ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

М. А. СУМБАТЯН

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается плоская задача о действии распределенной нагрузки на верхнюю грань тонкого сжимаемого слоя, лежащего на жестком основании, в условиях установившейся ползучести материала слоя. Слой считается очень тонким, а связь между напряжениями и скоростями деформаций выражается степенным законом. Аналогичная задача для случая полуплоскости и в предположении несжимаемости материала исследовалась в работе [1].

В § 1 приводятся основные уравнения, используемые в дальнейшем. В § 2 рассматривается задача о действии нормальной нагрузки на слой, свободно лежащий на жестком основании, а в § 3 и 4 — соответственно о действии нормальной и касательной нагрузки на слой, сцепленный с жестким основанием.

§ 1. Приведем основные уравнения теории нелинейной ползучести в условиях плоской деформации.

Уравнения квазистатического равновесия

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Условие сжимаемости материала

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{1.2}$$

где ν — коэффициент Пуассона. Для несжимаемого материала $\nu = \dfrac{1}{2}$.

Связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций выражается соотношениями [2]

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_{11} - \sigma), \qquad \varepsilon_{22} - \varepsilon = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_{22} - \sigma), \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\sigma_{12} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})/3 \\ \sigma &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{1+\nu}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

а ε_i и σ_i — соответственно интенсивность скоростей деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + [(1-\nu)\varepsilon_{11} - \nu\varepsilon_{22}]^2 + [(1-\nu)\varepsilon_{22} - \nu\varepsilon_{11}]^2 + 6\varepsilon_{12}^2}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + [(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}]^2 + [(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}]^2 + 6\sigma_{12}^2} \qquad (1.5)$$

Из (1.3)—(1.4) имеем

$$\varepsilon_{11} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}[(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}[(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] \qquad (1.6)$$

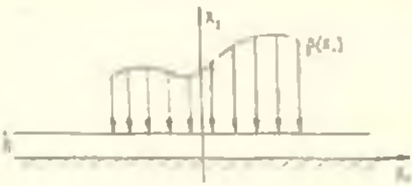
$$\varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\sigma_{12}$$

Наконец, закон для установившейся нелинейной ползучести принимаем в виде степенной зависимости

$$\varepsilon_i = A\sigma_i^m \quad (m \geq 1) \qquad (1.7)$$

Этот закон хорошо описывает деформации ползучести некоторых металлов [1—5], льда [6], многих полимеров [7] и ряда других материалов.

§ 2. Рассмотрим задачу о действии нормальной нагрузки $p(x_1)$ на слой малой толщины h, лежащий без трения на жестком основании (фиг. 1). Физическая модель слоя описана в предыдущем параграфе. Ось x_1 совмещена с нижней гранью слоя.



Фиг. 1.

Граничными условиями задачи будут

$$\begin{aligned} &\text{при } x_2 = 0 \qquad v_2 = 0, \ \sigma_{12} = 0 \\ &\text{при } x_2 = h \qquad \sigma_{22} = p(x_1), \ \sigma_{12} = 0 \end{aligned} \qquad (2.1)$$

где v_i $(i = 1, 2)$ — компоненты вектора скоростей перемещений.

Производя разложение касательного напряжения σ_{12} в ряд по малым значениям x_2 в окрестности точки $x_2 = 0$ и оставляя для тонкого слоя в этом разложении лишь линейные члены, получим

$$\sigma_{12} = f_1(x_1) + f_2(x_1)\,x_2$$

Граничное условие $\sigma_{12} = 0$ при $x_2 = 0$ дает $f_1(x_1) = 0$, аналогичное условие при $x_2 = h$ определяет функцию $f_2(x_1) = 0$. Таким образом, всюду в слое

$$\sigma_{12} = 0 \qquad (2.2)$$

Тогда из уравнения равновесия (1.1)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f_1(x_2) \\ \sigma_{22} &= f_2(x_1) = p(x_1) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Теперь второе из соотношений (1.6) дает с учетом (1.7)

$$\varepsilon_{22} = A\sigma_i^{m-1}\left[(1-\nu)\,p(x_1) - \nu f_1(x_2)\right] \tag{2.4}$$

Поскольку при замене знака у нагрузки $p(x_1)$ деформация ε_{22} также должна менять знак, то из равенства (2.4) следует, что

$$f_1(x_2) = \sigma_{11} = 0 \tag{2.5}$$

и формула (2.4) с учетом (1.5) приобретает вид

$$\varepsilon_{22} = A(1-\nu)\left(\frac{1-\nu+\nu^2}{3}\right)^{\frac{m-1}{2}} |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p)$$

откуда, интегрируя по x_2 с учетом граничного условия (2.1), получаем

$$v_2(x_1, x_2) = A(1-\nu)\left(\frac{1-\nu+\nu^2}{3}\right)^{\frac{m-1}{2}} |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p)\, x_2 \tag{2.6}$$

В частности, на верхней грани слоя (при $x_2 = h$)

$$v_2(x_1, h) = Ah(1-\nu)\left(\frac{1-\nu+\nu^2}{3}\right)^{\frac{m-1}{2}} |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p) \tag{2.7}$$

Последнее выражение показывает, что тонкий слой в условиях установившейся нелинейной ползучести работает на сжатие как нелинейное винклерово основание. В линейном случае ($m = 1$) получается обычное винклерово основание. При этом, поскольку из (1.7) при $m = 1$ имеем $A = \frac{1+\nu}{E}$ (E — модуль Юнга), то нетрудно видеть, что в этом случае коэффициент постели совпадает с известным результатом, полученным по линейной теории.

§ 3. Рассмотрим задачу предыдущего параграфа в предположении, что нижняя грань слоя сцеплена с жестким основанием. В этом случае граничные условия примут следующий вид:

$$\begin{aligned} &\text{при } x_2 = 0 \qquad && v_1 = 0, \quad v_2 = 0 \\ &\text{при } x_2 = h \qquad && \sigma_{22} = p(x_1), \quad \sigma_{12} = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Производя так же, как и в предыдущей задаче, разложение касательного напряжения σ_{12} в ряд по малым значениям x_2 в окрестности точки $x_2 = 0$ и оставляя для тонкого слоя лишь первые два члена этого разложения, получим

$$\sigma_{12} = f_1(x_1) + f_2(x_1)\, x_2$$

С учетом последнего из граничных условий (3.1) эта формула принимает вид

$$\sigma_{12} = f'(x_1)(h - x_2) \tag{3.2}$$

где $f(x_1)$ — первообразная функции $-f_2(x_1)$.

Теперь решение уравнений равновесия (1.1) даст

$$\sigma_{11} = f(x_1) + g(x_2)$$
$$\sigma_{22,2} = -f''(x_1)(h - x_2) \tag{3.3}$$

откуда после интегрирования последнего выражения по x_2 с учетом граничного условия для σ_{22} на верхней грани, получаем

$$\sigma_{22} = f''(x_1)\frac{(h - x_2)^2}{2} + p(x_1) \tag{3.4}$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в предыдущем параграфе, показывают, что функция $g(x_2)$ тождественно равна нулю.

Неизвестная пока функция $f(x_1)$ может быть найдена из граничного условия $v_1 = 0$ при $x_2 = 0$. В самом деле, это условие дает $\varepsilon_{11} = 0$ при $x_2 = 0$, что с учетом первой из формул (1.6) дает

$$(1 - \nu) f(x_1) - \nu \left[\frac{h^2}{2} f''(x_1) + p(x_1)\right] = 0 \tag{3.5}$$

Последнее равенство представляет собой дифференциальное уравнение для нахождения функции $f(x_1)$.

Если толщина слоя гораздо меньше области контакта, то

$$f(x_1) \gg \frac{h^2}{2} f''(x_1) \tag{3.6}$$

Поэтому в уравнении (3.5) можно пренебречь малым членом, содержащим вторую производную, что определяет функцию f в виде

$$f(x_1) = \frac{\nu}{1 - \nu} p(x_1) \tag{3.7}$$

С учетом всех вышеприведенных рассуждений компоненты тензора напряжений приобретают следующий вид:

$$\sigma_{11} = \frac{\nu}{1 - \nu} p(x_1), \qquad \sigma_{22} = p(x_1) \tag{3.8}$$

$$\sigma_{12} = \frac{\nu}{1 - \nu} p'(x_1)(h - x_2)$$

Интенсивность касательных напряжений (1.5)

$$\sigma_i = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{|p(x_1)|}{\sqrt{3}} \tag{3.9}$$

Последняя формула получена с учетом того, что

$$\sigma_{12}^2 \ll \sigma_{22}^2, \quad \sigma_{12}^2 \ll \sigma_{11}^2$$

как это следует из равенства (3.8).

Теперь второе из соотношений (1.6) дает

$$\varepsilon_{22} = \frac{A}{3^{\frac{m-1}{2}}}\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)^m |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p)$$

откуда после интегрирования по x_2 с учетом граничных условий получаем

$$v_2(x_1, x_2) = \frac{A}{3^{\frac{m-1}{2}}}\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)^m |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p)\, x_2 \qquad (3.10)$$

В частности, на верхней грани слоя

$$v_2(x_1, h) = \frac{Ah}{3^{\frac{m-1}{2}}}\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)^m |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p) \qquad (3.11)$$

Таким образом, здесь так же, как и в предыдущей задаче, слой работает как нелинейное винклерово основание. При $m=1$ имеем линейное винклерово основание с коэффициентом постели, совпадающим с известным из линейной теории. Интересно отметить, что для несжимаемого материала $\left(\nu=\frac{1}{2}\right)$ основание в виде сцепленного с жестким фундаментом слоя не является винклеровым, что согласуется с известными результатами линейной теории.

§ 4. Здесь рассмотрим задачу предыдущего параграфа в предположении, что на верхнюю грань слоя вместо нормальной нагрузки действует касательная $\tau(x_1)$.

Граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\text{при } x_2=0 \qquad && v_1=0, \quad v_2=0 \\ &\text{при } x_2=h \qquad && \sigma_{22}=0, \quad \sigma_{12}=\tau(x_1) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Оставляя так же, как и в предыдущих задачах, в разложении σ_{12} по малому параметру x_2 лишь линейные члены, с учетом последнего граничного условия (4.1) получим

$$\sigma_{12} = \tau(x_1) + f(x_1)(h - x_2) \qquad (4.2)$$

где $f(x_1)$ — пока неизвестная функция.

Интегрирование второго уравнения равновесия (1.1) определяет

$$\sigma_{22} = -\tau'(x_1)\,x_2 - f'(x_1)\left(hx_2 - \frac{x_2^2}{2}\right) + g(x_1)$$

Из граничного условия $\sigma_{22}=0$ при $x_2=h$ находим, что

$$g(x_1) = h\tau'(x_1) + \frac{h^2}{2} f'(x_1)$$

Таким образом,

$$\sigma_{22} = (h - x_2)\tau'(x_1) + \left(\frac{h^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + hx_2\right) f''(x_1) \tag{4.3}$$

Интегрирование первого уравнения равновесия позволяет найти

$$\sigma_{11} = f(x_1) \tag{4.4}$$

Так же, как и в § 3, функция $f(x_1)$ должна быть найдена с использованием граничного условия $v_1 = 0$ при $x_2 = 0$, удовлетворение которому дает

$$(1 - \nu) f(x_1) - \nu \left[\frac{h^2}{2} f''(x_1) + h\tau'(x_1) \right] = 0$$

Отбрасывая в этом уравнении малый по сравнению с первым член $-\nu \dfrac{h^2}{2} f''(x_1)$, получаем

$$f(x_1) = \frac{\nu}{1 - \nu} h\tau'(x_1)$$

Таким образом,

$$\sigma_{11} = \frac{\nu}{1 - \nu} h\tau'(x_1)$$

$$\sigma_{12} = \tau(x_1) + \frac{\nu}{1 - \nu} h (h - x_2)\tau''(x_1) \approx \tau(x_1) \tag{4.5}$$

$$\sigma_{22} = (h - x_2)\tau'(x_1) + \frac{\nu}{1 - \nu} h \left(\frac{h^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + hx_2\right)\tau'''(x_1) \approx \tau'(x_1)(h - x_2)$$

Выражения (4.5) показывают, что $\sigma_{22} \ll \sigma_{12}$, $\sigma_{11} \ll \sigma_{12}$, поэтому

$$\sigma_i \approx |\sigma_{12}| = |\tau(x_1)| \tag{4.6}$$

Теперь третье и второе равенства (1.6) дают

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= A|\tau(x_1)|^m \operatorname{sgn}(\tau) \\ \varepsilon_{22} &= A|\tau(x_1)|^{m-1}\tau'(x_1)\left[(h - x_2)(1 - \nu) - \frac{\nu^2}{1 - \nu} h\right] \end{aligned} \tag{4.7}$$

Интегрируя последнее выражение по x_2 с учетом граничных условий, получаем

$$v_2 = A|\tau(x_1)|^{m-1}\tau'(x_1)\left[\left(hx_2 - \frac{x_2^2}{2}\right)(1 - \nu) - \frac{\nu^2}{1 - \nu} hx_2\right] \tag{4.8}$$

Пренебрегая в выражении

$$v_{1,2} = 2\varepsilon_{12} - v_{2,1}$$

малым членом $v_{2,1}$, получим с учетом первого равенства (4.7)

$$v_{2,1} = 2\varepsilon_{12} - 2A\,|\tau(x_1)|^m \operatorname{sgn}(\tau)$$

Интегрируя последнее соотношение по x_2 и пользуясь граничным условием $v_1 = 0$ при $x_2 = 0$, получаем

$$v_1(x_1, x_2) = 2A\,|\tau(x_1)|^m \operatorname{sgn}(\tau)\,x_2 \tag{4.9}$$

В частности, при $x_2 = h$

$$v_1(x_1, h) = 2Ah\,|\tau(x_1)|^m \operatorname{sgn}(\tau) \tag{4.10}$$

Таким образом, и при сдвиговых нагрузках тонкий слой работает также как нелинейное винклерово основание.

Сделаем несколько замечаний к решению рассмотренных выше задач. 1. В работе [1] Н. Х. Арутюняном был предложен принцип «обобщенной суперпозиции», состоящий в том, что «обобщенные перемещения» (или «обобщенные скорости перемещений») $v^{\mu}\left(\mu = \dfrac{1}{m}\right)$ удовлетворяют принципу линейной суперпозиции. Однако вопрос об оценке погрешности этого принципа при решении различных задач нелинейной теории ползучести еще недостаточно изучен. Решение трех рассмотренных в данной работе задач показывает, что в случае очень тонкого слоя этот принцип выполняется точно. Это следует из того, что для такого слоя «обобщенная скорость перемещения» любой точки поверхности слоя есть линейная функция напряжения, приложенного в этой же самой точке и не зависит от напряжений, приложенных в других точках поверхности слоя.

2. Рассмотренные задачи могут быть исследованы аналогичным методом и в рамках определяющих уравнений неустановившейся нелинейной теории ползучести наследственного типа, данной в работах [1, 7].

В заключение автору хотелось бы выразить признательность В. М. Александрову за постоянное внимание к работе.

Институт проблем
механики АН СССР

Поступила 3 I 1980

Մ. Ա. ՍՈՒՄԲԱՏՅԱՆ

ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԲԱՐԱԿ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է կայունացված ոչ գծային սողքի հարթ խնդիրը կոշտ հիմքի վրա գտնվող սեղմվող բարակ շերտի համար, որի վրա ազդում է բաշխված բեռ։ Կայունացված ոչ գծային սողքի օրենքը ընդունված է աստիճանային։

Ցույց է տրվում, որ անկախ նրանից, ազդում է շերտի վրա նորմալ թե շոշափող բեռ, ինչպես նաև անկախ շերտի ներքին եզրի ամրացման ձևից, շերտն աշխատում է ինչպես ոչ գծային վինկլերյան հիմք։

TWO-DIMENSIONAL PROBLEM IN THE THEORY OF STEADY NON-LINEAR CREEP FOR A THIN LAYER

M. A. SUMBATIAN

S u m m a r y

In the work under consideration there is studied the problem of the load acting on a two-dimensional thin layer. The layer is supposed to lie on a hard foundation. The law of creep is assumed to be described by a power function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
3. *Turner F., Blomquist K.* A study of the applicability of Robotnov's creep parameter for alliminium alloy J. Aeronaut. Sci, 1956, XXIII, No. 12.
4. *Johnson A.* The plastic, creep and relaxation of properties of metals. Aircraft Engineering, 1949, XXI, No. 239.
5. *Шестериков С. А.* Об одном условии для законов ползучести. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
6. *Вялов С. С., Докучаев В. В., Шейнкман Д. Р.* Подземные льды и сильно льдистые грунты как основания сооружений. Ленинград, Стройиздат, 1976.
7. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.