

А. П. СЕИРАНЯН

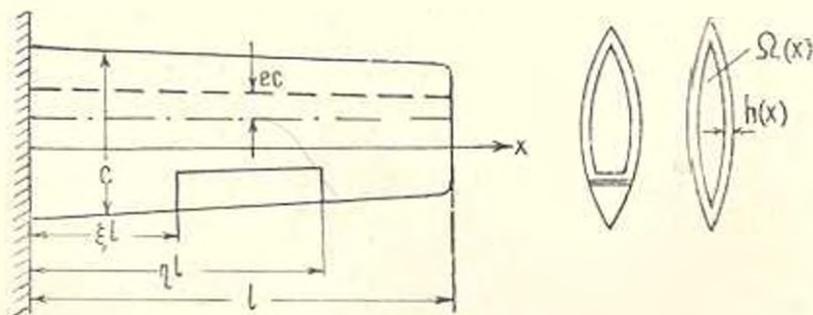
ОПТИМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭЛЕРОНА

К первым работам, посвященным проблемам оптимизации в аэроупругих явлениях, относятся [1—4]. В [1], в частности, было получено решение оптимальной задачи о дивергенции несущей поверхности. Обобщению этой задачи посвящены работы [2, 5, 6]. В [3—4] на основе дискретного подхода исследовались оптимальные распределения жесткостей по крылу при ограничениях по флаттеру, упругой аффективности и статической прочности.

В [7] изучена задача минимизации веса прямого крыла при ограничениях, наложенных на критические скорости дивергенции и реверса элерона.

В данной работе рассматривается задача о крыле минимального веса при ограничении по скорости, при которой реализуется заданное значение упругой эффективности элерона. Решение оптимальной задачи получено с применением метода возмущений.

1. Основные соотношения. Рассмотрим прямое крыло большого удлинения с элероном в потоке газа. Пунктирная линия на фиг. 1 указывает линию аэродинамических фокусов, а штрихпунктирная — упругую ось; $c(x)$ есть хорда крыла, а $e(x)$ — плечо подъемной силы, отнесенное к хорде крыла.



Фиг. 1.

Примем, что аэродинамические силы, действующие на крыло, вычисляются согласно теории несущей полосы. Обозначив угол закручивания крыла относительно упругой оси через $\theta(x)$, а угол отклонения элерона через $\beta(x)$, выпишем уравнение упругого равновесия крыла в потоке и граничные условия [8]

$$[Gj\theta'] + qC_v^* e(x)\theta(x)c^*(x) + qC_y(x)\beta(x)c^*(x) = 0$$

$$C_*^*(x) = \frac{\partial C_v}{\partial \beta} e(x) + \frac{\partial C_m}{\partial \beta} \quad (1.1)$$

$$\theta(0) = Gj\theta'|_{x=0} = 0$$

В этом уравнении $Gj(x)$ есть жесткость крыла на кручение; $q = 1/2 \rho u^2$ — скоростной напор (ρ — плотность газа, u — скорость полета); C_v^* , $\frac{\partial C_v}{\partial \beta}$, $\frac{\partial C_m}{\partial \beta}$ — заданные аэродинамические коэффициенты.

Относительно углов $\theta(x)$, $\beta(x)$ принимается [8]

$$\theta(x) = \theta_0 f(x), \quad \beta(x) = \beta_0 g(x) \quad (1.2)$$

где величины θ_0 , β_0 — константы.

Функция $g(x)$ считается заданной и отличной от нуля лишь на участке расположения элерона, для жесткого элерона полагается $g(x) = 1$, $x \in [l_1, l_2]$.

Момент крена относительно центральной оси самолета, возникающий при отклонении элерона, равен

$$M = q \int_0^l \left(C_v^*(x) + \frac{\partial C_y}{\partial \beta} \beta(x) \right) c(x) x dx$$

Эффективность элерона χ при скоростном напоре q определяется отношением производных $\partial M / \partial \beta_0$ на упругом и жестком крыле.

Для жесткого крыла имеем

$$M = q \int_0^l \frac{\partial C_y}{\partial \beta} \beta_0 g(x) c(x) x dx$$

Используя представления для M и соотношения (1.2), найдем χ

$$\chi = \left[\int_0^l \left(C_v^* \frac{\theta_0}{\beta_0} f(x) + \frac{\partial C_y}{\partial \beta} g(x) \right) c(x) x dx \right] \left[\int_0^l \frac{\partial C_y}{\partial \beta} g(x) c(x) x dx \right]^{-1} \quad (1.3)$$

Выразив отсюда θ_0/β_0 и подставив в уравнение (1.1), приходим к интегро-дифференциальному уравнению относительно функции $f(x)$, описывающему несамосопряженную краевую задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} & [Gjff'] + qC_v^* e(x)c^*(x)f(x) = \\ & = \frac{q}{1-\chi} C_*^*(x)c^*(x)g(x) \int_0^l C_v^* f(x)c(x)xdx \left[\int_0^l \frac{\partial C_y}{\partial \beta} g(x)c(x)xdx \right]^{-1} \\ & f(0) = 0, \quad (Gjff')|_{x=0} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Роль собственного значения играет скоростной напор q . Считая κ заданным параметром, можно решить (1.4) и определить первое положительное собственное значение q , при котором эффективность элерона равна κ . При $\kappa = 0$ задача (1.4) описывает явление реверса элерона [7, 9]. Отметим, что интегральное уравнение реверса, эквивалентное (1.4) при $\kappa = 0$, приводится в книге [8].

Предположим, что поперечное сечение крыла представляет собой тонкостенный замкнутый контур толщиной $h(x)$, длиной контура $s(x)$ и площадью $\Omega(x)$. На фиг. 1 представлены два различных поперечных сечения крыла, первое из них относится к участку расположения элерона. Функции $\Omega(x)$, $s(x)$ в точках ξ^l и η^l терпят разрыв. В этих точках накладываются дополнительные условия непрерывности функций $f(x)$ и $Gf(x)/s(x)$.

Согласно формуле Бредта [8] имеем

$$Gf(x) = 4G\Omega^2(x)h(x)/s(x) \quad (1.5)$$

Отметим, что сечение крыла может предполагаться и многоконтурным, при этом линейная зависимость между жесткостью и толщиной контуров $h(x)$, характерная для тонкостенных сечений, остается в силе [8].

Обозначив через γ удельный вес материала, из которого изготовлено крыло, функционал веса крыла (без элерона) запишем в виде

$$V = \int_0^l \gamma s(x) h(x) dx \quad (1.6)$$

Функции $\Omega(x)$, $s(x)$, $c(x)$, $g(x)$, $e(x)$ и параметры κ , G , C_p^* , $\partial C_p / \partial \alpha^2$, $\partial C_m / \partial \alpha^2$, γ , ρ , l в последующих рассмотрении считаются фиксированными величинами, функция $h(x)$ варьируется.

Поставим оптимальную задачу: при заданном значении κ , $0 \leq \kappa < 1$ требуется найти функцию толщины $h^*(x)$, минимизирующую функционал веса (1.6), так, чтобы минимальное положительное собственное значение задачи (1.4) q было не ниже заданного значения q_0 , $q_0 > 0$.

Для удобства введем безразмерную длину и запишем соотношения (1.4) с учетом (1.5) в виде

$$(a_0 h f')' + q a_1(x) f(x) = q \frac{a_2(x) d(x)}{(1-\kappa)} \int_0^x f(x) a_3(x) dx \quad (1.7)$$

$$f(0) = a_0 h f' \Big|_{x=0} = 0$$

Здесь

$$a_0(x) = 4G\Omega^2(x)s(x), \quad a_1(x) = C_p^2(x)c^2(x)l^2$$

$$a_2(x) = \frac{a_1(x)g(x)}{\int_0^x g(x)c(x)xdx}, \quad a_3(x) = c(x)x, \quad d(x) = 1 + \frac{\partial C_m}{\partial \alpha^2} \Big/ \left(\frac{\partial C_p}{\partial \alpha^2} e(x) \right)$$

Функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ положительны при $x \in (0, 1)$, $a_2(x)$ неотрицательна.

Необходимые условия оптимальности выводятся с применением правила множителей Лагранжа и имеют вид, аналогичный полученным в [7]

$$a_0(x) \varphi'(x) f'(x) = \lambda s(x) \quad (1.8)$$

причем сопряженная функция φ удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$(a_0 h \varphi')' + q a_1 \varphi = \frac{q a_2}{(1-x)} \int_0^1 d a_2 \varphi dx \quad (1.9)$$

$$\varphi(0) = a_0 h \varphi' |_{x=1} = 0$$

Кроме того, в точках ξ и η должны выполняться условия Эрдмана—Вейерштрасса, которые требуют непрерывности функций φ , $a_0 h \varphi'$ в этих точках.

Условие оптимальности (1.8) вместе с уравнениями и граничными условиями для функций f и φ (1.7), (1.9), а также условиями Эрдмана—Вейерштрасса, позволяют найти оптимальное решение $h^*(x)$.

С помощью результатов работы [7] можно показать, что на экстремальных, определяемых соотношениями (1.7)—(1.9), выполняется условие сильного минимума — принцип максимума функции Гамильтона.

2. *Прямоугольное крыло.* Рассмотрим случай прямоугольного крыла с жестким элероном, расположенным по всему размаху крыла. Уравнения (1.7)—(1.9) запишутся в безразмерных переменных в виде (функции $c(x)$, $e(x)$, $\Omega(x)$, $s(x)$, $q(x)$ считаются заданными константами)

$$[t(x) f'(x)]' + \eta f(x) = \frac{2dx}{1-x} \int_0^1 f(x) x dx \quad (2.1)$$

$$f(0) = t f' |_{x=1} = 0$$

$$f'(x) \varphi'(x) = \lambda = \text{const} \quad (2.2)$$

$$[t(x) \varphi'(x)]' + \eta \varphi(x) = \frac{2dx}{1-x} \int_0^1 \varphi(x) dx \quad (2.3)$$

$$\varphi(0) = t \varphi' |_{x=1} = 0$$

Добавим еще условия нормировки функций f и φ . Для удобства запишем их следующим образом:

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 \varphi^2(x) dx = 1/3 \quad (2.4)$$

В этих соотношениях $l(x)$ — безразмерная толщина, $l(x) = h(x)/l$; $\mu = 1/4 q C_y e c^2 l s / (G \Omega^2)$. Введем также обозначение $\mu_0 = 1/4 q_0 C_y e c^2 / (G \Omega^2)$.

Рассмотрим параметр $d = 1 + \partial C_m / \partial \beta / (\partial C_y / \partial \beta e)$. Коэффициенты $\partial C_m / \partial \beta$ и $\partial C_y / \partial \beta$ имеют разные знаки и для прямоугольного крыла с элероном, расположенным по всему размаху, определяются формулами Глауэрта [8]. Используя эти соотношения, получим

$$d = 1 - \frac{(1-E) \sqrt{E(1-E)}}{e [\arccos(1-2E) + 2 \sqrt{E(1-E)}]} \quad (2.5)$$

Здесь E есть отношение хорды элерона к хорде крыла. Считая, что аэродинамический фокус лежит на расстоянии $1/4$ от передней кромки крыла и что упругая ось находится в середине крыла без элерона (это справедливо для дозвуковых режимов полета и для тонких крыльев), имеем $e = 1/4 (1-2E)$.

Подставляя эту зависимость в (2.5), получим d как функцию E . Нетрудно видеть, что $d(E)$ является монотонно убывающей функцией при $0 < E < 1/2$, причем $d(0) = 0$, $d(0.2) = -0.235$. Поскольку обычно $0 < E < 0.2$, то параметр d можно считать малым и отрицательным.

Отметим, что при $d > 0$ потеря эффективности элерона наступает уже при $q = q_{div}$ [8, 9], поэтому в этом случае следует рассматривать оптимальную задачу о дивергенции [7].

Воспользуемся методом возмущений [10] и будем искать решение оптимальной задачи в виде разложения по малому параметру $\varepsilon = -2d/(1-\mu)$, полагая $q = q_0$.

$$t^0(x) = t_0(x) + \varepsilon t_1(x) + \varepsilon^2 t_2(x) + \dots$$

$$f(x) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x) + \dots$$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x) + \varepsilon^2 \varphi_2(x) + \dots$$

$$l = l_0 + \varepsilon l_1 + \varepsilon^2 l_2 + \dots$$

Подставляя эти разложения в соотношения (2.1)–(2.4) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , для нулевого приближения получим соотношения оптимальной задачи о дивергенции жесткой поверхности [1]. Решение имеет вид

$$t_0(x) = 1/2 \mu_0 (1-x^2) \quad (2.6)$$

$$f_0(x) = \varphi_0(x) = x$$

Для функций первого приближения получаются соотношения

$$(t_0 f_1)' + \mu_0 f_1 = \mu_0 \int_0^1 f_0 x dx - (t_1 f_0)' \quad (2.7)$$

$$f_1(0) = (t_1 f_0 + t_0 f_1)_{x=1} = 0$$

$$(t_0 \varphi_1')' + n_0 \varphi_1 = n_0 x \int_0^1 \varphi_0 dx - (t_1 \varphi_1)'$$
(2.8)

$$\varphi_1(0) = (t_1 \varphi_0 + t_0 \varphi_1)_{x=1} = 0$$
(2.9)

$$\int_0^1 f_0 f_1 dx = 0, \quad \int_0^1 \varphi_0 \varphi_1 dx = 0, \quad f_1 \varphi_0' + \varphi_1 f_0 = t_1$$

С использованием (2.6) из последнего равенства следует $f_1(x) + \varphi_1(x) = t_1$. Поскольку $f_1(0) = \varphi_1(0) = 0$, то $f_1(x) + \varphi_1(x) = t_1 x$. Умножим это уравнение на f_0 и проинтегрируем от нуля до единицы. С учетом (2.6) и первых двух условий (2.9) получим $t_1 = 0$.

Граничные условия в точке $x=1$ из (2.7), (2.8) приводят к $t_1(1) = 0$. Сложим теперь (2.7) и (2.8) и, используя $f_1 = -\varphi_1$ и (2.6), проинтегрируем результат с граничным условием $t_1(1) = 0$. В результате получим

$$t_1(x) = -\frac{n_0}{24}(7 - 4x - 3x^2)$$
(2.10)

Вычислим функцию $f_1(x)$. Для этого используем уравнение (2.7) (можно и (2.8)). С учетом (2.6), (2.10) преобразуем его к виду

$$[1/2(1-x^2)f_1(x)]' + f_1(x) = \psi(x), \quad x \in (0, 1)$$
(2.11)

$$f_1(0) = 0; \quad \psi(x) = \frac{1}{6} - \frac{x}{4}$$

Уравнение $[(1-x^2)f]'' + \nu f = 0$, $x \in (-1, 1)$ представляет собой уравнение Лежандра. Собственными функциями этого уравнения являются ортогональные полиномы Лежандра $P_i(x)$, а собственными значениями — числа $\nu = i(i+1)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ [10, 12].

Отметим, что полиномы Лежандра с нечетными индексами удовлетворяют условию $P_{2i+1}(0) = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Доопределим функцию $\psi(x)$ на отрезке $[-1, 0]$ нечетным образом и разложим по полиномам Лежандра. Это разложение имеет вид [11]

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i-1} P_{2i-1}(x), \quad a_{2i-1} = \frac{4i+3}{12(i+1)} P_{2i}(0), \quad i = 1, 2, \dots$$
(2.12)

Функцию $f_1(x)$ будем искать в виде ряда

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i P_i(x)$$
(2.13)

Подставим это разложение в (2.11) и используем (2.12). Умножим затем (2.11) на $P_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$ и проинтегрируем на отрезке $[-1, 1]$. Ввиду ортогональности полиномов Лежандра получим

$$b_{2i-2} = 0, \quad b_{2i-1} = \frac{a_{2i-1}}{1 - (i+1)(2i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Подставляя (2.13) в условие нормировки $\int_0^1 f_0 f_1 dx = 0$ и учитывая $f_0 = x = P_1(x)$ и ортогональность нечетных полиномов Лежандра на отрезке $[0, 1]$, получим $b_1 = 0$. Окончательно разложение (2.13) с учетом выражения для $P_{2i}(0)$ из [11] и соотношений (2.12), (2.14) приводится к виду

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} (4i+3) 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2i-1)}{6i(2i+3)(i+1)! 2^{i+1}} P_{2i-1}(x) \quad (2.15)$$

Можно доказать, что этот ряд, как и ряд, составленный из пропавших, сходится на отрезке $[0, 1]$ абсолютно и равномерно. Следовательно, функция $f_1(x)$ непрерывно дифференцируема.

Уравнения метода возмущений для второго приближения приводят к соотношениям

$$(t_1 f_1)' + (t_0 f_2)' + (t_2 f_0)' - \nu_0 f_2 = \nu_0 \int_0^1 f_1 x dx \quad (2.16)$$

$$(t_1 \varphi_1)' + (t_0 \varphi_2)' + (t_2 \varphi_0)' + \nu_0 \varphi_2 = \nu_0 x \int_0^1 \varphi_1 dx \quad (2.17)$$

$$f_1(0) = \varphi_1(0) = 0, \quad t_2(1) = 0 \quad (2.18)$$

$$\int_0^1 (2f_0 f_2 - f_1^2) dx = 0, \quad \int_0^1 (2\varphi_0 \varphi_2 + \varphi_1^2) dx = 0 \quad (2.19)$$

$$f_2 \varphi_0 + \varphi_1 f_1 + f_0 \varphi_2 = t_2$$

Из этих уравнений найдем

$$t_2(x) = \frac{\nu_0}{2} \left[\int_0^1 dx \int_0^x f_1^2 dx + \frac{(1-x^2)}{2} \left(\int_0^1 f_1 dx - f_1^2 \right) \right] \quad (2.20)$$

Вычислим безразмерный минимальный вес $v^0 = \int_0^1 t^0(x) dx$ с точностью до величин второго порядка. Соответствующая размерная величина равна $V^0 = \gamma S^2 v^0$. Непосредственным интегрированием выражений (2.6), (2.10) установим

$$\int_0^1 t_0 dx = 1/3 \nu_0, \quad \int_0^1 t_1 dx = -1/6 \nu_0$$

Вычислим интеграл $\int_0^1 t_2 dx$. Для этого умножим (2.17) (можно использовать и (2.16)) на t_1 и проинтегрируем от нуля до единицы. Учитывая (2.6), (2.9) и интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^1 t_2 dx = \int_0^1 t_1 f_1 dx = \frac{\nu_0}{6} \int_0^1 f_1 dx$$

Последнее равенство справедливо ввиду (2.10), (2.15) и ортогональности нечетных полиномов Лежандра на отрезке $[0, 1]$. Интеграл $\int_0^1 f_1 dx$ вычисляется с применением формулы [11]

$$P_{2i+1}(x) = \frac{P_{2i+2}(x) - P_{2i}(x)}{4i+3}$$

Окончательный результат имеет вид

$$\int_0^1 t_2 dx = -\frac{\nu_0}{144} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4i+3) P_{2i}^2(0)}{i(2i+3)(i+1)^2} \approx -0.00073 \nu_0$$

Таким образом, с точностью до величин второго порядка малости получаем

$$v^0 = \int_0^1 (t_0 + ut_1 + \varepsilon^2 t_2) dx = \frac{\nu_0}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} - 0.0022\varepsilon^2 \right) \quad (2.21)$$

Если в выражении $\varepsilon = 2d/(1-x)$ положить $x=0$, то формулу (2.21) и выражение для $t''(x)$ можно сравнить с соответствующими численными результатами, полученными в [7]. Сравнение свидетельствует о хорошем совпадении аналитических и численных результатов (относительная разница на интервале $-5 \leq x \leq 0$ не превышает 1%) и указывает на то, что соотношение (2.21) применимо вплоть до значений $\varepsilon \sim 10$, причем вклад второго приближения пренебрежимо мал. Таким образом, выражение

$$t^0(x) = \frac{\nu_0}{2} (1-x) \left[1+x - \frac{d}{6(1-x)} (7+3x) \right] \quad (2.22)$$

хорошо описывает решение оптимальной задачи об эффективности элерона и для не малых ε .

Для функции толщины $t''(x)$ из (2.22) методом возмущений можно определить критическую скорость дивергенции ($q_{div} = 1/2 \rho u_{div}^2$)

$$u_{div} = \nu_0 \left[1 - \frac{d}{1-x} + 0 \left(\frac{d}{1-x} \right) \right]$$

Итак, если $d < 0$, то $q_{div} > q_0$, и оптимальным решением является функция $f^0(x)$ из (2.22). Если $d > 0$, то соответствующим решением является функция нулевого приближения $f_0(x)$, определяемая (2.6) [7].

3. *Общий случай.* Аналогично методом возмущений можно получить решение оптимальной задачи и в общем случае, описываемом уравнениями (1.7)–(1.9). Предполагая, что функция $d(x)$ на участке расположения элерона мала по сравнению с единицей, введем малый параметр $d(x) = \varepsilon D(x)$. Отыскивая решение задачи в виде разложения по ε , найдем нулевое и первое приближения. Функции нулевого приближения $h_0(x)$, $f_0(x)$ имеют вид

$$h_0(x) = q_0 \int_0^1 a_1 f_0 dx / (a_0 f_0) \quad (3.1)$$

$$f_0(x) = \varphi_0(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{\gamma l s(x)}{a_0(x)}} dx$$

Вычислив первое приближение, получим выражения для $h^0(x) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x)$, $V^0 = \gamma l \int_0^1 s h^0 dx$

$$h^0(x) = \frac{q_0}{a_0 f_0} \int_0^1 \left[a_1 f_0 - \frac{a_2 d}{2(1-x)} \int_0^1 f_0 a_3 dx - \frac{a_2}{2(1-x)} \int_0^1 d a_2 f_0 dx \right] dx \quad (3.2)$$

$$V^0 = \gamma l \int_0^1 s h_0 dx - \frac{q_0}{1-x} \int_0^1 a_2 f_0 d dx \int_0^1 f_0 a_3 dx$$

В этих выражениях $h_0(x)$, $f_0(x)$ определяются из (3.1).

Скорость дивергенции для распределения $h^0(x)$ определяется соотношением

$$q_{div} = q_0 \left(1 - \frac{\int_0^1 a_2 f_0 d dx \int_0^1 f_0 a_3 dx}{(1-x) \int_0^1 a_1 f_0^2 dx} \right)$$

Ввиду положительности функций a_0 , a_1 , a_3 , f_0 и неотрицательности a_2 соотношение между q_0 и q_{div} для малых $d(x)$ определяется знаком

интеграла $\int_0^1 a_2 d f_0 dx$. Если этот интеграл меньше нуля, то $q_{div} > q_0$ и

функция $h^0(x)$ из (3.2) является решением задачи оптимизации. В противном случае реализуется решение $h_0(x)$ из (3.1).

Автор благодарит Н. В. Баничука и В. М. Фролова за полезные об-
суждения.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 31 V 1979

Ա. Պ. ՍԵՐԱՆԻԱՆ

ԷԼԵՐՈՆԻ ԷՖԵԿՏԻՎՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՕՓՏԻՄԱԼ ԽՆԳԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում է անրոտառաձգականության օպտիմիզացիայի խնդիրը՝ թևի էլիտի փոքրացումը թռչչի արագություն և անձանափական զեպքում, որի ժամանակ իրադրվում է էլերոնի առաձգական էֆեկտիվության տրված արժեքը: Ստացվել է սեփական արժեքների նկատմամբ ինքնալծորդված խնդիրը նկարագրող ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումը: Հազրանժի արտադրիչի օրենքի օպտադրծումով արտածվում է և օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները: Օպտիմիզացիայի խնդրի լուծումը կառուցվում է դրոտումների հղանակով: Ուղղանկյունաձև թևի զեպքում ստացվել է ևս հրկու մոտավորություններ, քնդ որում օպտադրծվում է ևս լեժանդրի օրթոգոնալ բազմանդամների վերլուծությունները:

AN OPTIMAL PROBLEM OF AILERON EFFICIENCY

A. P. SEYRANIAN

S u m m a r y

An optimal problem of a wing of minimum weight under aeroelastic constraint on aileron efficiency is considered. A general integral-differential equation describing the process is deduced. The solution to the optimal problem is obtained by the perturbation method.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ashley H., McIntosh S. C. Jr. Applications of aeroelastic constraints in structural optimization. Proc. 12-th Internat. Congress of Theoret. and Appl. Mech., Stanford, Berlin, Springer-Verlag, 1968.
2. McIntosh S. C., Eastep F. E. Design of minimum-mass structures with specified stiffness properties. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 5.
3. Бунюков В. Г. Расчет оптимальных флаттерных характеристик методом градиента. Тр. ЦАГИ, 1969, вып. 116б.
4. Бирюк В. И. О задаче оптимального проектирования конструкции крыла из условий прочности и аэроупругости. Ученые записки ЦАГИ, 1972, № 2.
5. Armand J.-L. Applications of optimal control theory to structural optimization: analytical and numerical approach. Proc. IUTAM Sympos. on Optimization in Structural Design, Warsaw, Berlin, Springer-Verlag, 1973.

6. Баничук Н. В. Минимизация веса крыла при ограничении по скорости дивергенции. Ученые записки ЦАГИ, 1978, № 5.
7. Сейранян А. П. Оптимизация веса крыла при ограничениях по статической аэроупругости. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 4.
8. Фын Я. Ц. Введение в теорию аэроупругости. М., Физматгиз, 1959.
9. Сейранян А. П. О соотношении между критическими скоростями реперса и дивергенции прямого крыла. Ученые записки ЦАГИ, 1978, № 4.
10. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. т. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1933.
11. Свистин П. К. Классические ортогональные многочлены. М., «Наука», 1976.