

К. У. ОЛЬШЕВСКИЙ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО
 ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИКИ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ

Система нелинейных уравнений для определения усилий при конечных перемещениях в первоначально прямолинейном стержне кругового поперечного сечения имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \vec{q}' &= -\vec{f}; & \vec{m}' &= [\vec{q}, \vec{z}] \\ & & &= \{[\vec{z}, \vec{z}'] + \kappa T\vec{z}'\} = \vec{m} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для определения упругой линии стержня к системе (1.1) следует добавить уравнение $\vec{N}' = \vec{z}$. Безразмерные переменные и параметры определяются следующим образом: $\vec{q} = \vec{Q}(qL)^{-1}$; $\vec{m} = \vec{M}(qL^2)^{-1}$ — векторы приведенных сил и моментов в произвольном сечении стержня, $\vec{j} = \vec{F}(g)^{-1}$ — вектор распределенной нагрузки, $\varepsilon = EJ(qL^3)^{-1}$ — относительная жесткость на изгиб, κ — отношение жесткостей на кручение и изгиб, T — кривизна кручения осевой линии стержня, \vec{z} — единичный вектор касательной к изогнутой оси стержня, $t = sL^{-1}$ — независимая переменная, s , L — длина дуги и полная длина стержня, q — характерный параметр распределенной нагрузки, например, погонный вес стержня. Здесь и далее $[a, b]$, (a, b) — векторное и скалярное произведение векторов.

Для нахождения асимптотического решения системы уравнений (1.1) применим один из вариантов метода сращиваемых асимптотических разложений [2]. Суть метода заключается в том, что равномерно пригодное решение для всей области изменения независимой переменной является суммой, состоящей из части, характеризуемой исходной независимой переменной, и части, характеризуемой увеличенной независимой переменной в области краевого эффекта.

Асимптотическое решение, характеризуемое исходной независимой переменной, является при $\varepsilon \rightarrow 0$ решением системы предельных уравнений.

$$\vec{q}' = -\vec{f}; \quad [\vec{q}, \vec{z}] = 0 \quad (1.2)$$

Система уравнений (1.2) описывает равновесие идеальной гибкой нити в потоке.

$$\bar{\tau} = \left(\bar{q}_0 - \int_0^t \bar{f} dt \right) \cdot |\bar{q}|^{-1} \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) непригодно в области краевого эффекта около точек опирания или действия сосредоточенных сил. Для того, чтобы получить решение, пригодное в области краевого эффекта, введем преобразование

$t = \varepsilon^{1/2} \bar{t}$. Система уравнений (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{q}' &= -\varepsilon^{1/2} \bar{f} \\ \{[\bar{\tau}_0, \bar{\tau}'] + \varepsilon T \bar{\tau}'\} &= [\bar{q}, \bar{\tau}] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для линеаризации системы нелинейных уравнений (1.4) полагаем, что в области краевого эффекта $\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 + \bar{\tau}_*$, где $\bar{\tau}_0 = \bar{q}_0 \cdot |\bar{q}_0|^{-1}$ — значение единичного вектора касательной к оси идеальной гибкой нити (1.3) в точке опирания стержня $t = 0$, $|\bar{\tau}_*| < 1$. Систему предельных линеаризованных уравнений (1.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно привести к следующему уравнению:

$$[\bar{\tau}_*, \bar{\tau}'] + \varepsilon T \bar{\tau}' = [\bar{q}_0, \bar{\tau}_*]$$

Умножим векторно обе части последнего уравнения на $\bar{\tau}_0$. Используя формулу двойного векторного произведения

$$[a, [b, c]] = (a, c)b - (a, b)c$$

получим

$$(\bar{\tau}_0, \bar{\tau}') \bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_* = (\bar{\tau}_0, \bar{\tau}_*) \bar{q}_0 - (\bar{\tau}_0, \bar{q}_0) \bar{\tau}_*$$

После выполнения повторно операции векторного умножения на $\bar{\tau}_0$ запишем

$$[\bar{\tau}_0, \bar{\tau}_*] - (\bar{\tau}_0, \bar{q}_0) [\bar{\tau}_0, \bar{\tau}_*] = 0 \quad (1.5)$$

Решение уравнения (1.5) имеет вид

$$[\bar{\tau}_0, \bar{\tau}_*] = \bar{c}_1 e^{-\lambda \bar{t}} + \bar{c}_2 e^{i \bar{t}}$$

где $\lambda^2 = |\bar{q}_0|$. Из условия ограниченности вектора $\bar{\tau}_*$ в области краевого эффекта при $\bar{t} \rightarrow \infty$ следует $\bar{c}_2 = 0$. Окончательно имеем

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 + \bar{c} e^{-\lambda \bar{t}} \quad (1.6)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для области в окрестности другой опоры, введя преобразование $t = 1 - e^{-1/l} t$. При $l \rightarrow \infty$ значение вектора τ совпадает со значением вектора τ , определяемого уравнением (1.3), при $t \rightarrow 0$. Из условия совпадения значений векторов τ на границе области краевого эффекта и области, характеризуемой исходной независимой переменной, следует, что равномерно пригодное решение системы уравнений (1.1) по всей области изменения $t \in [0, 1]$ равно

$$\vec{\tau} = c_1 e^{-1/2 t} + c_2 e^{-1/2 (1-t)} + \left(q_0 - \int_0^t f dt \right) |q|^{-1} \quad (1.7)$$

Применим полученный результат для исследования изгиба стержня при безотрывном поперечном обтекании потоком жидкости. Рассмотрим случай, когда один конец стержня лежит на горизонтальной плоскости и удерживается лишь за счет трения, а второй расположен на значительном удалении от плоскости. Начало неподвижной декартовой системы координат расположим в точке касания провисшего участка стержня с опорной плоскостью. Положим, что часть стержня, лежащая на плоскости, прямолинейна и параллельна оси x , а к верхнему концу стержня приложено горизонтальное растягивающее усилие P в направлении оси x . Распределенная нагрузка, действующая на провисшую часть стержня, равна

$f = -j - pk$, где i, j, k — единичные орты неподвижной декартовой системы координат.

Отметим, что поскольку длина провисшей части стержня заранее неизвестна, то в качестве характерной длины можно принять расстояние от опорной плоскости до верхнего конца стержня H , то есть положить в выражениях для безразмерных параметров и переменных $L = H$.

В точке опирания провисшей части стержня с опорной плоскостью имеем следующие граничные условия: $\tau(0) = i$, $m(0) = 0$. В области стержня, расположенной около опорной плоскости

$$\vec{\tau} = i + yj + zk$$

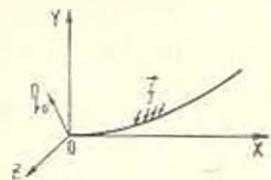
где $|y|, |z| \ll 1$. Из формулы (1.7) следует

$$\vec{\tau} = c_1 e^{-1/2 t} + (q_0 - ft) n^{-1}$$

где

$$c_1 = z^2 n^{-2} (j + pk)$$

$$q_0 = ni - z^2 n^{-2} (j + pk)$$



Фиг. 1.

Значения изгибающего момента определяются по формуле

$$|m| = \frac{\varepsilon}{n} (1 + p^2)^{-1/2} (1 - e^{-n^{1/2} \varepsilon^{-1/2} r})$$

Точность асимптотической формулы (1.7) растет с увеличением ε^{-1} и n . Численное решение плоской задачи изгиба стержня ($\rho = 0$) показало, что при $\varepsilon = 0.001$ и $n = 1.7$ погрешность асимптотической формулы (1.7) не превышает 5%. При больших значениях ε эта же точность достигается увеличением значения n , например, при $\varepsilon = 0.03$, $n = 2.4$.

Киевский филиал ВНИИСТА

Получила 4 VI 1979

Կ. ՈՒ. ՕՆՇԵՎՍԿԻ

ՃԿՈՒՆ ԶՈՂԵՐԻ ՍՏԱՏԻԿԱՅԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ,
ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅԱՆ, ԻՐ ԵՂԱՆԱԿԻ ԻՃԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս լ մ

Վերլուծությունների միաձուլման ասիմպտոտական մեթոդի օգնությամբ ուսումնասիրվում է կենտրոնացած ուժերի ազդման շրջանում սահմանային էֆեկտների ազդեցությունը:

Ստացված արդյունքները կիրառվում են հեղուկի համասեռ հոսանքում գտնվող ձողում ուժերի և մոմենտների որոշման համար:

A METHOD OF ASYMPTOTIC INVESTIGATION OF FLEXIBLE ROD STATICS

K. U. OLSHEVSKY

S u m m a r y

To find asymptotic solution of nonlinear equations a method of joined asymptotic expansions is proposed. The uniformly fitting solution obtained for the system of equations may be used to determine force and moments in the rod placed in a homogeneous fluid flow.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Попов Е. П. Нелинейные задачи статки тонких стержней. Л.—М., Гостехиздат, 1948.
2. Ван-Дейк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.