

М. А. БУРЫШКИН

ОБ ИЗГИБЕ СИММЕТРИЧНОЙ ГУСТОПЕРФОРИРОВАННОЙ
ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

1. В данной работе изучается рациональный подход к расчету несимметричного напряженно-деформированного состояния изогнутой густоперфорированной ортотропной пластинки, занимающей область Ω плоскости xOy и обладающей группой G симметрии [1]. Для компактности формул предполагается, что в элементарной ячейке пластинки расположено лишь одно (основное) отверстие или ядро с контуром Γ ($t \in \Gamma$ — точка этого контура). Приняты такие обозначения: $a \in G$ — элемент симметрии, S_m ($m = 0, 1$) — поворот вокруг начала координат на угол $m\pi$, θ — отращивание относительно оси x , T_{m_1, m_2} ($m_1, m_2 = 0, \pm 1, \dots$) — трансляция (сдвиг) на вектор $m_1 a_1 + m_2 a_2$, a_1 и a_2 — основные векторы ($a_1 = a_{11} + i a_{12}$, $a_2 = a_{21} + i a_{22}$ — соответствующие комплексные числа), μ_j ($j = 1, 2$) — комплексные параметры С. Г. Лехницкого, $\mu_2 = -\bar{\mu}_1$,

$$z = x + iy, \quad z_j = x - \mu_j y \quad (1.1)$$

Ω_j и Γ_j ($j = 1, 2$) — область и контур, получающиеся из Ω и Γ j -м аффинным преобразованием координат, которое отвечает переходу (1.1) от точки z к точке z_j , $t_j \in \Gamma_j$ — точка контура Γ_j .

Известно, что напряженно-деформированное состояние изогнутой пластинки описывается комплексными потенциалами С. Г. Лехницкого, то есть функциями $w_j(z_j)$ ($j = 1, 2$), аналитическими в Ω_j [2, 3]. В частности, прогиб ортотропной пластинки в точке z вычисляется по формуле

$$w(z) = 2 \operatorname{Re} [w_1(z_1) + w_2(z_2)] \quad z \in \Omega \quad (1.2)$$

Комплексные потенциалы $w_j(z_j)$ определяются из системы уравнений, состоящей из граничных условий на всех n контурах пластинки (но, вообще говоря, число n может быть и бесконечно большим). Если $\Gamma^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, n$) — контур с номером s , а $t^{(s)}$ — его точка, то такая система имеет вид

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 r_{jp}^{(s)} w_j(t_j^{(s)}) = f_p^{(s)}(t^{(s)}) \quad (p = 1, 2; s = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3)$$

где $r_{jp}^{(s)}$ — некоторые коэффициенты, зависящие от типа граничных

условий на контуре $\Gamma^{(n)}$ и от параметров $u_p, f_p^{(n)}(l^{(n)})$ — функции, которые определены на этом контуре и с заранее известным произволом вычисляются по заданной нагрузке.

Так как порядок разрешающей системы (1.3) и сложность структуры искоемых функций увеличиваются с ростом числа n , то для достаточно большого n решение поставленной задачи оказывается весьма затруднительным. Исключением из этого являются симметричные задачи, в которых нагрузка пластинки обладает теми же симметричными свойствами, что и упруго-геометрические характеристики.

Подход, предлагаемый в данной работе и опирающийся на результаты прикладной теории представлений групп [4—6], позволяет после определенного обобщения обычных симметричных задач применять эффективные методы их решения [2] и для нагрузок достаточно общего вида, которые не обладают указанными симметрическими свойствами.

2. Пусть τ_k — нешестественное неприводимое m_k — мерное представление группы G (k — индекс звезды представления, ν — номер представления со звездой $\{k\}$) [1]; $\tau_{k\nu}(g)$ — матрица этого представления, отвечающая элементу g (ее порядок равен m_k), $\tau_{k\nu\rho}(g)$ ($\rho = 1, 2, \dots, m_k$) — ρ -ый элемент матрицы $\tau_{k\nu}(g)$. Тогда будем говорить, что набор, который состоит из m_k функций $F_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \dots, m_k$), определенных на Ω и записанных в инвариантной системе отсчета [6], преобразуется по неприводимому представлению τ_k , если

$$F_{k\nu\rho}(gz) = \sum_{\rho'=1}^{m_k} \tau_{k\nu\rho'}(g) F_{k\nu\rho'}(z) \quad \forall g \in G, \quad \forall z \in \Omega \quad (\nu = 1, 2, \dots, m_k) \quad (2.1)$$

Задачу расчета напряженно-деформированного состояния симметричной пластинки при нагрузке $Q_{k\nu\rho}$ назовем обобщенной симметричной задачей изгиба. Ее важной особенностью является то, что набор, составленный из одноименных компонент тех состояний, которые отвечают нагрузкам $Q_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \dots, m_k$), также преобразуется по неприводимому представлению τ_k [6]. В частности, прогибы $w_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \dots, m_k$), возникающие при нагрузках $Q_{k\nu\rho}$, обладают свойствами (2.1), то есть

$$w_{k\nu\rho}(gz) = \sum_{\rho'=1}^{m_k} \tau_{k\nu\rho'}(g) w_{k\nu\rho'}(z) \quad (2.2)$$

Указанное обстоятельство накладывает на соответствующие комплексные потенциалы $w_{j,k\nu\rho}(z_j)$ ($j = 1, 2$) серьезные ограничения. Действительно, для любого элемента g симметрии пластинки в любой точке $z \in \Omega$ потенциалы $w_{j,k\nu\rho}(z_j)$ ($\rho = 1, 2, \dots, m_k$) должны удовлетворять равенствам, получаемым из (2.2) и (1.2)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} [w_{1k_{\nu}} [(gz)_1] + w_{2k_{\nu}} [(gz)_2]] = \\ & = \sum_{\rho=1}^{m_{k_{\nu}}} \tau_{k_{\nu}\rho}(g) \operatorname{Re} [w_{1k_{\nu}\rho}(z_1) + w_{2k_{\nu}\rho}(z_2)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Найдем необходимые для этого свойства функций $w_{jk_{\nu}}(z_j)$ ($j=1, 2$).

Предположим, что $z^{(0)}$ — некоторая внутренняя точка области Ω , δ — круг радиуса R с центром в точке $z^{(0)}$, δ_j ($j=1, 2$) — эллипс, в который j -е аффинное преобразование переводит круг δ . За счет выбора достаточно малого R добьемся, чтобы окружность, описанная вокруг эллипса δ_j , целиком лежала в области Ω_j . Тогда для функции $w_{jk_{\nu}}(z_j)$ имеет место разложение:

$$w_{jk_{\nu}}(z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn}^{(k_{\nu})} [z_j - (z^{(0)})_j]^n \quad z \in \delta \quad (2.4)$$

В силу симметрии пластинки очевидно, что аналогичные рассуждения можно провести и для точки $gz^{(0)}$ ($g \in G$), то есть

$$w_{jk_{\nu}}[(gz)_j] = \sum_{n=0}^{\infty} b_{jn}^{(k_{\nu})} [(gz)_j - (gz^{(0)})_j]^n \quad z \in \delta \quad (2.5)$$

В формулах (2.4) и (2.5) под $a_{jn}^{(k_{\nu})}$ и $b_{jn}^{(k_{\nu})}$ понимаются скалярные коэффициенты, которые связываются между собой условиями (2.3). В самом деле, подставляя разложения (2.4) и (2.5) в (2.3), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{ b_{jn}^{(k_{\nu})} [(gz)_j - (gz^{(0)})_j]^n + \overline{b_{jn}^{(k_{\nu})}} [(gz)_j - (gz^{(0)})_j]^n \} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \sum_{\rho=1}^{m_{k_{\nu}}} \tau_{k_{\nu}\rho}(g) \{ a_{jn}^{(k_{\nu})} [z_j - (z^{(0)})_j]^n + \overline{a_{jn}^{(k_{\nu})}} [z_j - (z^{(0)})_j]^n \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Перебирая всевозможные элементы симметрии и устанавливая взаимосвязь между коэффициентами $a_{jn}^{(k_{\nu})}$ и $b_{jn}^{(k_{\nu})}$, нетрудно выяснить специальные свойства комплексных потенциалов обобщенных симметричных задач. Подробно разберем соответствующую процедуру на примере $g = \theta$. Из равенств (1.1) вытекает, что

$$(\theta z)_j = (\bar{z})_j = \overline{z_{3-j}} \quad (2.7)$$

и, следовательно, выражение (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{ b_{jn}^{(k_{\nu})} [\overline{z_{3-j}} - \overline{(z^{(0)})_{3-j}}]^n + \overline{b_{jn}^{(k_{\nu})}} [z_{3-j} - (z^{(0)})_{3-j}]^n \} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \sum_{\rho=1}^{m_{k_{\nu}}} \tau_{k_{\nu}\rho}(\theta) \{ a_{jn}^{(k_{\nu})} [z_j - (z^{(0)})_j]^n + \overline{a_{jn}^{(k_{\nu})}} [\bar{z}_j - \overline{(z^{(0)})_j}]^n \} \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях двучлена $z_j - (z^{(0)})_j$ или $\bar{z}_j - \overline{(z^{(0)})_j}$ из разных частей равенства, найдем, что

$$b_{j,n}^{(\mu)} = \sum_{p=1}^{m_k} \tau_{k+p}(\theta) \overline{a_{j-p,n}^{(0)}} \quad (j=1, 2; \mu=1, 2, \dots, m_k; n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

Используя соотношения (2.7) и (2.8), преобразуем формулу (2.5)

$$\begin{aligned} w_{jk,p}[(\theta z)_j] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{m_k} \tau_{k+p}(\theta) \overline{a_{j-p,n}^{(0)}} [z_{j-p} - (z^{(0)})_{j-p}]^n = \\ &= \sum_{p=1}^{m_k} \tau_{k+p}(\theta) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_{j-p,n}^{(0)}} [z_{j-p} - (z^{(0)})_{j-p}]^n \right\} \end{aligned}$$

Выражение, заключенное в фигурные скобки, и правая часть равенства (2.4), записанного для $\mu = p$, равны. Поэтому

$$w_{jk,p}[(\theta z)_j] = \sum_{p=1}^{m_k} \tau_{k+p}(\theta) \overline{w_{j-k,p}(z_{j-p})}$$

Аналогичным образом находятся свойства комплексных потенциалов $w_{jk,p}$ для элементов симметрии более общего вида, а именно

$$\begin{aligned} w_{jk,p}[(T_{m,m}, C_m z)_j] &= \sum_{p=1}^{m_k} \tau_{k+p}(\theta) (T_{m,m}, C_m) \overline{w_{jk,p}(z_j)} \\ w_{jk,p}[(T_{m,m}, C_m \theta z)_j] &= \sum_{p=1}^{m_k} \tau_{k+p}(\theta) (T_{m,m}, C_m) \overline{w_{j-k,p}(z_{j-p})} \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\forall z \in \Omega \quad (m=0, 1; m_1, m_2=0, \pm 1, \pm 2, \dots; \mu=1, 2, \dots, m_k)$$

Остановимся теперь на частном, но весьма важном случае, при котором комплексные потенциалы голоморфны в Ω_j . Тогда для их записи удобно использовать интегралы Коши. Так как границы областей Ω и Ω_j представляют собой соответственно множества контуров $T_{m,m}, h\Gamma$ и $\Gamma_{m,m}^{(h)} = (T_{m,m}, h\Gamma)_j$, где h — один из элементов подгруппы $H = \{C_m, C_1, \theta, C_1\theta\}$, то

$$w_{jk,p}(z_j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m_1=-N}^N \sum_{m_2=-N}^N \sum_{p=0}^1 \left[I_{j,m_1,m_2}^{(C_m)}(z_j) + I_{j,m_1,m_2}^{(C_1\theta)}(z_j) \right] \quad (2.10)$$

$$I_{j,m_1,m_2}^{(h)}(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{m_1,m_2}^{(h)}} \frac{w_{jk,p}(t_{m_1,m_2}^{(h)}) dt_{m_1,m_2}^{(h)}}{t_{m_1,m_2}^{(h)} - z_j} \quad (2.11)$$

Заметим, что $t_{m_1,m_2}^{(h)} = (T_{m,m}, h\Gamma)_j$ — точка контура $\Gamma_{m_1,m_2}^{(h)}$ и что выражения (2.10) могут быть записаны в более строгой, но громоздкой форме, которая использовалась в работе [7], посвященной изучению обобщенных симметричных задач для изотропных пластинок. Опираясь на свойства (2.9) и очевидные соотношения типа

$$t_{m_1 m_2 j}^{(C_m)} = (-1)^m t_j + A_{m_1 m_2 j}, \quad t_{m_1 m_2 j}^{(C_m^{(0)})} = (-1)^m \overline{t_{3-j}} + A_{m_1 m_2 j} \quad (2.12)$$

$$A_{m_1 m_2 j} = m_1 a_{11} + m_2 a_{21} + \mu_j (m_1 a_{12} + m_2 a_{22})$$

преобразуем интегралы (2.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{m_1 m_2 j}^{(C_m)}(z_j) &= \sum_{p=1}^{m_k} \varepsilon_{k+p} (T_{m_1 m_2} C_m) W_j^{(p)} [(-1)^m (z_j - A_{m_1 m_2 j})] \\ f_{m_1 m_2 j}^{(C_m^{(0)})}(z_j) &= \sum_{p=1}^{m_k} \varepsilon_{k+p} (T_{m_1 m_2} C_m^{(0)}) \overline{W_{3-j}^{(p)}} [(-1)^m (z_j - A_{m_1 m_2 j})] \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $W_j^{(p)}(z_j)$ ($p = 1, 2, \dots, m_k$) — функции, голоморфные на внешности контура Γ_j ($j = 1, 2$), а $\overline{W_{3-j}^{(p)}}(z_j)$ — функции, комплексно-сопряженные им.

Поскольку многозначные составляющие комплексных потенциалов известны заранее, то с помощью непосредственной проверки можно убедиться в том, что и они представимы в виде (2.10), (2.13), если под $W_j^{(p)}(z_j)$ понимать некоторые функции, аналитические на внешности контура Γ_j ($j = 1, 2$).

Условимся, что для каждого контура $\Gamma^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, n$) будет единственным образом зафиксирован элемент $g_s \in G$, который переводит контур Γ в $\Gamma^{(s)}$. Тогда при записи комплексных потенциалов $w_{jk}(z_j)$ в конкретной задаче следует сохранить только те слагаемые из выражения (2.10), которые отвечают элементам g_s ($s = 1, 2, \dots, n$). Данное замечание позволяет использовать выражение (2.10) для любой дискретной группы симметрии и для произвольного расположения основного контура.

3. Итак, пространство решений системы (1.3) в обобщенной симметричной задаче существенно уже, чем в общем случае. Построение искоемых комплексных потенциалов сводится к нахождению функций $W_j^{(p)}(z_j)$ ($p = 1, 2, \dots, m_k$), аналитических на внешности контура Γ_j ($j = 1, 2$). Для этого достаточно воспользоваться системой, состоящей только из тех граничных условий, которые возникают на основном контуре при действии каждой из нагрузок $Q_{k\mu}$.

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{jk} w'_{jk\mu}(t_j) = f_{jk}(t) \quad (p = 1, 2; \mu = 1, 2, \dots, m_{k\mu}) \quad (3.1)$$

Граничные условия на остальных контурах удовлетворяются автоматически.

С математической точки зрения формулы (2.10) и (2.13) дают описание подпространства функций, инвариантного относительно оператора разрешающей системы (1.3), а выражения (3.1) являются записью сужения этого оператора в указанном инвариантном подпространстве.

Отметим два обстоятельства, характеризующие относительную простоту обобщенной симметричной задачи. Во-первых, порядок разрешающей системы (3.1), равный $2m_{\alpha}$, весьма мал. Во-вторых, ее решение можно осуществить любым методом, пригодным для обычной симметричной задачи.

Сказанное позволяет рекомендовать следующий подход к исследованию несимметричного напряженно-деформированного состояния ортотропной пластинки с группой G симметрии. С помощью результатов прикладной теории представлений [4, 5] заданную несимметричную нагрузку следует разложить на составляющие, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы G , и, пользуясь принципом суперпозиции, перейти от исходного исследования к конечному числу обобщенных симметричных задач. Для каждой из них нужно записать комплексные потенциалы в форме (2.10) и найти искомые функции $W^{(k)}(z_j)$ из системы (3.1). Эффективность предлагаемого подхода обусловлена высокой алгоритмичностью и простотой решения обобщенных симметричных задач.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 28 XI 1979

Մ. Լ. ԲՈՒՐԻՇԿԻՆ

ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽԵՏ ՊԵՐՖՈՐԱՅՎԱԾ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ՆԻՄԵՆԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա Վ Ի Ն Ո Վ Ն Ի Մ

Աշխատանքում առաջարկվում է G սիմետրիայի դիսկրետ խմբով սալի լարվածային-գեոմետրիան վիճակի հետազոտման էֆֆեկտիվ մոտեցում: Ոչ սիմետրիկ բեռը բաշխվում է բաղադրիչների, որոնք ձևափոխվում են խմբի շրջովող ներկայացումներով: Իա թույլ է առկա վերագրման հիման վրա անցնել անկախ ընդհանրացված սիմետրիկ խնդիրների լուծման:

Նրանցից յուրաքանչյուրի համար $M. Գ. Լեխնիցկու$ ֆունկցիան զրկում է (2.10) տեսքով և (2.13) հաճախարման օգնությամբ արտահայտվում են $W^{(k)}(z_j)$ ֆունկցիայի միջոցով, որոնք անալիտիկ են հիմնական կոնտուրի արտաքին մասում, և որոշվում են (3.1) սխեմով:

ON FLEXURE OF THE SYMMETRICAL DENSELY PERFORATED ORTHOTROPIC PLATE

M. L. BURISHKIN

S u m m a r y

A rational method for investigation of non-symmetrical stress-strained state of the orthotropic plate with the group G symmetry is proposed.

This method consists of using the applied representation theory and the principle of superposition for transition to solution of independent generalized symmetrical problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М., ГИФМА, 1958.
2. Касмаджанский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. К., Изд. «Вища школа», 1976.
3. Лехицкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
4. Бурыйшкн М. А. Разложения вектор-функций, определенных на области с конечной группой симметрии, в усеченном случае. Докл. АН Арм.ССР, 1976, т. 63, № 4.
5. Бурыйшкн М. А. Разклад вектор-функций, визначеної в області з просторовою групою симетрії, в трансляційно-усіченому випадку. ДАН УССР, 1975, № 7.
6. Бурыйшкн М. А. О применении теории представления дискретных групп в задачах равновесия и малых колебаний упруго-линейных систем. Депонированная рукопись, ВИНТИ, № 208-75 от 21.01.1975 г.
7. Бурыйшкн М. А. О функциях Колосова—Мусхелишвили в обобщенных симметричных задачах теории упругости. ДАН УССР, серия А, 1979, № 5.