверхностью

$$F\left(x + \varepsilon\frac{z^n}{n},\ y\right) = 0 \tag{1.1}$$

и основаниями: нижним $z = 0$, верхним $z = l$; $n \geq 2$ — целое положительное число; ε — настолько малый параметр, что во всех нижеприведенных вычислениях членами с множителем ε^2 пренебрегаем.

Упругие постоянные материала стержня обозначим через A_{ij}. Полагаем, что объемные силы отсутствуют, боковая поверхность F свободна от напряжений, а все внешние силы, приложенные к верхнему основанию, приводятся к растягивающей силе N, приложенной в его центре тяжести и параллельной оси Oz.

Задачу решаем в линейной постановке, то есть полагаем смещения такими, что их компоненты деформаций с достаточной точностью определяются линейными членами, а напряжения не превосходят предел пропорциональности и определяются известными формулами [7]

$$\begin{aligned} \tau_{jj} &= \sum_{i=1}^{3} A_{ji} e_{ii} + A_{j6} e_{12}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad \tau_{44} = \tau_{12} \\ \tau_{i3} &= A_{\alpha\alpha} e_{i3} + A_{45} e_{\gamma 3}, \quad i = 1, 2, \quad \alpha = 4 + i, \quad \gamma = 3 - i \end{aligned} \tag{1.2}$$

причем

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j \tag{1.3}$$

где u_i — смещения: $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Из формул (1.2) легко получить компоненты деформаций

$$e_{ii} = E^{-1}\sum_j \sigma_{ij}\tau_{jj}, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad e_{44} = e_{12}$$

$$e_{3i} = \mu_{3i}^{-1}(\tau_{3i} - \nu_i\tau_{3\gamma}), \quad i = 1,\ 2 \tag{1.4}$$

$$\mu_{3i} = A_{\alpha\alpha} - \nu_i A_{56}, \quad \mu_{31}\nu_2 = \mu_{32}\nu_1, \quad \nu_j = A_{\alpha\alpha}^{-1}A_{56}, \quad \alpha = 4 + i, \quad \gamma = 3 - i$$

В формулах (1.4), как и в нижеприведенных (1.5), σ с одинаковыми индексами следует приписать знак плюс, а с различными — знак минус.

Приведем также зависимости между постоянными A_{ij}, E и σ_{ij}

$$\sum_i A_{ij}\sigma_{ij} = E; \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad \sum_i A_{2i}\sigma_{ji} = 0 \quad j = 1,\ 3,\ 4$$

$$\sum_i A_{1i}\sigma_{ji} = 0; \qquad j = 2,\ 3,\ 4 \qquad \sum_i A_{3i}\sigma_{ji} = 0 \quad j = 1,\ 2,\ 4 \tag{1.5}$$

$$\sum_i A_{4i}\sigma_{ji} = 0 \quad j = 1,\ 2,\ 3$$

причем $\sigma_{33} = 1$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Ниже применяются также обозначения $\sigma_{3i} = \sigma_i$, $\sigma_{4j} = \sigma_j$, $i = 1,\ 2$, $j = 3,\ 4$.

Математически рассматриваемая задача сводится к определению шести компонентов напряжений в области V, занятой брусом, удовлетворяющих однородным уравнениям равновесия

$$\sum_j \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad i,\ j = 1, 2, 3 \tag{1.6}$$

граничным условиям на боковой поверхности F

$$\sum_j \tau_{ij}\cos(n,\ x_j) = 0, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3 \tag{1.7}$$

причем n — нормаль к боковой поверхности (внешняя по отношению к области V).

Компоненты деформаций, соответствующие искомым напряжениям τ_{ij}, должны удовлетворять условиям совместности Сен-Венана, а усилия на верхнем основании $z = l$ — приводиться к заданной растягивающей силе N.

2. *Некоторые формулы преобразования.* Введем новую систему координат [1]

$$\xi = x + \varepsilon\frac{z^n}{n}, \qquad \eta = y, \quad \zeta = z \tag{2.1}$$

Тогда рассматриваемый, слегка изогнутый брус в пространстве ξ, η, ζ переходит в призматический, ограниченный боковой поверхностью $F_0(\xi,\ \eta) = 0$, основаниями: нижним $\zeta = 0$, верхним $\zeta = l$ с поперечным сечением S, контур которого L. Брус загружен на верхнем основании центрально приложенной силой N.

Для перехода из пространства x, y, z в пространство ξ, η, ζ с вышеуказанной точностью, используются формулы

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \varepsilon\zeta^{n-1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}$$

$$\cos(n, x_i) = \cos(n, \xi_i), \; \cos(n, z) = \varepsilon\zeta^{n-1}\cos(n, \xi_1), \; i = 1, 2 \tag{2.2}$$

При этом, как в (2.2), так и ниже

$$\xi_1 \equiv \xi, \quad \xi_2 \equiv \eta, \quad \xi_3 \equiv \zeta$$

3. *Растяжение слегка изогнутого бруса.* Решение рассматриваемой задачи в пространстве ξ, η, ζ будем искать в виде [1]

$$u_i = \alpha\left(\sigma_i\xi_i + \frac{1}{2}\sigma_3\xi_\gamma\right) + \alpha\varepsilon u'_i, \quad w = \alpha\zeta + \alpha\varepsilon w', \quad \alpha = J_{11}^{-1}N, \tag{3.1}$$

$$i = 1, 2, \quad \gamma = 3 - i$$

где $J_{11} = ES$ — жесткость бруса при растяжении; u'_i, w' — смещения, выражающие влияние кривизны на деформированное состояние.

Если воспользоваться последовательно формулами (3.1), (2.2), (1.3) и (1.2), с указанной выше точностью получим

$$\tau_{ij} = \alpha\varepsilon\tau'_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \qquad \tau_{33} = \alpha E + \alpha\varepsilon\tau'_{33}$$

$$\tau_{3i} = \alpha\varepsilon(\zeta^{n-1}H_i + \tau'_{3i}), \quad i, j = 1, 2 \tag{3.2}$$

где

$$H_1 = -\left(A_{55}\sigma_1 + \frac{1}{2}A_{56}\sigma_3\right), \quad H_2 = -\left(\frac{1}{2}A_{66}\sigma_3 + A_{56}\sigma_1\right) \tag{3.3}$$

В формулах (3.2) τ'_{ij} — неизвестные напряжения, соответствующие смещениям u'_i, w' *.

Используя формулы перехода (2.2) и компоненты напряжений (3.2), уравнения равновесия (1.6) и граничные условия (1.7), соответственно представятся так:

$$\sum_i \frac{\partial\tau'_{ji}}{\partial\xi_i} + (n-1)\zeta^{n-2}H_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.4}$$

$$\sum_i \tau'_{ji}\cos(n, \xi_i) = 0, \quad i, j = 1, 2 \tag{3.5}$$

$$\sum_i \tau'_{3i} + \zeta^{n-1}[(E + H_1)\cos(n, \xi) + H_2\cos(n, \eta)] = 0 \tag{3.6}$$

В уравнениях (3.4) и (3.6) H_1 и H_2 имеют значения (3.3), а $H_3 = 0$. Итак, задача свелась к определению шести компонентов напряжений τ'_{ij}, удовлетворяющих в области, занятой брусом (в пространстве ξ, η, ζ)

---

* Термины смещения и напряжения здесь применяются условно, то есть в действительности указанные величины будут соответственно смещениями и напряжениями, будучи умноженными на $\alpha\varepsilon$.

уравнениям равновесия (3.4) и граничным условиям (3.5) и (3.6). При этом, компоненты деформаций, соответствующие напряжениям σ_{ij} должны удовлетворять также шести условиям совместности Сен-Венана.

Полученную задачу решаем полуобратным методом. Зададимся общим видом искомых напряжений, вводя в них неизвестные функции и неизвестные постоянные. За счет неизвестных функций будут удовлетворены перечисленные выше условия, а за счет постоянных постараемся обеспечить разрешимость граничных задач, которые получим.

Итак, примем

$$\sigma_{ii} = \sum_k \zeta^k T_{ii}^{(k)} + k_1 (2-i) E \zeta^{k} \xi, \qquad \sigma_{12} = \sum_k \zeta^k T_{12}$$

$$\sigma_{33} = \sum_k \zeta^k \left[\sigma_{33}^{(k)} - k_2^{-1} E \zeta^2 \left(a^{(k_2)} - \sum_j p_j^{(k)} \xi_j\right)\right] - E(\alpha^* + \beta_1^* \xi + \beta_2^* \eta)$$

$$\sigma_{3i} = \zeta^{k_i} [E(i-2) - H_i] + \sum_k \zeta^{k_i} \left\{ \frac{\partial \Psi_{ii}}{\partial \xi_i} + L_i \omega^{(k_i)} + \frac{1}{2} a^{(k_i)} E \xi_i + \right.$$

$$\left. + c^{(k)} \left[A_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} + \varkappa \xi_\gamma \right) + A_{36} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\gamma} - \varkappa \xi_i \right) \right] \right\} \tag{3.7}$$

$$k_i = k + i, \quad \alpha = 4 + i, \quad \gamma = 3 - i, \quad \varkappa = (-1)^i, \quad i, j = 1, 2$$

где $k = n - 2(l+1)$, $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$, наибольшее значение l соответствует $k = 0$ при n четном и $k = -1$ при n нечетном (в формулах $k \geqslant 0$ и $k_1 \geqslant 0$).

В (3.7) введены обозначения

$$T_{ii} = k_1 \left(\sigma_{ii}^* + \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial \xi_\gamma^2} \right), \quad T_{12} = k_1 \left(\sigma_{12}^* - \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial \xi \partial \eta} \right), \quad \sigma_{33}^{(k)} = \alpha_1 T_{11}^{(k)} + \alpha_2 T_{22}^{(k)} + T_{33}^{(k)}$$

$$\sigma_{ii}^* = -c^{(k)} \left(A_{\alpha\alpha} \varphi - \frac{1}{2} \varkappa A_{36} \xi_i^2 \right) - \frac{1}{4} a^{(k_1)} E \xi_i^2 - \Psi_{ii} - A_{\alpha\alpha} \omega^{(k_1)}$$

$$\sigma_{12}^* = -c^{(k)} \left[A_{66} \varphi - \frac{1}{2} (A_{55} \eta^2 - A_{44} \xi^2) \right] - A_{36} \omega^{(k_1)}$$

$$T_{33} = k_1 E \left\{ \sum_i p_i^{(k)} \xi^{(i)} - \omega^{(k_1)} + \varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} a^{(k_1)} \sum_i \left[(E \beta_{3i}^{-1} - 2\alpha_i) \xi_i^2 - \nu_i \beta_{3i} \xi \eta \right] - \frac{1}{2} a^{(k_1)} \alpha_3 \xi \eta \right\}$$

$$\frac{\partial \Psi_{ii}}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^{2} p_j^{(k)} (A_{\alpha\alpha} \sigma_{3i}^{(j)} + A_{36} \sigma_{3\gamma}^{(j)}) + U_{3i}^{(k+2)}, \qquad \psi^{(i)} = \chi^{(i)} - \xi_i \xi_\gamma^2$$

причем

$$\sigma_{31}^{(1)} = \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} (\alpha_1 \xi^2 - \alpha_2 \eta^2), \quad U_{3i}^{(k)} = A_{\alpha\alpha} U_i^{(k)} + A_{36} U_\gamma^{(k)}$$

$$\tau_{32}^{(1)} = \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\xi} - c_2\xi\eta - \frac{1}{2}c_1\xi^2, \qquad L_i = A_{ii}\frac{\partial}{\partial\xi_i} + A_{56}\frac{\partial}{\partial\xi_\gamma}$$

$\tau_{31}^{(2)}$ и $\tau_{32}^{(2)}$ получаются соответственно из $\tau_{32}^{(1)}$ и $\tau_{31}^{(1)}$ перестановкой ξ и η, c_1 и c_2 и заменой верхнего индекса 1 на 2.

$$U_i^{(k)} = \int\left\{ e_i^{(k)} d\xi_i + d\xi_\gamma \int\left[\frac{\partial e_i^{(k)}}{\partial\xi_\gamma} d\xi_i + \left(\frac{\partial e_{12}^{(k)}}{\partial\xi_i} - \frac{\partial e_\gamma^{(k)}}{\partial\xi_i} \right) d\xi_\gamma \right]\right\} \qquad (3.8)$$

при этом $e^{(k)}$ имеют значения

$$e_i^{(k)} = kE^{-1}(\alpha_{ii}T_{ii}^{(k)} - \alpha_{i\gamma}T_{\gamma\gamma}^{(k)} - \alpha_{i3}T_{12}^{(k)} - a_i T_{33}^{(k)}) + (n-1)t_{ii}$$

$$e_{12}^{(k)} = kE^{-1}(-\alpha_{13}T_{11}^{(k)} - \alpha_{23}T_{22}^{(k)} + \alpha_{33}T_{12}^{(k)} - a_3 T_{33}^{(k)}) - (n-1)t_{12}$$

$$i = 1,\ 2, \quad \gamma = 3 - i$$

$$\alpha_{ii} = a_{ii} - a_i^2, \quad \alpha_{12} = a_{12} + a_1 a_2, \quad \alpha_{i3} = a_i a_3 + a_{i4}, \quad \alpha_{33} = a_3^2 - a_{44}$$

где t_{ij} при наибольшем значении k, то есть при $k = n - 2$ определяются формулами

$$t_{ii} = a_{1i}\xi, \quad i = 1,\ 2, \quad t_{12} = -a_{14}\xi$$

при всех остальных значениях k $t_{ij} = 0$.

В решении (3.7) φ и $\chi^{(i)}$ — неизвестные функции из теории напряженного состояния однородного анизотропного призматического бруса [7], причем φ — функция кручения, $\chi^{(1)}$ — функция изгиба в плоскости $\xi O\zeta$, а $\chi^{(2)}$ — в плоскости $\eta O\zeta$.

Неизвестными в решении являются функции $\Phi^{(k)}$ и $w^{(k)}$ и постоянные $a^{(k)}$, $p_i^{(k)}$, $c^{(k)}$, α^*, β_1^*, β_2^*.

Компоненты напряжений (3.7) удовлетворяют первым двум уравнениям равновесия (3.4), а из третьего получим

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial\xi_i}(L_i w^{(k)}) = -\left(k_2\sigma_{33}^{(k)} + \sum_i \frac{\partial U^{(k)}}{\partial\xi_i} \right), \quad i = 1,\ 2 \qquad (3.9)$$

Вычислив по формулам (1.4) компоненты деформаций, соответствующие напряжениям (3.7), и подставив их в условия совместности Сен-Венана, убеждаемся, что последние будут удовлетворены, если функции $\Phi^{(k)}$ в области S будут определяться условием

$$\sum_i\left(\alpha_{ii}\frac{\partial^4\Phi^{(k)}}{\partial\xi_\gamma^4} + 2\alpha_{i3}\frac{\partial^4\Phi^{(k)}}{\partial\xi_i\partial\xi_\gamma^3} \right) + (\alpha_{33} - 2\alpha_{12})\frac{\partial^4\Phi^{(k)}}{\partial\xi^2\partial\eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\Big(k_1^{-1}a_3 T_{33}^{(k)} +$$

$$+ \alpha_{33}\tau_{12}^* - \sum_i \alpha_{i3}\tau_{ii}^* \Big) + \sum_i \Big[\frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma^2}(\alpha_{ii}\tau_{ii}^* - \alpha_{12}\tau_{\gamma\gamma}^* - \alpha_{i3}\tau_{12}^*) -$$

$$- k_1^{-1}a_i\frac{\partial^2 T_{33}^{(k)}}{\partial\xi_\gamma^2} \Big] = 0, \quad i = 1,\ 2 \qquad (3.10)$$

Перейдем к граничным условиям. Подставляя напряжения (3.7) в условия (3.6), получим

$$\sum_j L_j \omega^{(k_j)} = -\left(\sum_j \frac{1}{2} a^{(k_j)} E\xi_j + U_{3i}^{(k_i)}\right)\cos(n, \xi_i), \quad i = 1, 2 \qquad (3.11)$$

а из (3.5) следует

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \xi_i} = (-1)^i \int [(\tau_{ii}^{*} + f)\cos(n, \xi_i) + \tau_{i\gamma}^{*}\cos(n, \xi_\gamma)]\, dS \qquad (3.12)$$

$$i = 1, 2, \quad \gamma = 3 - i$$

где при наибольшем значении $k\ f = (2-i)\ k_i E\xi_i$; при всех остальных значениях $k\ f = 0$.

Итак, определение неизвестных напряжений τ_{ij} свелось к решению плоских гармонических и бигармонических задач. Первые определяются условиями (3.9) в области S и (3.11) на контуре L, вторые — соответственно, условиями (3.10) и (3.12).

Разрешимость гармонических задач обеспечивается постоянными

$$a^{(k_i)} = k_2 J_{ii} \iint \tau_{3i}^{(k_i)}\, d\xi\, d\eta,$$

причем, при наибольшем значении $k\ a^{(k_1)} = a^{(k_2)} = U_{31}^{(k_1)} = U_{32}^{(k_2)} = 0$.

Во всех формулах двойной интеграл берется по площади. Обеспечена также разрешимость бигармонической задачи. Как показывают вычисления $\dfrac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \eta}$ и сама функция $\Phi^{(k)}$ будут однозначны при обходе контура L, если при наибольшем значении k, то есть при $k = n - 2$ принять

$$p_1^{(k)} = J_{11} J_{22}^{-1}, \quad p_2^{(k)} = 0$$

а при всех остальных значениях k

$$p_i^{(k)} = -k_2 J_{jj}^{-1} \iint \xi_j \tau_{33}^{(k_2)}\, d\xi\, d\eta; \quad i = 1, 2, \quad j = 1 + i$$

Постоянная $c^{(k)}$ при всех значениях k определяется формулой

$$c^{(k)} = D^{-1} \iint \left[\eta\left(\frac{\partial \Psi_{11}}{\partial \xi} - L_1 \omega^{(k_1)}\right) - \xi\left(\frac{\partial \Psi_{22}}{\partial \eta} - L_2 \omega^{(k_2)}\right)\right] d\xi\, d\eta$$

где

$$J_{33} = ES, \quad J_{22} = E\iint \xi^2 d\xi\, d\eta, \quad J_{11} = E\iint \eta^2 d\xi\, d\eta$$

$$D = \iint [A_{44}\xi(\varphi_\eta' - \xi) - A_{55}\eta(\varphi_\xi' - \eta) + A_{45}(\xi\varphi_\xi' - \eta\varphi_\eta' - 2\xi\eta)]\, d\xi\, d\eta$$

Наконец, как следует из вычислений, усилия на основании $\zeta = l$ приводятся к заданной силе N при

$$\alpha^* = J_{11}^{-1} \iint \sigma_{33}^{(0)} d\xi d\eta, \quad \beta_1^* = J_{22}^{-1} \iint \xi \sigma_{33}^{(0)} d\xi d\eta, \quad \beta_2^* = J_{33}^{-1} \iint \eta \sigma_{33}^{(0)} d\xi d\eta$$

n четном и $\alpha^* = \beta_1^* = \beta_2^* = 0$ при n нечетном.

Чтобы получить полную систему напряжений в пространстве ξ, η, ζ, следует напряжения τ_{ij} по формулам (3.7) подставить в формулы (3.2).

4. *Частные случаи.* а) Рассмотрим некоторые частные случаи. Положим, что ось бруса — плоская кривая второго порядка ($n = 2$). Тогда, подставляя в формулу (3.8) $k = 0$ (так как n — четное число) получаем, что наибольшее значение $l = 0$ (это и единственное его значение). Поэтому получим $k = 0$, $k_1 = 1$, то есть задача сводится к одной бигармонической функции $\Phi^{(0)} = \Phi^*$, поскольку в соответствии с вышеизложенным $\omega^{(1)} = 0$. В этом случае напряжения τ_{ij} представляются так:

$$\tau_{11} = E\zeta + T_{11}^{(0)}, \quad \tau_{22} = T_{22}^{(0)}, \quad \tau_{12} = T_{12}^{(0)}$$

$$\tau_{33} = \frac{1}{2} E\zeta^2 p_1^{(0)} \xi + \sigma_{33}^{(0)} - E(\alpha^* + \beta_1^* \xi + \beta_2^* \eta)$$

$$\tau_{3i} = -\zeta[(2 - i)E + H_i] + \zeta \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad p_1^{(0)} = J_{31} J_{22}^{-1}, \quad i = 1, 2$$

$\sigma_{33}^{(0)}$, $\Psi_{ij}^{(0)}$, $T_{ij}^{(0)}$ получим, если в соответствующие формулы подставим $a^{(1)} = b^{(0)} = \omega^{(1)} = 0$. Используя (3.10) и (3.12), легко получим условия определения бигармонической функции Φ^* и значение постоянной $c^{(0)}$.

б) Допустим ось бруса — плоская кривая третьего порядка ($n = 3$). Так как n — число нечетное, то из соотношения (3.8) при $k = -1$ получим наибольшее значение $l = 1$. Поэтому, в соответствии с вышеизложенным, принимаем $l = 0, 1$; тогда $k = 1$, а $k_1 = 0, 2$. Имея ввиду, что $\omega^{(2)} = a^{(2)} = 0$, в этом случае решение приводится к двум неизвестным функциям — бигармонической $\Phi^{(1)}$ и гармонической $\omega^{(0)}$. Однако, как следует из определения условий $\Phi^{(1)}$, имеет место $\Phi^{(1)} = \Phi^*$. Поэтому новой функцией будет только одна $\omega^{(0)} = \omega^*$.

в) Рассмотрим случай, когда $n = 4$. Проведя вычисления, подобные предыдущим случаям, получим, что $k = 0; 2$, а $k_1 = 3, 1$. Однако $\omega^{(3)} = a^{(3)} = 0$ и задача приводится к $\Phi^{(2)}$, $\Phi^{(0)}$ и $\omega^{(1)}$. Так как $\Phi^{(2)} = \Phi^*$, а $\omega^{(1)} = 2\omega^*$, новой функцией оказывается бигармоническая функция $\Phi^{(0)} = \Phi^{**}$.

г) Наконец, при $n = 5$ задача приводится к определению функций $\Phi^{(3)} = \Phi^*$, $\Phi^{(1)} = 3\Phi^{**}$, $\omega^{(2)} = 6\omega^*$ и новой гармонической функции.

5. *Заключение.* Решение задачи растяжения слегка изогнутого бруса, когда ось бруса — плоская кривая n-го порядка, свелось к граничным пло-

ским задачам — определению бигармонических и гармонических функций, общее число которых $n-1$. При этом, как видно из рассмотренных частных случаев, повышение порядка уравнения оси бруса на единицу, влечет появление в решении новой функции — бигармонической или гармонической.

Всесоюзный заочный институт
текстильной и легкой
промышленности

Поступила 22 I 1980

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ, Գ. Ա. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

ԹԵԹԵՎԱԿԻ ԾՌՎԱԾ ՀԱՄԱՍԵՌ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՁՈՂԻ ՁԳՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է համասեռ անիզոտրոպ ձողի լարված վիճակը, երբ ձողի առանցքը ցանկացած կարգի հարթ կոր է։

Սեն-Վենանի կիսադարձային եղանակի օգտագործմամբ խնդրի լուծումը բերվել է բիհարմոնիկ և հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշմանը։ Ցույց է տրվում ստացված եզրային խնդիրների լուծելիությունը։

ON TENSION OF A HOMOGENEOUS ANISOTROPIC SLIGHTLY BENT BEAM

R. S. MINASIAN, G. A. POGOSIAN

S u m m a r y

The solution to a problem for the tension (compression) of a homogeneous anisotropic beam is obtained by Sen-Venan's method where the beam's axis is a plane curve of an arbitrary order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Риз П. М.* Деформация стержня со слабо изогнутой осью. ДАН СССР, т. XXIV, 1939, вып. 2.
2. *Рухадзе А. К.* К задаче деформаций стержня со слабо изогнутой осью. Сообщения АН Грузинской ССР, 1941, т. 8, № 5.
3. *Минасян Р. С.* Изгиб силой однородного бруса постоянного сечения со слабо изогнутой осью. ДАН Азерб.ССР, 1960, т. XXVI, № 3.
4. *Минасян Р. С.* К вопросу изгиба парой сил составного стержня со слабо изогнутой осью. ДАН Азерб.ССР, 1960, т. XXVI, № 4.
5. *Минасян Р. С.* К вопросу изгиба поперечной силой составного стержня со слабо изогнутой осью. ДАН Азерб.ССР, 1961, т. XXVII, № 4.
6. *Хатиашвили Г. М.* Задачи Сен-Венана для составных анизотропных тел, близких к призматическим. Труды Вычислительного центра АН Груз.ССР, 1963, т. IV.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.