ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 6, 1979 Механика

Н. Б. ГРИГОРЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СЛЕДЯЩЕЙ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКЕ

Задача об устойчивости однородного стержня, шарнирно опертого по концам и нагруженного равномерно распределенной следящей нагрузкой, впервые была поставлена Пфлюгером в 1950 г. [1]. Начиная с 1962 г. [2], Лайпольц посвятил целую серию работ различным аспектам этой проблемы. Лайпольцем и Маданом получено точное значение критической нагрузки для консольного стержня, нагруженного равномерно распределенной следящей нагрузкой [3]. Сформулирована и доказана теорема о нижней границе нагрузки выпучивания для стержней, нагруженных следящими силами [4]. Исследовано расположение кривых собственных колебаний стержней при нагружении следящими распределенными силами и собственным весом [5]. Проведена классификация систем, нагруженных следящими и «мертвыми» силами, и исследована возможность применения вариационных методов для решения задач устойчивости [6] и т. д.

Хугером и Леонардом исследована задача об устойчивости стержня, нагруженного следящими распределенными силами и сосредоточенной силой, приложенной на конце стержня [7]. В другой работе эти же авторы исследовали влияние концевых условий стержня на его устойчивость [8]. В работе [9] рассмотрены колебания и устойчивость упругой колонны при совместном действии равномерно распределенных следящих и вертикальных сил для шести различных граничных условий.

В данной работе рассматривается устойчивость трехслойного консольного упругого стержня, нагруженного равномерно распределенной по длине стержня следящей нагрузкой интенсивности q. Используется теория трехслойного стержня Григолюка—Чулкова [10]. Заполнитель трехслойного стержня — жесткий, длина стержня — L, а высота пакета — h. В силу неконсервативности задачи для ее решения применяется динамический метод.

Рассмотрим малые колебания стержня вокруг положения равновесия. Для вывода основного уравнения выделим из стержня элемент длиной dx (фиг. 1) и для него составим уравнения равновесия. Проектируя все силы на нормаль к изогнутой оси стержня с учетом инерционной силы, получим

$$\rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx = 0$$

где F — площадь поперечного сечения стержня, ρ — осредненная плотность материала стержня [10].

Пренебрегая величинами высшего порядка малости, учитывая, что

$$N = q(L-x)$$

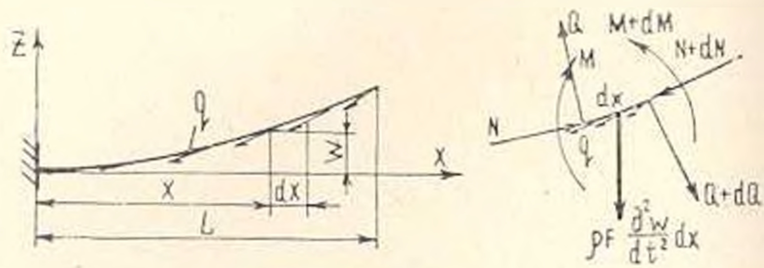
и разделяя на dx, получим

$$\rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q(L-x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1}$$

По теории трехслойного стержня Григолюка—Чулкова введем функцию перемещения χ, определяемую выражением

$$W = \left(1 - \frac{h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{X} \tag{1.2}$$

где β — параметр, характеризующий жесткость заполнителя на сдвиг.



Фиг. 1.

Поперечная сила Q выражается через функцию перемещения следующим образом [10]:

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = D\left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^3 \mathrm{X}}{\partial x^3} \tag{1.3}$$

где D — изгибная жесткость трехслойного стержня, а θ — параметр, характеризующий собственную изгибную жесткость несущих слоев трехслойного стержня.

Подставив выражения Q и W в уравнение (1.1), получим дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами в частных производных шестого порядка, описывающее малые поперечные колебания трехслойного стержня,

$$\rho F\left(1 - \frac{h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial t^2} + D\left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^4 \mathrm{X}}{\partial x^4} +$$
$$+ q(L-x)\left(1 - \frac{h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial x^2} = 0 \tag{1.4}$$

Для решения этого уравнения пользуемся методом разделения переменных, представляя функцию X в виде.

$$X(x, t) = \chi(x)\, e^{i\omega t} \tag{1.5}$$

где $\chi(x)$ — функция только переменного x,

$$\omega = \omega' + i\omega'' \tag{1.6}$$

— комплексная частота колебания трехслойного стержня, нагруженного распределенной следящей нагрузкой.

Введем безразмерные параметры

$$k = \frac{h^2}{\theta L^2}, \quad K^2 = \frac{qL^3}{D}, \quad \omega_*^2 = \omega^2 L^4 \frac{\rho F}{D}, \quad x = \frac{x}{L}, \quad X = \frac{\chi(x)}{L} \tag{1.7}$$

и обозначим дифференцирование по безразмерному x штрихом. Тогда из уравнения (1.4) вытекает обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами для функции X:

$$X^{(VI)} - \left[\frac{1}{\theta k} - \frac{K^2}{\theta}(1 - x)\right] X^{(IV)} - \left[\frac{K^2}{\theta k}(1 - x) + \frac{\omega_*^2}{\theta}\right] X'' + \frac{\omega_*^2}{\theta k} X = 0 \tag{1.8}$$

Рассмотрим два условия на концах стержня:

1. Один конец стержня жестко защемлен ($x = 0$), а на другом конце ($x = 1$) имеется абсолютно жесткая диафрагма, которая исключает поперечный сдвиг в торцевом сечении стержня

$$W = W' = \alpha\gamma = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$M = Q = \alpha\gamma = 0 \quad \text{при } x = 1$$

Исходя из выражений M, Q и $\alpha\gamma$, согласно [10], найдем

$$\begin{aligned} X' = X''' = X - kX'' = 0 \quad &\text{при } x = 0 \\ X'' = X^{(V)} = X''' - \theta k X^{(IV)} = 0 \quad &\text{при } x = 1 \end{aligned} \tag{1.9}$$

2. Один конец стержня жестко защемлен, а другой свободен.

$$W = W' = \alpha\gamma = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$M = Q = S = 0 \quad \text{при } x = 1$$

Здесь S — силовой фактор, связанный с кинематическим фактором $\alpha\gamma$ [10]. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} X' = X''' = X - kX'' = 0 \quad &\text{при } x = 0 \\ X'' = X^{IV} = X''' - \theta k X^{(V)} = 0 \quad &\text{при } x = 1 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Таким образом, задача свелась к краевой задаче на собственные значения (1.8) с условиями (1.9) или (1.10) на концах стержня. Как известно [11], динамический метод исследования устойчивости неконсервативных систем сводится к исследованию зависимости частоты колебания системы от величины внешней нагрузки и считается, что система потеряла устойчивость, если она при некотором значении нагрузки $K^2 = K^2_{кр}$ нач и нает совершать колебания с возрастающей амплитудой. Но стержень будет колебаться с возрастающей амплитудой, если мнимая часть ω'' комплексной частоты имеет знак минус. Если внешняя нагрузка не действует на стержень, то частота колебания — вещественная величина ($\omega'' = 0$) и стержень совершает гармоническое колебание. Частота колебаний останется вещественной и при малых значениях внешней нагрузки ($K^2 < K_{кр}^2$). Следовательно, для определения критической силы мы можем ограничиться лишь вещественными значениями частоты.

Поскольку коэффициенты уравнения (1.8) являются аналитическими функциями в любой точке x, то решение этого уравнения можно представить в виде ряда Тейлора

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1-x)^n \tag{1.11}$$

где A_n — неизвестные коэффициенты.

Подставляя ряд (1.11) и его производные в уравнение (1.8), выводим рекуррентное соотношение для определения коэффициентов A_n

$$A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \Big[\frac{1}{\theta k}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) A_{n-2} - \frac{K^2}{\theta}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) A_{n-3} + \frac{\omega^2}{\theta}(n-4)(n-5) A_{n-4} + \frac{K^2}{\theta k}(n-5)(n-6) A_{n-5} - \frac{\omega^2}{\theta k} A_{n-6} \Big] \tag{1.12}$$

С помощью этой формулы неизвестные коэффициенты A_n, начиная с $n=6$, можно выразить через предыдущие коэффициенты.

С учетом (1.11) условия на концах стержня (1.9) и (1.10) принимают такой вид

$$\begin{gathered} \sum nA_n = 0 \\ \sum n(n-1)(n-2) A_n = 0 \\ \sum A_n - k \sum n(n-1) A_n = 0 \\ A_3 = 0, \; A_1 = 0, \; A_2 - 12\theta k A_4 = 0 \end{gathered} \tag{1.13}$$

и

$$\begin{gathered} \sum nA_n = 0 \\ \sum n(n-1)(n-2) A_n = 0 \\ \sum A_n - k \sum n(n-1) A_n = 0 \\ A_2 = 0, \; A_4 = 0, \; A_3 - 20\theta k A_5 = 0 \end{gathered} \tag{1.14}$$

Выше во всех суммах пределы суммирования от 0 до ∞.

Из (1.13) или (1.14) с использованием формулы (1.12) получим системы трех линейных алгебраических однородных уравнений относительно A_0, A_1, A_3:

$$a_{1,1}A_0 + a_{1,2}A_1 + a_{1,3}A_3 = 0$$

$$a_{2,1}A_0 + a_{2,2}A_1 + a_{2,3}A_3 = 0$$

$$a_{3,1}A_0 + a_{3,2}A_1 + a_{3,3}A_3 = 0 \qquad (1.15)$$

или A_0, A_1, A_2:

$$b_{1,1}A_0 + b_{1,2}A_1 + b_{1,3}A_2 = 0$$

$$b_{2,1}A_0 + b_{2,2}A_1 + b_{2,3}A_2 = 0$$

$$b_{3,1}A_0 + b_{3,2}A_1 + b_{3,3}A_2 = 0 \qquad (1.16)$$

Для существования нетривиального решения этих систем необходимо, чтобы их определители были равны нулю. Отсюда получим частотные уравнения в виде

$$\Delta(K^2, \omega_*) = 0 \qquad (1.17)$$

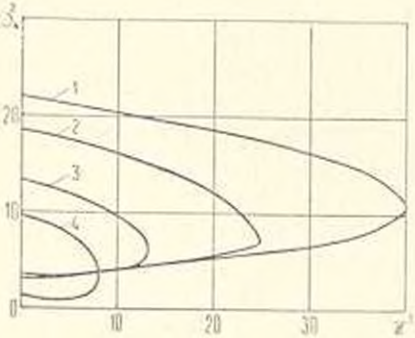
С помощью соотношения (1.17) можно построить зависимость частоты ω_* собственных колебаний стержня от безразмерной силы K^2.

Разработан алгоритм и составлена программа для построения зависимости ω_* от K^2 численным способом. На фиг. 2 приведен график этой зависимости при некоторых значениях θ и k. При $K^2 = 0$ имеем первую ω_{*1}^0 и вторую ω_{*2}^0 безразмерные частоты собственных колебаний. По мере увеличения силы K^2 нижняя частота увеличивается, а верхняя частота уменьшается, и при $K^2 = K_{кр}^2$ эти кривые смыкаются. В этой точке имеет место кратность корней ω_* в уравнении (1.17), и при дальнейшем увеличении K^2 корни становятся комплексно сопряженными, и существует корень с отрицательной мнимой частью. По выражению (1.5) это соответствует появлению формы колебаний с нарастающей амплитудой.

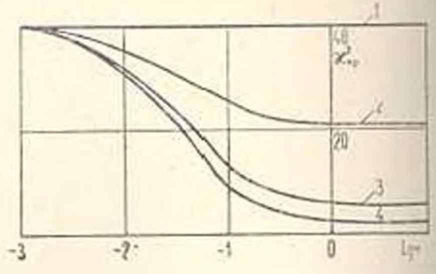
Численный анализ показывает, что число членов ряда (1.11), при котором ряд сходится, зависит от значения параметров θ и k и меняется от 20–30 ($\theta \geq 0.1$, $k \geq 1$) до 80–100 ($\theta < 0.01$, $k < 0.01$).

Из приведенных графиков (фиг. 3) видно, что при увеличении θ значение критической нагрузки увеличивается. Например, при $k = 0.1$ увеличение θ от 0.01 до 0.1 приводит к увеличению значения $K_{кр}^2$ от 8.1 до 13.4, то есть на 65%. При дальнейшем увеличении θ от 0.1 до 0.5 и до 1 (при $\theta = 1$ трехслойный стержень переходит в однородный, состоящий только из одного несущего слоя) значение $K_{кр}^2$ изменяется, соответственно, от 13.4 до 25.5, то есть на 91% и от 25.5 до 40.05, то есть на 57%. Таким образом, более существенное влияние θ оказывает при своих больших значениях. При малых k ($k \leq 0.01$) влияние θ на значение $K_{кр}^2$ менее заметно.

Отметим, что при $\theta = 1$ полученное значение $K^2_{кр} = 40.05$ полностью совпадает с известным [3] значением критической нагрузки для однородного стержня.



Фиг. 2. Зависимость ω_* от K^2 при $k = 0.1$ для следующих значений θ: $1 - \theta = 1$; $2 - \theta = 0.5$; $3 - \theta = 0.1$; $4 - \theta = 0.01$.



Фиг. 3. Зависимость критической силы от величины k при 1 условиях на конце стержня. Отмеченные линии соответствуют следующим значениям θ: $1 - \theta = 1$; $2 - \theta = 0.5$; $3 - \theta = 0.1$; $4 - \theta = 0.01$

Изменение параметра k в пределах $k > 10$ практически не приводит к изменению значения $K^2_{кр}$. Если же k изменяется в пределах $0.001 \leqslant k \leqslant 1$, то значение $K^2_{кр}$ существенно увеличивается с уменьшением k. При $k \leqslant 0.001$ значение $K^2_{кр}$ приближается к значению $K^2_{кр} = 40.05$, что соответствует однородному стержню.

Наличие жесткой диафрагмы на свободном конце стержня заметно влияет на величины $K^2_{кр}$ лишь при больших k. Например, при $k = 1$ и $\theta = 0.1$ значение $K^2_{кр}$ увеличивается на 15%, а при $k \leqslant 0.1$ и $\theta = 0.1$ значение $K^2_{кр}$ практически не меняется.

Ленинаканский филиал
ЕрПИ им. К. Маркса

Поступила 12 IV 1979

Ն. Ե. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԵՌԱՇԵՐՏ ՁՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԵՏԵՎՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾ ԲԵՌԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հետազոտված է եռաշերտ, մի ծայրով կոշտ ամրակցված հավասարաչափ բաշխված հետևող բեռով բեռնավորված ձողի կայունությունը: Այս ոչ կոնսերվատիվ խնդիրը լուծված է տատանումների կայունության հետազոտման դինամիկ մեթոդով: Ուսումնասիրված են եռաշերտ ձողի կրող շերտերի ծռման սեփական կոշտությունների և լցանի սահքի կոշտության ազդեցությունները կրիտիկական ուժի մեծության վրա:

STABILITY OF A SANDWICH ROD UNDER A UNIFORMLY DISTRIBUTED FOLLOWER LOAD

N. B. GRIGORIAN

S u m m a r y

The non-conservative problem on stability of a sandwich cantilever subjected to a uniformly distributed follower load is considered. The effect of intrinsic flexural rigidity of the faces and of shear stiffness of the core on flatter load is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pflüger A.* Stabilitatsprobleme der Elastostatik. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950. p. 337.
2. *Leipholz H.* Die Knicklast des einseitig eingespannten Stabes mit gleichmässig verteilter, tangentialer Längsbelastung. ZAMP, 1962, 13, 581—589.
3. *Leipholz H., Madan P.* One the solution of the stability problem of elastic rods subjected to uniformly distributed, tangential follower forces. Ingenieur-Archiv, Springer-Verlag, 1975, 44, 347—357.
4. *Leipholz H., Polzin T.* On a lower bound theorem for the buckling load of elastic beams subjected to nonconservative compressive follower loads. Acta Mechanica, 1977, 25, 171—186.
5. *Leipholz H.* On the analysis situs of eigenvalue curves of rods subjected to conservative and nonconservative loads. Acta Mechanica, 1973, 17, 69—80.
6. *Leipholz H.* On conservative elastic systems of the first and second kind. Ingenieur-Archiv, 1971, 43, 255—271.
7. *Hauger W., Leonhard M.* Exact calculation of buckling loads of elastic bars subjected to tangential forces. Mech. Res. Comm., 1976, 3, 39—43.
8. *Hauger W., Leonhard M.* Influence of the end-supports on the stability of bars. Journal of Sound and Vibration, 1977, 55 (1), 153—156.
9. *Sugiyama Y., Kawagoe H.* Vibration and stability of elastic columns under the combined action of uniformly distributed vertical and tangential forces. Journal of Sound and Vibration, 1975, 38 (3), 341—355.
10. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., Машиностроение, 1973, т. 172.
11. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961, с. 340.