

Д. В. ГРИАЦКИЙ, А. А. ЕВТУШЕНКО, Г. Т. СУЛИМ

ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ПРОИЗВОЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЛИНЕЙНЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В последнее время напряженно-деформируемое состояние исследовано для большого числа геометрических объектов, содержащих дефекты типа трещины, включений, в том числе и тонкостенных. В работах [1—3] решены задачи плоской теории упругости для однородной и кусочно-однородной плоскости с тонким упругим включением конечной длины.

В данной работе предложена методика решения задач для полуплоскости с произвольно расположенным тонкостенным упругим включением. С помощью интегрального преобразования Фурье проблема сформулирована в виде системы интегральных уравнений с сингулярными ядрами типа Коши относительно неизвестных скачков напряжений и производных от смещений на кромках включения. Соответствующие системы интегральных уравнений для трещины и абсолютно жесткого включения получены как частные случаи. Приводится численный пример.

1. Постановка задачи и вывод интегральных уравнений

Рассмотрим упругую изотропную полуплоскость $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < \infty$, содержащую прямолинейное тонкостенное упругое включение ширины $2h$, срединная линия которого определяется условиями $a \leq s \leq b$, $0 = 0_0$ ($0 \leq \theta < \pi/2$). Здесь, для удобства, наряду с декартовой системой координат xoy , введена система координат pos , полученная из системы xoy поворотом на угол θ_0 . Предполагается, что внутри полуплоскости действует произвольная система сосредоточенных сил, а также однородное поле напряжений на бесконечности. Граница $L = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, y = 0\}$ полуплоскости и кромки включения свободны от внешних усилий. Требуется определить напряженно-деформируемое состояние в теле, в частности, коэффициенты интенсивности напряжений на торцах $s = a$, $s = b$ включения.

Предположение о малой толщине включения позволяет моделировать его скачком напряжений и производных от смещений в однородной полуплоскости на отрезке, совпадающем со срединной линией реального включения:

$$\begin{aligned} [z_{nn}(s, +0) - iz_{ss}(s, +0)] - [z_{nn}(s, -0) - iz_{ss}(s, -0)] &= f_1(s) - if_2(s) \\ [u_s(s, +0) + iv_s(s, +0)] - [u_s(s, -0) + iv_s(s, -0)] &= f_3(s) + if_4(s) \quad (1.1) \\ (f_j(s) = 0, \quad s \in [a, b], \quad j = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

Здесь $u_s = \frac{\partial u}{\partial s}$, $v_s = \frac{\partial v}{\partial s}$.

В рамках линейной теории упругости исследуемую проблему можно рассматривать как наложение двух задач: первой граничной задачи для полуплоскости без включения (задача «0») и смешанной граничной задачи для полуплоскости с математическим разрезом вдоль отрезка $[a, b]$ при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{xy}^*(x, 0) = \sigma_{xq}^*(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^*(s, \pm 0) &= \sigma_{nn}(s, \pm 0) - \sigma_{nn}^0(s, 0) \\ \sigma_{sn}^*(s, \pm 0) &= \sigma_{sn}(s, \pm 0) - \sigma_{sn}^0(s, 0) \\ u_s^*(s, \pm 0) &= u_s(s, \pm 0) - u_s^0(s, 0) \\ v_s(s, \pm 0) &= v_s(s, \pm 0) - v_s^0(s, 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

(задача «ж»).

Отметим, что решение задачи «ж» на краяхах щели будет иметь те же скачки $f_j(s)$ ($j = 1, 2, 3, 4$), что и изучаемая задача.

В свою очередь, функцию напряжений $\Phi^*(s, n)$ задачи «ж» представим в виде

$$\Phi^*(s, n) = \Phi^1(s, n) + \Phi^2(s, n) \quad (1.4)$$

где $\Phi^1(s, n)$ определяет решение для неограниченной плоскости со скачками $f_j(s)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) на соответствующем разрезе (задача «1»); $\Phi^2(x, y)$ — функция напряжений для сплошной полуплоскости, нагруженной вдоль границы L усилиями, которые равны по величине и противоположны по знаку напряжениям, определяемым на L функцией $\Phi(s, n)$ (задача «2»).

При отсутствии объемных сил решение уравнений равновесия для двумерного упругого тела сводится к решению бигармонического уравнения [5]

$$\Delta_1 \Delta_2 \Phi^1 = 0$$

общее решение которого с помощью интегрального преобразования Фурье представим в форме

$$\Phi^1(s, n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^1(\zeta, n) \exp(-i\zeta s) d\zeta \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} [A_1(\zeta) + n^2 A_2(\zeta)] \exp(-n\bar{\zeta}), \quad n > 0 \\ [A_3(\zeta) + n^2 A_1(\zeta)] \exp(n\bar{\zeta}), \quad n < 0 \end{aligned}$$

$\bar{\zeta} = |\zeta|$, $A_j(\zeta)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) — в общем случае комплексные функции, определяемые из граничных условий задачи.

Принимая во внимание, что граничные условия задачи «1» записываются аналогично (1.1), а компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{ss}^1 = \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s^2}, \quad \sigma_{sn}^1 = \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial n^2}, \quad \sigma_{nn}^1 = - \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s \partial n}$$

с помощью закона Гука получаем алгебраическую систему уравнений для определения $A_j(\tau)$ в виде несобственных интегралов от неизвестных пока функций $f_j(s)$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Интегрируя по τ с использованием трансформант Фурье [6], находим

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^1(s, n) &= (2\pi)^{-1} \int_a^b [k_1^1 k_0^1 g_1(s, n) + m_1 g_2(s, n)] f_1(t) + \\ &+ [m_2 g_3(s, n) + m_3 g_4(s, n)] f_2(t) + [g_1(s, n) + g_2(s, n)] f_3(t) / (2k_0^1) + \\ &+ [g_3(s, n) - g_4(s, n)] f_4(t) / (2k_0^1) dt \\ \sigma_{sn}^1(s, n) &= (2\pi)^{-1} \int_a^b [g_1(s, n) - m_1 g_2(s, n)] f_1(t) + \\ &+ [m_3 g_3(s, n) - m_1 g_4(s, n)] f_2(t) - g_2(s, n) f_3(t) / (2k_0^1) + \\ &+ [g_3(s, n) + g_4(s, n)] f_4(t) / (2k_0^1) dt \\ \sigma_{nn}^1(s, n) &= (2\pi)^{-1} \int_a^b [-m_3 g_3(s, n) + m_1 g_4(s, n)] f_1(t) + \\ &+ [g_1(s, n) + m_1 g_2(s, n)] f_2(t) + [g_3(s, n) - g_4(s, n)] f_3(t) / (2k_0^1) - \\ &- g_2(s, n) f_4(t) / (2k_0^1) dt \\ u_s^1(s, n) &= (2\pi)^{-1} \int_a^b [m_2^1 g_2(s, n) f_1(t) 2k_0^1 + \\ &+ [m_4 g_3(s, n) + m_1^1 g_4(s, n)] f_2(t) 2k_0^1 + [g_1(s, n) + m_1 g_2(s, n)] f_3(t) + \\ &+ [m_3 g_3(s, n) - m_1 g_4(s, n)] f_4(t)] dt \\ v_s^1(s, n) &= (2\pi)^{-1} \int_a^b \{ [m_4 g_3(s, n) - m_1^1 g_4(s, n)] f_1(t) 2k_0^1 + \\ &- m_1^1 g_2(s, n) f_2(t) 2k_0^1 - [m_3 g_3(s, n) + m_1 g_4(s, n)] f_3(t) + \\ &+ [g_1(s, n) - [m_1 g_2(s, n)] f_4(t)] \} dt \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

$$g_1(s, n) = \frac{2n}{(t-s)^2 + n^2}, \quad g_2(s, n) = n \frac{(t-s)^2 - n^2}{[(t-s)^2 + n^2]^2}$$

$$g_3(s, n) = \frac{t-s}{(t-s)^2 + n^2}, \quad g_4(s, n) = \frac{2n^3(t-s)}{[(t-s)^2 + n^2]^2}$$

$$m_1 = (1 + k_1^1/k_0^1)/2, \quad m_2 = -(1 + k_2^1/k_0^1)/2$$

$$m_3 = (3 - k_1^1/k_0^1)/2, \quad m_4 = (m_2 - k_1^1/k_0^1 m_3)/2$$

$$k_0^p = (1 + \nu_p)/(8\nu_p), \quad k_1^p = (3 - \nu_p)/(8\nu_p), \quad k_2^p = (5 + \nu_p)/(8\nu_p)$$

$$\nu_p = E_p/[2(1 + \nu_p)]$$

$$\nu_p = \begin{cases} 3 - 4\nu_p & \text{в случае плоской деформации;} \\ (3 - \nu_p)/(1 + \nu_p) & \text{в случае обобщенного плоского напряженного состояния;} \end{cases}$$

E_p, ν_p — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала матрицы ($p=1$) и включения ($p=0$) соответственно.

С помощью интегрального представления функции напряжений $\Phi^2(x, y)$

$$\Phi^2(x, y) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\zeta, y) e^{-i\zeta x} d\zeta \quad (1.7)$$

где

$$\varphi^2(\zeta, y) = [B_1(\zeta) + \zeta y B_2(\zeta)] \exp(-\zeta y)$$

Согласно формулам (1.2), (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi^2}{\partial x^2} &= -\alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial n^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s^2} - 2\alpha\beta \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s \partial n} \\ \frac{\partial^2 \Phi^2}{\partial x \partial y} &= -\alpha\beta \left(\frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial n^2} \right) - (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s \partial n} \text{ на } L \\ (\alpha &= \cos \theta_0, \quad \beta = \sin \theta_0) \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (1.5), (1.7), нетрудно записать систему двух алгебраических уравнений для определения неизвестных $B_j(\zeta)$ ($j=1, 2$). Решив эту систему и производя несложные выкладки, получим

$$\varphi_{xx}^2(x, y) = (\pi)^{-1} \sum_{j=1}^2 \int_{a_j}^b S_{1j}(x, y, t) f_j(t) dt$$

$$\varphi_{yy}^2(x, y) = (\pi)^{-1} \sum_{j=1}^2 \int_{a_j}^b S_{2j}(x, y, t) f_j(t) dt$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^2(x, y) &= (\pi)^{-1} \sum_{j=1}^4 \int_a^b S_{2j}(x, y, t) f_j(t) dt \\ u_i^2(x, y) &= k_0^1 \sigma_{xx}^2(x, y) - k_1^1 \sigma_{yy}^2(x, y) \\ v^2(x, y) &= (\pi)^{-1} \sum_{j=1}^4 \int_a^b S_{3j}(x, y, t) f_j(t) dt\end{aligned}\quad (1.8)$$

где $S_{ij}(x, y, t)$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) — вполне регулярные функции, явные выражения которых не приводятся вследствие некоторой их громоздкости.

Имея функции $\Phi^1(s, n)$, $\Phi^2(x, y)$, путем суммирования определяем напряженно-деформируемое состояние рассматриваемого тела в любой его точке:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{nn}(s, n) &= \varepsilon_{nn}^0(s, n) + \varepsilon_{nn}^1(s, n) + \varepsilon_{nn}^2(s, n) \\ \varepsilon_{sn}(s, n) &= \varepsilon_{sn}^0(s, n) + \varepsilon_{sn}^1(s, n) + \varepsilon_{sn}^2(s, n) \\ u_s(s, n) &= u_s^0(s, n) + u_s^1(s, n) + u_s^2(s, n) \\ v_s(s, n) &= v_s^0(s, n) + v_s^1(s, n) + v_s^2(s, n)\end{aligned}\quad (1.9)$$

Переходя в (1.9) к пределу, когда $n \rightarrow +0$, получим следующие выражения характеристик напряженно-деформируемого состояния на верхнем берегу включения

$$\begin{aligned}\varepsilon_{nn}(s, +0) &= \varepsilon_{nn}^0(s) + f_1(s)/2 + m_1 t_2(s) + t_4(s)/(2k_0^1) + K_1(s) \\ \varepsilon_{sn}(s, +0) &= \varepsilon_{sn}^0(s) + f_2(s)/2 - m_1 t_1(s) + t_3(s)/(2k_0^1) + K_2(s) \\ u_s(s, +0) &= u_s^0(s) + f_3(s)/2 - m_1 t_2(s) + m_1 t_4(s) + 2k_0^1 K_3(s) \\ v_s(s, +0) &= v_s^0(s) + f_4(s)/2 + m_1 t_1(s) - m_1 t_4(s) + 2k_0^1 K_4(s)\end{aligned}\quad (1.10)$$

Значения для соответствующих величин на нижней кромке включения определяются из (1.1) и (1.10). В соотношениях (1.10) приняты обозначения

$$t_p(s) = (2\pi)^{-1} \int_a^b \frac{f_p(t) dt}{t-s}, \quad K_p(s) = (\pi)^{-1} \sum_{j=1}^4 \int_a^b R_{pj}(s, t) f_j(t) dt$$

($p = 1, 2, 3, 4$)

$$R_{1j}(s, t) = S_{1j}(\beta s, \gamma s, t) + S_{2j}(\beta s, \gamma s, t) \cos 2\theta_0 - S_{1j}(\beta s, \gamma s, t) \sin 2\theta_0$$

$$R_{2j}(s, t) = S_{2j}(\beta s, \gamma s, t) \sin 2\theta_0 + S_{3j}(\beta s, \gamma s, t) \cos 2\theta_0$$

$$R_{3j}(s, t) = m_3 S_{1j}(\beta s, \gamma s, t) - m_1 [S_{2j}(\beta s, \gamma s, t) \cos 2\theta_0 - S_{3j}(\beta s, \gamma s, t) \sin 2\theta_0]$$

$$\begin{aligned}R_{4j}(s, t) &= [m_3 S_{1j}(\beta s, \gamma s, t) - m_1 S_{2j}(\beta s, \gamma s, t)] \alpha + \\ &+ [k_2^1 (2k_0^1) S_{3j}(\beta s, \gamma s, t) - S_{4j}(\beta s, \gamma s, t)/2] \beta\end{aligned}$$

Подстановка соотношений (1.10) в условия взаимодействия тонкостенного упругого включения с матрицей [3] приводит к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} t_2(s) + \lambda_{11}t_1(s) + \lambda_{12} \int_a^b f_2(t) dt - \lambda_{13}K_2(s) - \lambda_{14}K_1(s) &= F_1(s) \\ t_3(s) + \lambda_{21}t_1(s) + \lambda_{22} \int_a^b f_3(t) dt - \lambda_{23}K_2(s) + \lambda_{24}K_1(s) &= F_2(s) \\ t_4(s) + \lambda_{31}t_2(s) + \lambda_{32} \int_a^b [i_3f_2(t) + i_4f_1(t)] dt - \lambda_{33}K_1(s) &= F_3(s) \\ f_3(s) &= -k_3^0 f_1(s), \quad s \in [a, b] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1(s) &= [k_0^0 N_a - u_a^0(s) - k_1^0 \varepsilon_{nn}(s)]/\Lambda_1 \\ F_2(s) &= \mu_0 [v_a^0(s) - \varepsilon_{nn}^0(s)/\mu_0 - c_{aa}(2h)]/\Lambda_2 \\ F_3(s) &= [\varepsilon_{nn}(s) + d_{aa}(2hk_0^0) - N_a k_1^0/k_0^0]/\Lambda_3 \\ \lambda_{11} &= (m_2 - k_0^0/k_1^0)/(4\Lambda_1), \quad \lambda_{12} = k_1^0/\Lambda_1, \quad \lambda_{13} = 1/\Lambda_1 \\ \lambda_{21} &= (-m_3 + 4\mu_0 m_1)/(4\Lambda_2), \quad \lambda_{22} = 1/\Lambda_2, \quad \lambda_{23} = \mu_0/\Lambda_2 \\ \lambda_{31} &= m_3/\Lambda_3, \quad \lambda_{32} = 1/\Lambda_3, \quad \lambda_{33} = k_0^0/(2hk_1^0\Lambda_3), \quad \lambda_{34} = -\mu_0/(2h\Lambda_2) \\ \lambda_3 &= k_1^0/(2kk_0^0\Lambda_3), \quad \lambda_4 = -1/(2hk_0^0\Lambda_3), \quad \Lambda_1 = -m_2 + k_1^0 m_2 \\ \Lambda_2 &= m_3 \mu_0 - 1/(4k_0^0), \quad \Lambda_3 = 1/(4k_1^0), \quad k_3^0 = [(k_1^0)^2 - (k_0^0)^2]/k_1^0 \end{aligned}$$

Искомые функции удовлетворяют дополнительным условиям

$$\int_a^b f_j(t) dt = A^j \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (1.12)$$

$$A^1 = 0, \quad A^2 = 2h(N_b - N_a), \quad A^3 = c_b - c_a, \quad A^4 = d_b - d_a$$

Нормальные напряжения N , на торцах включения, а также перемещения c_s , d_s ($s = a, b$) нижней точки торца включения относительно верхней его точки вычисляются по формулам работы [3].

В случае абсолютно жесткого включения ($E_\infty = \infty$) система (1.11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} m_1 t_1(s) - K_2(s) &= -v_a^0(s) \\ m_1 t_2(s) - K_1(s) &= -u_a^0(s) \\ f_3(s) &= f_1(s) = 0, \quad s \in [a, b] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Когда же $E_s \rightarrow 0$, получаем систему сингулярных интегральных уравнений для трещины в полуплоскости

$$\begin{aligned} \Lambda_1 f_1(s) + K_1(s) &= z_{\pi_0}^0(s) \\ \Lambda_3 f_3(s) + K_3(s) &= z_{\pi_0}^0(s) \\ f_1(s) = f_3(s) &= 0, \quad s \in [a, b] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Уравнения (1.14) совпадают с таковыми работы [7].

2. Решение системы сингулярных интегральных уравнений

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) ищем в виде

$$f_j(\zeta) = \left[A_0^j + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^j T_n(\zeta) \right] / \sqrt{1-\zeta^2} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (2.1)$$

где $\zeta = (s+c)/a_0$, $2a_0 = b-a$, $2c = b+a$. $T_n(\zeta)$ — полиномы Чебышева первого рода. Подставляя (2.1) в условия (1.12) и интегрируя, получаем

$$A_0^j = A^j / (a_0 \pi) \quad (2.2)$$

Подстановка ряда (2.1) в систему интегральных уравнений (1.11) и обычная процедура метода ортогональных полиномов приводят к системе алгебраических уравнений для определения искомых коэффициентов разложений

$$\begin{aligned} i_{11} A_{k-1}^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(i_{k-1,n} - i_1^1 B_{n-1,k}) A_n^1 + \sum_{j=1}^4 H_{n,k}^{1j} A_n^j \right] &= F_k^1 \\ i_{21} A_{k-1}^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(i_{k+1,n} - i_2^2 B_{n-1,k}) A_n^2 + \sum_{j=1}^4 H_{n,k}^{2j} A_n^j \right] &= F_k^2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(i_{31} i_{k+1,n} - i_3^3 B_{n-1,k}) A_n^2 + (i_{k+1,n} - i_4^4 B_{n-1,k}) A_n^4 + \sum_{j=1}^4 H_{n,k}^{3j} A_n^j \right] &= F_k^3 \\ A_{k+1}^3 &= -k_3^0 A_k^1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

где i_{kn} — символ Кронекера и

$$F_k^1 = G_k^1 + i_1 B_{-1,k} A_0^1 - \sum_{j=1}^4 H_{0,k}^{1j} A_0^j$$

$$F_k^2 = G_k^2 + i_2 B_{-1,k} A_0^2 - \sum_{j=1}^4 H_{0,k}^{2j} A_0^j$$

$$F_k^3 = G_k^3 + i_3 A_0^2 + i_4 A_0^4 B_{-1,k} - \sum_{j=1}^4 H_{0,k}^{3j} A_0^j$$

$$G_k^j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 Q_k(\zeta) U_k(\zeta) / \sqrt{1-\zeta^2} d\zeta$$

$$Q_1(\zeta) = F_1(\zeta) - A^{1/2} i_1 / (2a_0), \quad Q_2(\zeta) = F_2(\zeta) - A^{1/2} i_2 / (2a_0)$$

$$Q_3(\zeta) = F_3(\zeta) - (i_3 A^2 + i_4 A^4) / (2a_0), \quad i_j = a_0 i_j$$

$$B_{n-1,k} = 1/(n^2 - k^2) - 1/[n^2 - (k+2)^2]$$

$$H_{nk}^{pj} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_k(\zeta) |1 - \zeta^2|^{-1/2} \int_{-1}^1 h_{nj}(\zeta, \tau) T_n(\tau) (1 - \tau^2)^{-1/2} d\tau d\zeta$$

$$h_{1j}(\zeta, \tau) = -i_{11} R_{1j}(\zeta, \tau) - i_{13} R_{3j}(\zeta, \tau)$$

$$h_{2j}(\zeta, \tau) = -i_{22} R_{2j}(\zeta, \tau) + i_{23} R_{4j}(\zeta, \tau)$$

$h_{3j}(\zeta, \tau) = -i_{32} R_{1j}(\zeta, \tau)$, $U_k(\zeta)$ — полиномы Чебышева второго рода: ($p = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$; $k, n = 0, 1, 2, \dots$).

Для примера более подробно рассмотрен случай упругого равновесия композита под действием усилий $\sigma_{20} = p_0$. Коэффициенты интенсивности напряжений у левого торца включения определяются формулами

$$\{k_i, k_{ij}\} = \lim_{s \rightarrow -\infty} [1/\sqrt{2(a-s)} \{ \sigma_{20}(s, 0), \sigma_{20}(s, 0) \}]$$

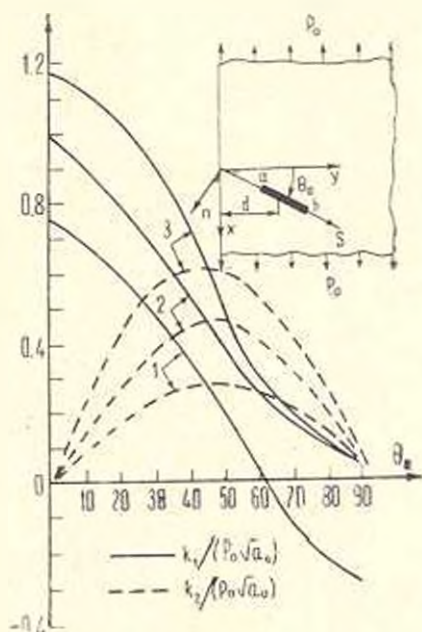
Система уравнений (2.3) решалась методом редукции. Контроль сходимости проводился путем сравнения функций $f_j^N(x)$ ($j = 1, 4$), вычисленных при $N = M$ и $N = 2M$ соответственно. В рассмотренном примере для достижения точности вычислений в 5%

оказалось возможным, в зависимости от относительной жесткости включения E_0/E_1 , ограничиться решением системы уравнений от 15-го до 30-го порядка. Вычисления проводились при фиксированном расстоянии $d = cx = 2a_0$ центра включения от границы полуплоскости.

На графике представлена зависимость безразмерных коэффициентов интенсивности напряжений $k_i^* = k_i/(p_0 \sqrt{a_0})$ ($i = 1, 2$), где p_0/a_0 — значение коэффициента интенсивности напряжений для бесконечной плоскости с трещиной длины $2a_0 = \pi b - d$, от угла наклона включения θ_0 . Кривые 3—1 соответствуют следующим значениям относительной жесткости E_0/E_1 : 0.01, 0.1, 10.0. Результаты, полученные при

$E_0/E_1 = 0.01$, отличаются от соответствующего решения для полуплоскости с трещиной [4] не более, чем на 2—3 %.

Львовский ордена Ленина
государственный университет им. Ивана Франко



Фиг. 1.

Поступила 10 I 1979

ԿԱՄԱՎՈՐ ՈՒՂՂՎԱՆ ԴՄԱՅԻՆ ԷԼԱՍՏԻԿԱՆ ՆԵՐՊՐԱԿՈՎ
ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ա ռ լ ի ղ ի ղ

Դժային թիրություններով միջավայրերի համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրների լուծման համար դարգացվում է եղանակ, որը հիմնված է ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդի կիրառման վրա:

Դիտարկվում է վերջավոր երկարությամբ բարակ առաձգական ներդրումով իզոտրոպ կիսահարթություն: Քննվում է թվային օրինակ:

SEMI-PLANE WITH LINEAR ELASTIC INCLUSION OF
ARBITRARY ORIENTATION

D. V. GRILITSKI, A. A. JEVTUSHENKO, G. T. SULIM

S u m m a r y

An approach to solving the plane-theory-of-elasticity problems for media with linear defects is considered. This approach is based on the integral transformation method for bodies with cracks in the case of isotropic semi-plane with thin elastic inclusion of finite length.

A numerical example is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хачикян А. С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. Изв. АН АрмССР, Механика, 1970, т. 23, № 3, стр. 14—22.
2. Сулим Г. Т., Грилицкий А. В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 11, стр. 58—65.
3. Грилицкий А. В., Сулим Г. Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, стр. 520—529.
4. Erdogan F., Arin K. A half plane and strip with an arbitrarily located crack. Int. Journ. of Fract., April 1975, v. 11, No. 2, pp. 191—204.
5. Снеддон Н. Интегральные преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 1. ИЛ, М., «Наука», 1969, 1970.
7. Krenk S. The problem of an inclined cracking an elastic strip Rapp. Afd. baereude konstr. Danm. tekn. hjsk., 1974, 11, No 50, 42 pp.