ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 5, 1980 Механика

П. В. ГАЛПЧЯН

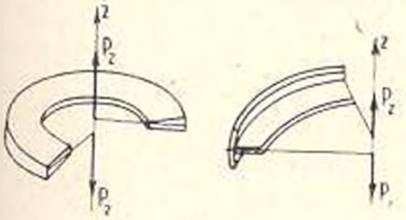
КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КРИВЫХ СТЕРЖНЕЙ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается задача о кручении кривых тонкостенных стержней в виде сектора кругового кольца, составленного из различных материалов. Постоянное по длине составного стержня меридиональное сечение образуется из областей Ω_i ($i = 1, 2, ..., N$), соответствующих различным однородным, изотропным материалам, являющимся упругими средами Гука или подчиняющимся условию изотропного упрочнения. Стержень скручивается противоположными силами P_z, приложенными к торцевым сечениям по оси кольца (фиг. 1).

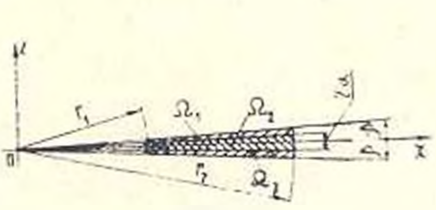
Аналогичные задачи для призматических стержней в линейно-упругой постановке рассмотрены в [1—7]. Кручение однородных, изотропных кривых стержней из упрочняющегося материала рассмотрено в [8—10].

Задача о кручении кривого составного стержня из линейно-упругих или изотропно-упрочняющихся материалов, когда составляющие части однородны и изотропны, в общей постановке исследована в [11, 12].

В настоящей работе на основе результатов автора [11] исследованы упруго-пластические напряженные состояния симметричных тонкостенных стержней с сечениями, имеющими очертания двух видов. В первом случае стержень состоит из трех слоев, спаянных по боковым поверхностям, с сечениями в виде узких кольцевых секторов, вытянутых в радиальном направлении. Наружные слои изготовлены из одинакового материала (фиг. 2). Во втором случае стержень в виде криволинейного тавра состоит из двух тонкостенных стержней, изготовленных из различных материалов и спаянных по боковым поверхностям (фиг. 6).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Решение задачи получено в предположении, что составляющая касательного напряжения по толщине стенки равна нулю. На основе найденных формул рассмотрены численные примеры. В предельных случаях получены решения соответствующих задач линейной теории упругости.

1. *Основные уравнения задачи.* Принимается сферическая система координат r, θ, φ, связанная с прямолинейной прямоугольной системой x, y, z по известным формулам $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. Ось z направляется по оси кольца. В данной задаче все компоненты напряжения тождественно равны нулю, за исключением $\tau_{\varphi r}$ и $\tau_{\theta\varphi}$, не зависящих от φ [11, 12]. Физические соотношения между компонентами тензоров деформации и напряжения в Ω_l принимаются в виде

$$\gamma_{\varphi r}^{(l)} = f_l(T_l)\,\tau_{\varphi r}^{(l)}/2G_l, \quad \gamma_{\theta\varphi}^{(l)} = f_l(T_l)\,\tau_{\theta\varphi}^{(l)}/2G_l \tag{1.1}$$

Здесь T_l — интенсивность касательных напряжений, $f_l(T_l)$ — функция, характеризующая упрочнение материала, G_l — модуль сдвига. $f_l(T_l) = 1$ соответствует линейно-упругому материалу.

С использованием соотношений между компонентами деформации и компонентами смещения при малой деформации получены выражения [11, 12]

$$2\gamma_{r\varphi} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_{\varphi 0}}{r}\right) + \frac{A}{r}\operatorname{ctg}\theta, \qquad 2\gamma_{\theta\varphi} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_{\varphi 0}}{r\sin\theta}\right) - \frac{A}{r} \tag{1.2}$$

откуда следует уравнение совместности деформаций. Здесь $u_{\varphi 0}$ — произвольная функция r и θ, $A = \mathrm{const}$ — крутка.

Перемещения имеют вид

$$u_r = A\varphi\cos\theta, \quad u_\theta = -A\varphi\sin\theta, \quad u_\varphi = u_{\varphi 0} + Br\sin\theta$$

$$B = \frac{1}{r^*}u_{\varphi 0}(r^*, \pi/2) - \frac{\partial u_{\varphi 0}(r^*, \pi/2)}{\partial r}, \quad r^* \in [r_1, r_2]$$

Введением функции напряжений Φ

$$\tau_{\varphi r}^{(l)} = -\frac{2AG_l}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\theta}, \qquad \tau_{\theta\varphi}^{(l)} = \frac{2AG_l}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial r} \tag{1.3}$$

задача сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f_l(T_l)}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial r}\right] + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{f_l(T_l)}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\theta}\right] = \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \tag{1.4}$$

с граничным условием $\Phi = 0$ на $\Gamma\Omega_0$ и условиями на $\Gamma\Omega_l$,

$$G_l\Phi^{(l)} = G_j\Phi^{(j)}, \qquad f_l(T_l)\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial l} = f_j(T_j)\frac{\partial\Phi^{(j)}}{\partial l} \tag{1.5}$$

Здесь

$$T_l = \frac{2AG_l}{r^2\sin^2\theta}\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\theta}\right)^2}$$

$\Phi^{(l)}$ представляет функцию напряжений Φ в области Ω_l, $\Gamma\Omega_0$ — граница области всего меридионального сечения стержня Ω_0, $\Gamma\Omega_{ij}$ — линия раздела смежных областей Ω_i и Ω_j.

Для силы P_z имеем выражение

$$P_z = 2A \sum_{l=1}^{N} G_l \iint\limits_{\Omega_l} \frac{\Phi^{(l)}}{r^3 \sin^4 \theta}\, d\Omega_l \tag{1.6}$$

2. *Кручение тонкостенного симметричного трехслойного стержня.* Рассмотрим случай симметричного относительно плоскости xy трехслойного сечения ($N = 3$), когда $\Gamma\Omega_l$ образуется соответственно из координатных линий: $\theta = \pi/2 - \beta$, $\theta = \pi/2 - \alpha$; $\theta = \pi/2 - \alpha$ и $\theta = \pi/2 + \alpha$, $\theta = \pi/2 + \beta$ $(2\beta r_2/(r_2 - r_1) \ll 1)$. Материалы областей Ω_1 и Ω_3 одинаковы (фиг. 2).

Пренебрегая, ввиду малости толщины стенки, компонентом напряжения $\tau_{r\varphi}^{(l)}$ и вводя при этом новую переменную $\omega = \theta - \pi/2$, приводим уравнение (1.4) к виду

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{f_l(T_l)}{r^4\cos^3\omega}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\omega}\right] = \frac{1}{\cos^3\omega}, \qquad T_l = \frac{2AG_l}{r^3\cos^2\omega}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\omega} \tag{2.1}$$

Интегрируя уравнение (2.1) при $l = 2$ и $l = 1,3$ соответственно, получим

$$f_2(T_2)\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial\omega} = \frac{r^2}{2}\psi(\omega)\cos^2\omega \tag{2.2}$$

$$f_1(T_1)\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\omega} = \frac{r^2}{2}\psi(\omega)\cos^2\omega + \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}r^2\cos^3\omega -$$
$$-\frac{r^2\cos^3\omega}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \frac{\cos^3\omega}{\cos^3\alpha}\left[f_1(T_1)\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\omega}\right]_{\omega=-\alpha}$$

$$f_3(T_3)\frac{\partial\Phi^{(3)}}{\partial\omega} = \frac{r^2}{2}\psi(\omega)\cos^2\omega - \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}r^2\cos^3\omega - \tag{2.3}$$
$$-\frac{r^2\cos^3\omega}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \frac{\cos^3\omega}{\cos^3\alpha}\left[f_3(T_3)\frac{\partial\Phi^{(3)}}{\partial\omega}\right]_{\omega=\alpha}$$

где

$$\psi(\omega) = \operatorname{tg}\omega + \cos\omega\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)$$

В уравнении (2.2) учтено, что $\tau_{\varphi r} = 0$ при $\omega = 0$. Величины в квадратных скобках в (2.3) определяются из условий (1.5) на $\Gamma\Omega_{ij}$. Определяя эти величины и объединяя (2.2) и (2.3), будем иметь

$$\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\omega} = \frac{r^2}{2}f_l^*(\Gamma_l)\psi(\omega)\cos^2\omega \qquad (l = 1, 2, 3) \tag{2.4}$$

где $f_l^*(\Gamma_l) = 1/f_l(T_l)$, Γ_l — интенсивность деформаций сдвига.

Согласно (1.1) и (2.4) будем иметь

$$\gamma_{\varphi r}^{(l)} = -\frac{A}{2r}\psi(\omega), \qquad \Gamma_l \equiv \Gamma = |2\gamma_{\varphi r}| = \frac{|A\psi(\omega)|}{r}$$

Проинтегрировав (2.4) при $l = 1,3$ и $i = 2$ с учетом соответственно граничного условия и первого условия (1.5), получим

$$\Phi^{(1)}(r, \omega) = \Phi^{(3)}(r, -\omega) = \frac{r^2}{2}\int_{-\beta}^{\omega} f_1^*(\Gamma)\psi(\omega)\cos^2\omega d\omega \tag{2.5}$$

$$\Phi^{(2)}(r, \omega) = \frac{r^2}{2}\int_{-\alpha}^{\omega} f_2^*(\Gamma)\psi(\omega)\cos^2\omega d\omega +$$

$$+\frac{G_1 r^2}{2G_2}\int_{-\beta}^{-\alpha} f_1^*(\Gamma)\psi(\omega)\cos^2\omega d\omega \tag{2.6}$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (1.6), получаем следующее выражение для силы P_z:

$$P_z = -AG_1\int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\alpha}^{\beta} f_1^*(\Gamma)\psi^2(\eta)\cos\eta d\eta -$$

$$-AG_2\int_{r_1}^{r_2} dr \int_{0}^{\alpha} f_2^*(\Gamma)\psi(\eta)\varphi(\eta)d\eta \tag{2.7}$$

где

$$\varphi(\eta) = \sin\eta - \cos^2\eta \ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\eta\right)$$

Примем $f_l(T_l) = 1 + \lambda_l T_l^{\nu_l}$, $\lambda_l = \lambda_l^*/(2G_l)^{\nu_l}$, где λ_l^* и ν_l — положительные физические параметры. Когда $\nu_l = 1$, интенсивности касательных напряжений T и деформаций сдвига Γ связаны соотношением

$$T_l = -\frac{1}{2\lambda_l} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda_l^2} + \frac{4G_l\Gamma}{\lambda_l}}$$

Подставив значение $f_l^*(\Gamma)$ при $\nu_l = 1$ в (2.7) и произведя интегрирование, получим

$$P_z = \operatorname{sgn} A\left[\int_{\alpha}^{\beta} a_1(\eta; A)\psi(\eta)\cos\eta d\eta + \int_{0}^{\alpha} a_2(\eta; A)\varphi(\eta)d\eta\right]$$

где

$$a_l(\eta;\ A)=\frac{r_2^2-r_1^2}{4\lambda_l}-\frac{r_2+2|A|G_l\lambda_l\psi(\eta)}{4\lambda_l}\sqrt{r_2^2+4|A|G_l\lambda_l r_2\psi(\eta)}+$$

$$+\frac{r_1+2|A|G_l\lambda_l\psi(\eta)}{4\lambda_l}\sqrt{r_1^2+4|A|G_l\lambda_l r_1\psi(\eta)}-$$

$$-[AG_l\psi(\eta)]^2\lambda_l\ln\frac{\sqrt{r_1^2+4|A|G_l\lambda_l r_1\psi(\eta)}+2|A|G_l\lambda_l\psi(\eta)+r_1}{\sqrt{r_2^2+4|A|G_l\lambda_l r_2\psi(\eta)}+2|A|G_l\lambda_l\psi(\eta)+r_2}$$

Подставив (2.4) в (1.3), окончательно получим

$$\tau_{\theta r}^{(l)}=-\frac{2AG_l\psi(\omega)}{r+\sqrt{r^2+4G_l\lambda_l r|A\psi(\omega)|}} \tag{2.8}$$

В случае линейной упругости из (2.5) — (2.7) и (1.3) соответственно получаем

$$\Phi^{(1)}=\Phi^{(3)}=\frac{r^2}{4}\Big\{\sin^2\omega+\left[\ln(1-\sin\omega)-\frac{1}{2}\right](1-\sin\omega)^2+$$

$$+\left[\ln(1+\sin\omega)-\frac{1}{2}\right](1+\sin\omega)^2-$$

$$-\frac{1}{3}\left[\ln(1-\sin\omega)-\frac{1}{3}\right](1-\sin\omega)^3-$$

$$-\frac{1}{3}\left[\ln(1+\sin\omega)-\frac{1}{3}\right](1+\sin\omega)^3-\sin^2\beta-$$

$$-\left[\ln(1+\sin\beta)-\frac{1}{2}\right](1+\sin\beta)^2-$$

$$-\left[\ln(1-\sin\beta)-\frac{1}{2}\right](1-\sin\beta)^2+$$

$$+\frac{1}{3}\left[\ln(1+\sin\beta)-\frac{1}{3}\right](1+\sin\beta)^3+$$

$$+\frac{1}{3}\left[\ln(1-\sin\beta)-\frac{1}{3}\right](1-\sin\beta)^3\Big\}$$

$$\Phi^{(2)}=\frac{r^2}{4}\Big\{\sin^2\omega+\left[\ln(1-\sin\omega)-\frac{1}{2}\right](1-\sin\omega)^2+$$

$$+\left[\ln(1+\sin\omega)-\frac{1}{2}\right](1+\sin\omega)^2-$$

$$-\frac{1}{3}\left[\ln(1-\sin\omega)-\frac{1}{3}\right](1-\sin\omega)^3-$$

$$-\frac{1}{3}\left[\ln(1+\sin\omega)-\frac{1}{3}\right](1+\sin\omega)^3-\sin^2\alpha-$$

$$
\begin{aligned}
&-\left[\ln(1+\sin\alpha)-\frac{1}{2}\right](1+\sin\alpha)^2-\\
&-\left[\ln(1-\sin\alpha)-\frac{1}{2}\right](1-\sin\alpha)^2+\\
&+\frac{1}{3}\left[\ln(1+\sin\alpha)-\frac{1}{3}\right](1+\sin\alpha)^3+\\
&+\frac{1}{3}\left[\ln(1-\sin\alpha)-\frac{1}{3}\right](1-\sin\alpha)^3\Bigg\}+\frac{G_1 r^2}{4G_2}\Bigg\{\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\\
&+\left[\ln(1+\sin\alpha)-\frac{1}{2}\right](1+\sin\alpha)^2+\left[\ln(1-\sin\alpha)-\frac{1}{2}\right](1-\sin\alpha)^2-\\
&-\frac{1}{3}\left[\ln(1+\sin\alpha)-\frac{1}{3}\right](1+\sin\alpha)^3-\\
&-\frac{1}{3}\left[\ln(1-\sin\alpha)-\frac{1}{3}\right](1-\sin\alpha)^3-\\
&-\left[\ln(1+\sin\beta)-\frac{1}{2}\right](1+\sin\beta)^2-\left[\ln(1-\sin\beta)-\frac{1}{2}\right](1-\sin\beta)^2+\\
&+\frac{1}{3}\left[\ln(1+\sin\beta)-\frac{1}{3}\right](1+\sin\beta)^3+\\
&+\frac{1}{3}\left[\ln(1-\sin\beta)-\frac{1}{3}\right](1-\sin\beta)^3\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
A=-\frac{P_i}{C_1},\qquad \tau_{\varphi r}^{(l)}=\frac{P_i G_i}{C_1 r}\psi(\omega)
$$

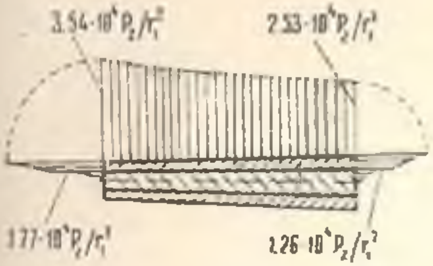
где

$$
C_1=(r_2-r_1)\left[G_1\int_{\alpha}^{\beta}\psi^2(\eta)\cos\eta\,d\eta+G_2\int_0^{\alpha}\psi(\eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta\right]
$$

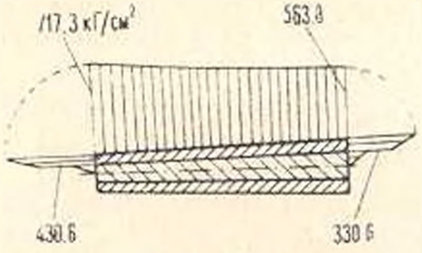
На фиг. 3 приведены эпюры распределения напряжения $\tau_{\varphi r}$ в сечении в случае линейно-упругого материала. При этом принимается $r_2=1.4\,r_1$, $\alpha=0.0055$ *рад*, $\beta=0.011$ *рад* и $G_1=2G_2$. Эпюра напряжения $\tau_{\varphi r}$ в случае упрочняющегося материала изображена на фиг. 4. При этом $r_1=15$ *см*, $r_2=1.4\,r_1$, $\alpha=0.0055$ *рад*, $\beta=0.011$ *рад*, $G_2=0.42\cdot10^6$ *кГ/см²*, $G_1=2G_2$, $\nu_l=1$, $\lambda_2=2\lambda_1$, $\lambda_1=10^{-1}$ *см²/кГ* и $P_i=5.1$ *кГ*.

На фиг. 5 приведены графики зависимостей между T и Γ для выбранных материалов ($G_2=0.42\cdot10^6$ *кГ/см²*). Графики для линейно-упругих материалов представляются сплошными линиями. Кривые 1 соответствуют материалу области Ω_1, а 2 — области Ω_2.

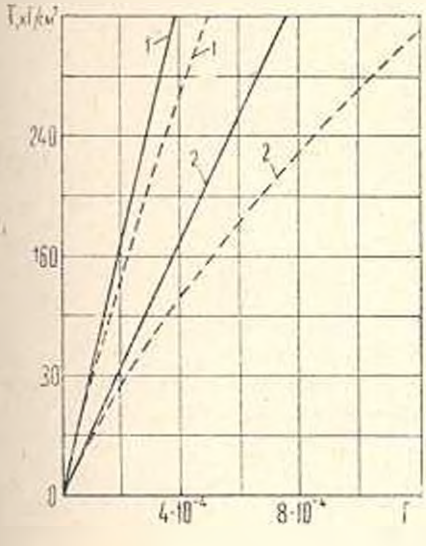
3. *Кручение тонкостенного стержня в виде криволинейного тавра.* Рассмотрим кручение кривого стержня, составленного из двух стержней, изготовленных из различных материалов и спаянных по боковым поверхностям в виде тавра. Меридиональное сечение одного из них, соответствующего области Ω_1, имеет вид узкого кольцевого сектора, вытянутого по направлению r, а сечение другого, соответствующего Ω_2, представляет собой узкий кольцевой сектор, вытянутый по направлению θ. Меридиональное сечение составного стержня расположено симметрично относительно плоскости xy (фиг. 6).



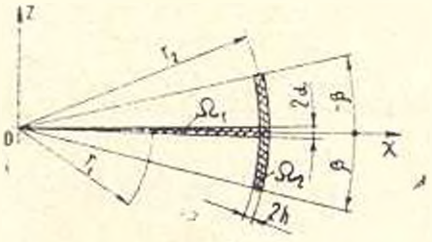
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Вследствие малости толщины стенки можно принять, что всюду в Ω_1 компонент $\tau^{(1)}_{\theta\omega}$ пренебрежимо мал по сравнению с $\tau^{(1)}_{r\omega}$. В частях области Ω_2, весьма отдаленных от оси симметрии, компонент $\tau^{(2)}_{r\omega}$ пренебрежимо мал по сравнению с $\tau^{(2)}_{\theta\omega}$ и, кроме того, на оси симметрии $\tau_{r\omega} = 0$. Имея в виду эти обстоятельства, можно всюду положить $\tau^{(2)}_{r\omega} \simeq 0$.

Уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{f_1(T_1)}{r^2\cos^3\omega}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\omega}\right] = \frac{1}{\cos^3\omega}, \qquad T_1 = \frac{2AG_1}{r^3\cos^2\omega}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\omega} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f_2(T_2)}{r^2}\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r}\right] = \frac{1}{r^2}, \qquad T_2 = \frac{2AG_2}{r^2\cos^2\omega}\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \tag{3.2}$$

Дважды интегрируя уравнение (3.1), получим

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \omega} = \frac{r^2}{2} f_1^*(\Gamma_1)\,\psi(\omega)\cos^2\omega \tag{3.3}$$

$$\Phi^{(1)} = -\frac{r^2}{2}\int_{\omega}^{\alpha} f_1^*(\Gamma_1)\,\psi(\omega)\cos^2\omega\, d\omega \tag{3.4}$$

В уравнении (3.3) учтено, что $\tau_{\omega r}^{(1)} = 0$ при $\omega = 0$, а в (3.4) — граничное условие.

Согласно (1.1) и (3.3) будем иметь

$$\gamma_{\omega r}^{(1)} = -\frac{A}{2r}\psi(\omega), \qquad \Gamma_1 = |2\tau_{\omega r}^{(1)}| = \frac{|A\psi(\omega)|}{r}$$

Ищем $\Phi^{(2)}$ в виде

$$\Phi^{(2)} = \begin{cases} \Phi_1^{(2)}, & \text{когда } 0 \leqslant \omega \leqslant \alpha \\ \Phi_2^{(2)}, & \text{когда } \alpha \leqslant \omega \leqslant \beta \end{cases}$$

Проинтегрируем (3.2), принимая $\tau_{\theta z} = 0$ при $r = r_2$

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} = f_2^*(\Gamma_2)\,\frac{(r-r_2)\,r}{r_2} \tag{3.5}$$

Согласно (1.1) и (3.5) будем иметь

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = \frac{A\,(r-r_2)}{r_2 r\cos^2\omega}, \quad \Gamma_2 = \frac{2\,|A\,(r-r_2)|}{r_2 r\cos^2\omega}$$

Интегрируя (3.5) от r_2-h до r и удовлетворяя при этом на $\Gamma\Omega_{12}$ первому условию (1.5), получим

$$\Phi_1^{(2)} = \frac{1}{r_2}\int_{r_2-h}^{r} f_2^*(\Gamma_2)\,(r-r_2)\,r\,dr -$$

$$-\frac{G_1\,(r_2-h)^2}{2G_2}\int_{\omega}^{\alpha} f_1^*\left(\frac{|A\psi(\omega)|}{r_2-h}\right)\psi(\omega)\cos^2\omega\, d\omega \tag{3.6}$$

Функции $\Phi_1^{(2)}$ и $\Phi_2^{(2)}$ должны удовлетворять первому условию (1.5) на линии раздела $\omega = \alpha$ и, кроме того, $\Phi_2^{(2)}$ должно удовлетворять граничному условию на $r = r_2 - h$. Интегрируя (3.5) с учетом этих условий, получим

$$\Phi_2^{(2)} = \frac{1}{r_2}\int_{r_2-h}^{r} f_2^*(\Gamma_2)(r-r_2)\, r\, dr \tag{3.7}$$

Подставляя (3.4), (3.6) и (3.7) в (1.6) и производя интегрирование, для силы P_z получаем выражение

$$P_z = -AG_1\int_{r_1}^{r_2-h} dr \int_0^{\pi} f_1^*(\Gamma_1)\,\psi^2(\eta)\cos\eta\, d\eta -$$

$$- AG_1(r_2-h)^2\int_{r_2-h}^{r_2+h}\frac{dr}{r^2}\int_0^{\pi} f_1^*\left(\frac{|A\psi(\eta)|}{r_2-h}\right)\psi^2(\eta)\cos\eta\, d\eta +$$

$$+ \frac{4AG_2}{r_2(r_2+h)}\int_0^{\beta}\frac{d\omega}{\cos^2\omega}\int_{r_2-h}^{r_2+h} f_2^*(\Gamma_2)(\xi-r_2)(r_2+h-\xi)\, d\xi \tag{3.8}$$

Взяв в (3.8) при $\nu_i = 1$ функцию $f_i(T_i)$ в прежней форме и проинтегрировав, получим

$$P_z = \operatorname{sgn}A\left[\int_0^{\pi} a_1(\eta;\, A)\,\psi(\eta)\cos\eta\, d\eta + \frac{1}{12\nu_2(r_2+h)}\int_0^{\beta}\frac{\varphi_2(\omega;\, A)}{\cos\omega}\, d\omega -\right.$$

$$\left. - \frac{4|A|G_1(r_2-h)h}{r_2+h}\int_0^{\pi}\frac{\psi^2(\eta)\cos\eta\, d\eta}{1+\sqrt{1-\dfrac{4G_1\nu_1|A|\psi(\eta)}{r_2-h}}}\right]$$

Здесь в выражении $a_1(\eta;\, A)$ вместо r_1 следует принять r_2-h.

$$\varphi_2(\omega;\, A) = \frac{\sqrt{(r_2+h)[h(1+g)+r_2]}}{(1+g)^2}\{g^2[3r_2^2+4h(r_2+h)] +$$

$$+ 4g[r_2^2+h(3r_2+2h)] + 4[r_2^2+h(2r_2+h)]\} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(r_2-h)[r_2-h(1-g)]}}{(1-g)^2}\left\{g^2\left[3r_2^2+8h\left(r_2-\frac{5}{2}h\right)\right]-\right.$$

$$\left. - 4g\left[r_2^2+6h\left(r_2-\frac{5}{3}h\right)\right] + 4\left[r_2^2+4h\left(r_2-\frac{5}{4}h\right)\right]\right\} -$$

$$- \frac{r_2^3}{(1-g)^2}[3g^2(r_2+2h) - 2g(2r_2+9h) + 4(r_2+3h)] -$$

$$- \frac{r_2^3}{(1+g)^2}[3g^2(r_2+2h) + 2g(2r_2+9h) + 4(r_2+3h)] -$$

$$- \frac{6|A|G_2\nu_2 r_2 g[2(r_2+h)+g(r_2+2h)]}{(1+g)^{3/2}\cos^2\omega}$$

$$\times \ln \left| \frac{2\sqrt{(1+g)(r_2+h)[h(1+g)+r_2]} + 2(r_2+h) + g(r_2+2h)}{r_2(2\sqrt{1+g}+g+2)} \right| +$$

$$+ 24h^2(r_2-h) + \frac{6|A|G_2\lambda_2 r_2 g\,[2(r_2+h) - g(r_2+2h)]\,U}{(1-g)^2\cos^2\omega}$$

где

$$g(\omega) = \frac{18|A|G_2\lambda_2}{r_2\cos^2\omega}$$

$$U = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-g}} \times \\ \times \ln \left| \dfrac{r_2(2\sqrt{1-g} - g + 2)}{2\sqrt{(1-g)(r_2-h)[r_2-(1-g)h]} + 2(r_2-h) - g(r_2-2h)} \right| & \text{при } 1-g>0 \\ 2 - \dfrac{2}{r_2}\sqrt{r_2(r_2-h)} & \text{при } 1-g=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{g-1}}\left(\arcsin \dfrac{2(r_2-h)-g(r_2-2h)}{r_2 g} - \arcsin \dfrac{2-g}{g}\right) & \text{при } 1-g<0 \end{cases}$$

Подставив (3.3) и (3.5) в (1.3), получим выражения $\tau_{\theta r}^{(1)}$ и $\tau_{\theta\varphi}^{(2)}$, причем $\tau_{\theta r}^{(1)}$ определяется формулой (2.8), а $\tau_{\theta\varphi}^{(2)}$ имеет вид

$$\tau_{\theta\varphi}^{(2)} = \frac{4AG_2(r-r_2)}{r_2 r\cos^2\omega\left(1+\sqrt{1+\dfrac{|r-r_2|}{r}g(\omega)}\right)}$$

В случае линейной упругости из (3.4), (3.6) — (3.8) и (1.3) соответственно получаем

$$\Phi^{(3)} = \frac{r^2}{4}\Big\{\sin^2\omega + \left[\ln(1-\sin\omega) - \frac{1}{2}\right](1-\sin\omega)^2 +$$

$$+ \left[\ln(1+\sin\omega) - \frac{1}{2}\right](1+\sin\omega)^2 -$$

$$- \frac{1}{3}\left[\ln(1-\sin\omega) - \frac{1}{3}\right](1-\sin\omega)^3 -$$

$$- \frac{1}{3}\left[\ln(1+\sin\omega) - \frac{1}{3}\right](1+\sin\omega)^3 - \sin^2\alpha -$$

$$- \left[\ln(1-\sin\alpha) - \frac{1}{2}\right](1-\sin\alpha)^2 - \left[\ln(1+\sin\alpha) - \frac{1}{2}\right](1+\sin\alpha)^2 +$$

$$+\frac{1}{3}\left[\ln(1-\sin\alpha)-\frac{1}{3}\right](1-\sin\alpha)^3+$$

$$+\frac{1}{3}\left[\ln(1+\sin\alpha)-\frac{1}{3}\right](1+\sin\alpha)^3\Big\}$$

$$\Phi_1^{(2)}=\frac{1}{6r_2}\left[r^2(2r-3r_2)+(r_2+2h)(r_2-h)^2\right]+\frac{G_1(r_2-h)^2\Phi^{(2)}}{G_2r^2}$$

$$\Phi_2^{(2)}=\frac{1}{6r_2}\left[r^2(2r-3r_2)+(r_2+2h)(r_2-h)^2\right]$$

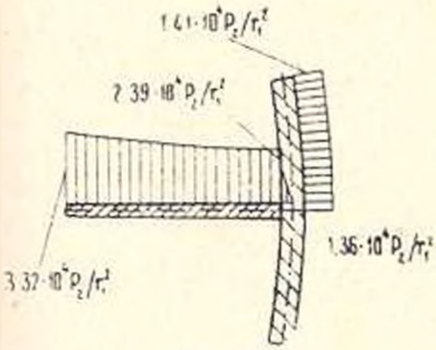
$$\tau_{\varphi r}^{(1)}=-\frac{P_zG_1\psi(\omega)}{C_2r},\qquad \tau_{\theta z}^{(2)}=\frac{2P_zG_2(r-r_2)}{C_2r_2r\cos^2\omega}$$

где

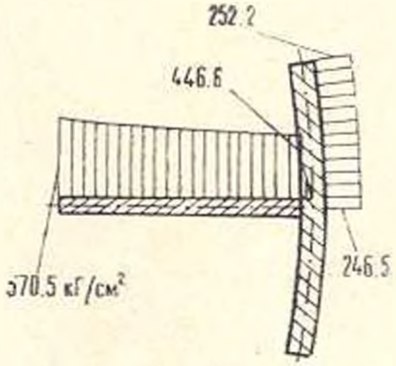
$$C_2=-\frac{4G_2h^3\psi(\beta)}{3r_2(r_2+h)\cos\beta}+$$

$$+\frac{G_1[(r_2+h)(r_1-r_2)-h(r_2-3h)]}{r_2+h}\int_0^{\beta}\cos\gamma\,\psi^2(\gamma)\,d\gamma$$

На фиг. 7 изображены эпюры распределения напряжений $\tau_{\varphi r}^{(1)}$ и $\tau_{\theta z}^{(2)}$ в случае линейно-упругого материала. При этом принимается $r_2=1.4r_1$, $h=0.013\,r_1$, $\alpha=0.008$ *рад*, $\beta=\pi/18$, $G_1=2G_2$. Приведены также эпюры напряжений в случае упрочняющегося материала (фиг. 8). При этом $r_1=15$ *см*, $r_2=1.4\,r_1$, $h=0.013\,r_1$, $\alpha=0.008$ *рад*, $\beta=\pi/18$, $G_1=2G_2$, $G_2=0.42\cdot10^6$ *кГ/см*^{2}, $\gamma_i=1$, $\lambda_2=2\lambda_1$, $\lambda_1=10^{-3}$ *см*^{2}*/кГ* и $P_z=3500$ *кГ*.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

В заключение отметим, что все линейно-упругие решения, приводимые в данной работе, получены впервые. Эти решения можно получить предельным переходом, когда $\lambda_i\to0$, из решений для упрочняющихся материалов.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 12 II 1980

Պ. Վ. ԳԱԼՓՉՅԱՆ

ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ԲԱՐԱԿԱՊԱՏ ԿՈՐ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է շրջանային օղակի սեկտոր ներկայացնող բաղադրյալ բարակապատ կոր ձողի ոլորման հետևանքով առաջացած լարվածային-դեֆորմացված վիճակը։ Ձողի երկարությամբ հաստատուն միջօրեականային կտրվածքը կազմավորվում է Հուկի առաձգական միջավայր հանդիսացող կամ իզոտրոպ ամրապնդման ենթարկվող տարբեր համասեռ ու իզոտրոպ նյութերից։

Խնդիրը բերվում է լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ մասնակի ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման։ Շառավղային ուղղությամբ ձգված նեղ օղակային սեկտորի տեսք ունեցող կտրվածքով եռաշերտ սիմետրիկ ձողի, ինչպես նաև տարբեր նյութերից պատրաստված երկու բարակապատ ձողերից կազմված և կոր տավրի տեսքով կողմնային մակերևույթներով զոդված սիմետրիկ ձողի համար, ստացված են մոտավոր, փակ լուծումներ։

Բերված են թվային օրինակներ և լարումների էպյուրներ։

THE TORSION OF THIN-WALLED CURVED BARS COMPOSED OF DIFFERENT MATERIALS

P. V. GALPCHIAN

Summary

The stress-strain state on torsion of curved composite thin bars in the form of a circular ring sector is studied. The meridional section, which is constant along the length of the composite bar, formed of some domains, corresponding to different homogeneous isotrop materials, which are Hook's elastic media or obey the condition of isotropic strengthening.

The problem is reduced to the nonlinear partial differential equation relative to the stress function.

The closed approximate solutions for a symmetric three-layered bar with a narrow circular ring sector, extended along the radius, and also for a symmetric bar formed of two thin bars of different materials and soldered on lateral surfaces shaped as a curved tee, are obtained.

Some numerical examples and stress epures are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Векуа И. Н., Рухадзе А. К.* Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. Прикладная математика и механика, 1933, т. 1, вып. 2.
3. *Векуа И. Н., Рухадзе А. К.* Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Изв. АН СССР, 1933, № 3.
4. *Рухадзе А. К.* Кручение и изгиб бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных эпитрохоидами. Труды Тбилисского математического института, 1937, т. 1.
5. *Шерман Д. И.* Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инж. сб. АН СССР, 1951, т. 10.
6. *Чобанян К. С.* Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, 1955, т. 8, № 2.
7. *Лехницкий С. Г.* Кручение многослойного стержня прямоугольного сечения. Инж. сб. АН СССР, 1956, т. 23.
8. *Задоян М. А.* Пластическое кручение неполного тора. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
9. *Задоян М. А.* Пластическое кручение сектора кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
10. *Галпчян П. В., Задоян М. А.* Пластическое кручение кругового стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 1.
11. *Галпчян П. В.* Пластическое кручение кривого стержня, составленного из различных материалов. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1980, т. XXXIII, № 4.
12. *Галпчян П. В.* Кручение кривого стержня, составленного из различных материалов. Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов, Ереван, 1979.