ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

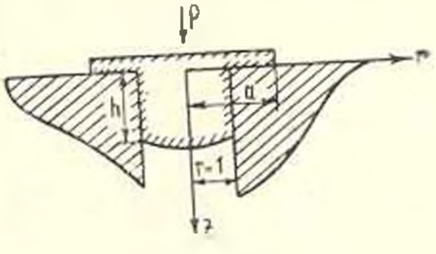
В. С. МАКАРЯН, С. О. ПАПОЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЫЕМКОЙ

В работе исследуется осесимметричная деформация упругого изотропного полупространства с вертикальной полубесконечной цилиндрической выемкой, когда в цилиндрическую выемку вдавливается круговой в плане штамп, имеющий в осевом сечении T-образную форму. На плоской поверхности полупространства вне штампа заданы нормальные усилия, а цилиндрическая поверхность вне штампа свободна от напряжений. Близкие по постановке задачи рассмотрены в работах [1, 2, 3]. Более подробный обзор работ, посвященных граничным задачам для полупространства с цилиндрической выемкой можно найти в [1].

При помощи интегральных преобразований Фурье и Вебера-Орра решение задачи сводится к системе парных интегральных уравнений, содержащих комбинации бесселевых функций и тригонометрическую функцию. После преобразований система сводится к квазивполне регулярным системам линейных алгебраических уравнений.

1. Пусть упругое полупространство ($z > 0$) содержит в себе выходящую на свою границу ($z=0$) полубесконечную цилиндрическую выемку постоянного радиуса ($r=1$). При этом ось цилиндрической выемки перпендикулярна к граничной плоскости полупространства и совпадает с осью штампа. В цилиндрическую выемку вдавливается круговой в плане штамп, имеющий в осевом сечении T-образную форму (фиг. 1). На участках контакта ($z=0$, $1 \leqslant r \leqslant a$), ($r=1$, $0 \leqslant z \leqslant h$) трение отсутствует. При этом глубина h неизвестна и подлежит определению.



Фиг. 1.

Граничные условия задачи запишутся в виде

$$\tau_{rz}\big|_{z=0} = 0 \quad (1 < r < \infty), \qquad \tau_{rz}\big|_{r=1} = 0 \quad (0 < z < \infty) \tag{1.1}$$

$$\sigma_z\big|_{z=0} = \varphi(r) \quad (r > a), \qquad \sigma_r\big|_{r=1} = 0 \quad (h < z < \infty) \tag{1.2}$$

$$u_z\big|_{z=0} = C \quad (1 \leqslant r \leqslant a), \qquad u_r\big|_{r=1} = \Psi(z) \quad (0 \leqslant z \leqslant h) \tag{1.3}$$

где $\Psi(z)$ — параболическая функция, определяющая форму цилиндрической поверхности T-образного штампа.

2. Бигармоническую функцию Лява представим в виде суммы интегралов Фурье и Фурье—Вебера

$$\Phi(r,\ z) = \int_0^\infty [A(\mu) + \mu z B(\mu)]\, e^{-\mu z}\, W_0(\mu r)\, d\mu +$$

$$+ \int_0^\infty [C(\mu) K_0(\mu r) + \mu D(\mu)\, r K_1(\mu r)] \sin \mu z d\mu \tag{2.1}$$

$$(1 \leqslant r < \infty), \quad (0 \leqslant z < \infty)$$

где $K_n(x)$ — функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента,

$$W_n(\mu r) = J_n(\mu r)\, Y_1(\mu) - Y_n(\mu r)\, J_1(\mu)$$

$J_n(x)$, $Y_n(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента соответственно первого и второго рода. Отметим, что имеют место соотношения

$$W_1(\mu) = 0, \qquad W_0(\mu) = -\frac{2}{\pi\mu} \tag{2.2}$$

Функции $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C(\mu)$ и $D(\mu)$ неизвестны и подлежат определению.

Пользуясь известными формулами, выражающими компоненты напряжений и перемещений через бигармоническую функцию Лява (2.1), и удовлетворяя условиям (1.1), при помощи интегральных преобразований Фурье и Вебера—Орра функции $A(\mu)$ и $C(\mu)$ выразим через фучкции $B(\mu)$ и $D(\mu)$:

$$A(\mu) = 2\nu B(\mu), \quad K_1(\mu)\, C(\mu) = [2(1-\nu) K_1(\mu) - \mu K_0(\mu)]\, D(\mu) \tag{2.3}$$

Удовлетворение смешанных условий (1.2—1.3) приводит к следующей системе из двух парных интегральных уравнений, содержащих комбинации бесселевых функций и тригонометрическую функцию:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty B^*(\mu)\, W_0(\mu r)\, d\mu = -\frac{GC}{1-\nu} \quad (1 \leqslant r \leqslant a) \\ &\int_0^\infty \mu B^*(\mu)\, W_0(\mu r)\, d\mu - \int_0^\infty \mu D^*(\mu) \Big[2K_0(\mu r) - \mu r K_1(\mu r) + \\ &\qquad + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)} K_0(\mu r) \Big] d\mu - \varphi(r) = 0 \quad (a < r < \infty) \end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty D^*(\mu)\, K_1(\mu) \cos \mu z d\mu = \frac{G\Psi(z)}{1-\nu} \quad (0 \leqslant z < h) \\ &\int_0^\infty \mu D^*(\mu)\, K_1(\mu)\, Z(\mu) \cos \mu z d\mu - \int_0^\infty \mu B^*(\mu)(1-\mu z)\, e^{-\mu z}\, W_0(\mu) d\mu = 0 \\ &\qquad (h < z < \infty) \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

Здесь

$$B^*(\mu) = \mu^2 B(\mu), \quad D^*(\mu) = \mu^2 D(\mu)$$

$$Z(\mu) = \mu \left[1 - \frac{K_0^2(\mu)}{K_1^2(\mu)} \right] + \frac{2(1-\nu)}{\mu}$$

G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Доопределим первое уравнение в (2.4) на интервале ($r > a$) и второе — в (2.5) на интервале ($0 < z < h$)

$$\int_0^\infty B^*(\mu) W_1(\mu r)\, d\mu = \begin{cases} -\dfrac{GC}{1-\nu} & (1 < r < a) \\ -\dfrac{G}{1-\nu} f(r) & (r > a) \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\int_0^\infty \mu D^*(\mu) K_1(\mu) Z(\mu) \cos \mu z\, d\mu - \int_0^\infty \mu B^*(\mu)(1-\mu z) e^{-\mu z} W_1(\mu) d\mu =$$

$$= \begin{cases} -p(z) & (0 < z < h) \\ 0 & (h < z < \infty) \end{cases} \tag{2.7}$$

Дифференцируя (2.6) по r, (2.7) по z и применяя к ним соответственно преобразования Вебера—Орра и Фурье, функции $B^*(\mu)$ и $D^*(\mu)$ выразим через новые функции $p(z)$ и $f(r)$

$$B^*(\mu) = \frac{G}{(1-\nu)\Delta(\mu)} \int_a^\infty r f'(r) W_1(\mu r) d\mu = \frac{G}{1-\nu} \overline{f}(\mu)$$

$$D^*(\mu) = -\frac{8\mu G (1-\nu)^{-1}}{\pi^2 K_1(\mu) Z(\mu)} \int_0^\infty \frac{\xi \overline{f}(\xi) d\xi}{(\xi^2+\mu^2)^2} - \tag{2.8}$$

$$- \frac{2}{\pi \mu K_1(\mu) Z(\mu)} \int_0^h p(z) \cos \mu z\, dz$$

где

$$\Delta(\mu) = Y_1^2(\mu) + J_1^2(\mu)$$

Подставляя значения (2.8) во второе уравнение (2.4) и в первое уравнение (2.5), для определения неизвестных функций $f'(t)$ и $p(z)$ получим следующую систему двух интегральных уравнений

$$\int_0^\infty t f'(t)\, dt \int_0^\infty \mu \left[\frac{W_1(\mu r) W_1(\mu t)}{\Delta(\mu)} - \frac{2}{\pi} \frac{M(\mu r)}{K_1^2(\mu) Z(\mu)} \right] t K_0(\mu t) K_1(\mu) -$$

$$
-K_0(\mu)K_1(\mu t)]\, d\mu + \frac{2}{\pi}\frac{1-\nu}{G}\int_0^h p(z)\,dz\int_0^\infty \frac{M(\mu r)\cos\mu z\,d\mu}{K_1(\mu)Z(\mu)} -
$$

$$
-\frac{1-\nu}{G}\varphi(r) = 0 \quad (a < r < \infty) \tag{2.9}
$$

$$
\int_0^h p(y)dy\int_0^\infty \frac{\sin\mu z\cos\mu y\,d\mu}{Z(\mu)} + \frac{G}{1-\nu}\int_a^\infty tf'(t)\,dt\int_0^\infty \frac{\mu\sin\mu z}{K_1^2(\mu)Z(\mu)}[K_0(\mu)K_1(\mu t) -
$$

$$
-tK_0(\mu t)K_1(\mu)]\,d\mu - \frac{\pi G}{2(1-\nu)}\Psi'(z) = 0 \quad (0 < z < h) \tag{2.10}
$$

где

$$
M(\mu r) = 2K_1(\mu r) - \mu rK_1(\mu r) + \mu\frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}K_0(\mu r)
$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению системы (2.9), (2.10). После определения функции $p(z)$ и $f'(t)$ все неизвестные будут определены.

3. Пользуясь интегральными соотношениями [4]

$$
W_1(\mu r) = \frac{2}{\pi r}\int_r^\infty \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-r^2}}[\sin\mu y J_1(\mu) - \cos\mu y Y_1(\mu)]
$$

$$
K_0(\mu r) = \int_r^\infty \frac{e^{-\mu y}dy}{\sqrt{y^2-r^2}}, \qquad rK_1(\mu r) = \int_r^\infty \frac{ye^{-\mu y}dy}{\sqrt{y^2-r^2}}
$$

от функции $f'(t)$ перейдем к функции

$$
H(t) = t\int_a^t \frac{f'(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}}
$$

следующим образом:

$$
\int_a^\infty xf'(x)W_1(\mu x)\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_a^\infty f'(x)\,dx\int_x^\infty \frac{t[\cos\mu t Y_1(\mu) - \sin\mu t J_1(\mu)]\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}} =
$$

$$
= -\frac{2}{\pi}\int_a^\infty t[\cos\mu t Y_1(\mu) - \sin\mu t J_1(\mu)]\,dt\int_a^t \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{t^2-x^2}} =
$$

$$
= -\frac{2}{\pi}\int_a^\infty H(t)[\cos\mu t Y_1(\mu) - \sin\mu t J_1(\mu)]\,dt
$$

$$\int_a^\infty z^2 f'(z)\,K_0(\beta z)\,dz = \int_a^\infty f'(z)\left[\int_z^\infty \frac{t^2 e^{-\beta t}dt}{\sqrt{t^2-z^2}} - \frac{1}{\beta}\int_z^\infty \frac{t e^{-\beta t}dt}{\sqrt{t^2-z^2}}\right] =$$

$$= \int_a^\infty f'(z)\,dz \int_a^\infty \frac{t^2 e^{-\beta t}dt}{\sqrt{t^2-z^2}} - \frac{1}{\beta}\int_a^\infty f'(z)\,dz \int_z^\infty \frac{t e^{-\beta t}dt}{\sqrt{t^2-z^2}} =$$

$$= \int_a^\infty t^2 e^{-\beta t}dt \int_a^t \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{t^2-z^2}} - \frac{1}{\beta}\int_a^\infty t e^{-\beta t}dt \int_a^t \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{t^2-z^2}} =$$

$$= \int_a^\infty H(t)\left[\, t e^{-\beta t} - \frac{e^{-\beta t}}{\beta}\,\right] dt$$

$$\int_a^\infty z f'(z)\,K_1(\beta z)\,dz = \int_a^\infty f'(z)\,dz \int_z^\infty \frac{t e^{-\beta t}dt}{\sqrt{t^2-z^2}} =$$

$$= \int_a^\infty t e^{-\beta t}dt \int_a^t \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{t^2-z^2}} = \int_a^\infty H(t)\,e^{-\beta t}\,dt$$

после чего применив к уравнению (2.9) оператор

$$I\varphi = \int_t^\infty \frac{r\varphi(r)\,dr}{\sqrt{r^2-t^2}}$$

и учитывая интегральное соотношение [4]

$$\mu\int_t^\infty \frac{r W_0(\mu r)\,dr}{\sqrt{r^2-t^2}} = \cos\mu t\,Y_1(\mu) - \sin\mu t\,J_1(\mu)$$

для определения неизвестных функций $H(t)$ и $p(z)$ получим следующую систему интегральных уравнений:

$$H(x) = \int_a^\infty H(t)\,K_{11}(t,\,x)\,dt + \int_{-h}^{h} p(t)\,K_{12}(t,\,x)\,dt + \Phi_1(x) \quad (a < x < \infty) \tag{3.1}$$

$$\int_{-h}^{h} p(y)\,dy\left[\frac{1}{x-y} - \frac{1-2\nu}{2}\,\mathrm{sign}\,(x-y) + K_{21}(x,\,y)\right] +$$

$$+ \int_a^\infty H(y)\,K_{22}(x,\,y)\,dy + \Phi_2(x) = 0 \quad (-h < x < h) \tag{3.2}$$

Здесь введены обозначения

$$K_{11}(t, x) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\left[1 - \mu x + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right]\left[1 - \mu t + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right]}{\mu K_1^2(\mu) Z(\mu)} + \frac{I_1(\mu)}{K_1(\mu)} \right\} e^{-\mu(x+t)} d\mu$$

$$K_{12}(t, x) = \frac{1-\nu}{2G} \int_0^\infty \frac{\left[1 - \mu x + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right] e^{-\mu x} \cos \mu t \, d\mu}{\mu K_1(\mu) Z(\mu)}$$

$$K_{21}(x, t) = \int_0^\infty \frac{\sin \mu x \cos \mu t}{\gamma Z(\mu)} \left\{ (1 - 2\nu - \mu) \left[\left(1 - \frac{K_0^2(\mu)}{K_1^2(\mu)}\right) \mu - 1 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1-\nu)(1-2\nu)}{\mu} - 1 \right\} d\mu$$

$$K_{22}(x, t) = \frac{2G}{1-\nu} \int_0^\infty \frac{\left[1 - \mu t + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right] \sin \mu x \, e^{-\mu t} \, d\mu}{K_1(\mu) Z(\mu)}$$

$$\Phi_1(x) = -\frac{1-\nu}{G} \int_x^\infty \frac{r \varphi(r) \, dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad \Phi_2(x) = -\frac{\pi G}{1-\nu} \Psi'(x)$$

Заметим, что интегралы $K_{11}(t, x)$, $K_{12}(t, x)$ и $K_{22}(t, x)$ сходятся равномерно по обеим переменным в интервалах их изменяемости и являются бесконечно дифференцируемыми функциями по обеим переменным. Функция $K_{21}(t, x)$ имеет суммируемую квадратом производную по обеим переменным в квадрате $|-h < x < h;\ -h < t < h|$.

Кроме того, имеет место также оценка

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |K_{11}(x, t)| \, dx dt < \infty$$

Допустим, что известные функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ заданы таким образом, что $\Phi(x)$ является непрерывной функцией от x $(-h < x < h)$, а $\Phi_1(x)$ имеет на бесконечности порядок выше $0(1/x)$.

4. Для сведения системы интегральных уравнений (3.1), (3.2) к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений функции $\overline{H}(x) = \frac{1}{x} H\left(\frac{1}{x}\right)$ и $p(x)$ представим в виде рядов соответственно по многочленам Лежандра и Чебышева первого рода

$$\overline{H}(x) = \sum_{n=1}^\infty a(4n-1) Y_n P_{2n-1}(ax) \tag{4.1}$$

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{T_{2n}(x/h)\,h}{\sqrt{h^2 - x^2}} \tag{4.2}$$

Подставляя (4.1) и (4.2) в (3.2), получим следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} X_m A^{(2)}_{m,n} + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m B^{(2)}_{m,n} + b^{(2)}_n \tag{4.3}$$

$$Y_n = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m B^{(1)}_{m,n} + \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} X_m A^{(1)}_{m,n} + b^{(1)}_n \tag{4.4}$$

где

$$A^{(1)}_{m,n} = \frac{1}{2} \int_0^{1/a} P_{2n-1}(ax)\,dx \int_{-h}^{h} \sqrt{h^2 - y^2}\, U_{2m-1}(y/h) \left| x^{-1} K_{12}\left(\frac{1}{x}, y\right)\right]_y dy$$

$$B^{(1)}_{m,n} = \int_0^{1/a} P_{2n-1}(ax)\,dx \int_0^{1/a} [P_{2(m-1)}(ay) - P_{2m}(ay)] \left| (yx)^{-1} K_{11}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\right]_y dy$$

$$A^{(2)}_{m,n} = \frac{1}{\pi^2 h^2} \int_{-h}^{h} \sqrt{h^2 - x^2}\, U_{2n-1}(x/h)\,dx \int_{-h}^{h} \sqrt{h^2 - y^2}\, U_{2m-1}(y/h) \times$$

$$\times [K_{21}(x, y)]_y\, dy - \frac{16h(1-2\nu)mn}{\pi[1 + 16(n^2 - m^2)^2 - 8n^2 - 8m^2]}$$

$$B^{(2)}_{m,n} = \frac{2}{\pi^2 h^2} \int_{-h}^{h} \sqrt{h^2 - x^2}\, U_{2n-1}(x/h)\,dx \int_0^{1/a} [P_{2(m-1)}(ay) -$$

$$- P_{2m}(ay)] \left| y^{-1} K_{22}\left(x, \frac{1}{y}\right)\right]_y dy$$

$$b^{(1)}_n = \int_0^{1/a} P_{2n-1}(ax)\, \Phi_1(1/x)\, x^{-1} dx +$$

$$+ X_0 h \int_0^{1/a} P_{2n-1}(ax)\,dx \int_{-h}^{h} \frac{K_{12}(1/x, y)\,dy}{x\sqrt{h^2 - y^2}}$$

$$b^{(2)}_n = \frac{2}{\pi^2 h^2} \int_{-h}^{h} U_{2n-1}(x/h) \sqrt{h^2 - x^2}\, \Phi_2(x)\,dx +$$

$$+ \frac{2X_0}{\pi^2 h} \int_{-h}^{h} \sqrt{h^2 - x^2}\, U_{2n-1}(x/h)\,dx \int_{-h}^{h} \frac{K_{21}(x, y)\,dy}{\sqrt{h^2 - y^2}} - \frac{(1-2\nu) X_0 h}{\pi(4n^2 - 1)^2} 16n$$

Коэффициент X_n определяется из первого уравнения (2.5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n + \frac{\pi G}{2(1-\nu)} \int_0^h \Psi(z)\, dz = 0$$

где

$$A_n = \frac{\pi h}{2} (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{\sin \mu h J_{2n}(\mu h)\, d\mu}{\mu^2 Z(\mu)}$$

$$B_n = \frac{G}{1-\nu} \int_0^{1/a} [P_{2(n-1)}(y) - P_{2n}(y)]\, dy \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\left[1 - \mu/y + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right] \sin \mu h e^{-\mu/y}\, d\mu}{y \mu^2 K_1(\mu) Z(\mu)} \right\}_y$$

Учитывая свойства функций $K_{11}(x, t)$, $K_{12}(x, t)$, $K_{21}(x, t)$ и $K_{22}(x, t)$, а также асимптотическое представление [4]

$$P_n(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\cos \left[(n + 1/2)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{(\sin \theta)^{1/2}}$$

для больших n получаем, что системы (4.3) и (4.4) квазивполне регулярны. Величина зоны контакта $z = h$ определяется из условия ограниченности нормальных напряжений

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(h) = 0$$

Равнодействующая контактных напряжений $\sigma_z|_{z=0}$ $(1 < r < a)$ определяется из условия равновесия штампа

$$\int_1^a \sigma_z(r, z)|_{z=0}\, r dr = \frac{P}{2\pi}$$

Авторы выражают благодарность проф. Б. А. Абрамяну за внимание к работе.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 XI 1979

Վ. Ս. ՄԱԿԱՐՅԱՆ, Ս. Հ. ՊԱՊՈՅԱՆ

ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՓՈՐՎԱԾՔՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կիսաանվերջ գլանային փորվածքով առաձգական կիսատարածության համար կոնտակտային խնդիրը, երբ փորվածքի մեջ սեղմվում է T-ի ձև ունեցող դրոշմը։

Վեբեր-Օրրի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ խնդրի լուծումը բերվում է զույգ ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը։ Օգտագործելով Չեբիշևի և Լեժանդրի բազմանդամները վերջինիս լուծումը հանգեցվում է քվազի-լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգերի լուծմանը։

ON THE CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC SEMI-SPACE WITH SEMI-INFINITE CYLINDRICAL CAVITY

V. S. MAKARIAN, S. H. PAPOYAN

Summary

The contact problem for elastic semi-space with semi-infinite cylindical cavity is considered, where a punch of T-shape in its axial section is pressed in the cavity.

By means of Fourier and Weber-Orre's transforms the solution of the problem is reduced to a system of dual integral equations with combinations of Bessel's functions and a trigonometric function. After transformations the system is reduced to quasi-quite regular infinite systems of linear algebraic equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Некоторые осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием. Известия АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 2, 1969.
2. *Srivastav R. P., Narain Prem.* Stress distribution due to pressurized exterior crak in an infinite isotropic elastic medium with coaxial cylindrical cavity. Int. J. Engng. Sci., vol. 4, No. 6, 1966.
3. *Bandyopadhyay K. K.* and *Kassir M. K.* Contact problems for solids containing cavities. J. of the Engng. Mech. Div., 1978, 104, No. 6.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2. Функции Бесселя. М., 1966.
5. *Титчмарш Е.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1. М., Иноиздат, 1960.
6. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, 33, вып. 3.
7. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, 36, вып. 5.