

А. А. ЗЕВИН

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ  
В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ СТАРЕЮЩИХ  
МАТЕРИАЛОВ

В предлагаемой статье для описания поведения упругих и стареющих наследственных сред используются операторы специальной конструкции. Применение их позволяет представить решение широкого класса задач в виде функций одного оператора и распространить принцип Вольтерра на некоторые типы неоднородных сред.

Приводится ряд методов приближения функций оператора, используя которые можно построить решение задачи наследственной теории упругости или теории ползучести стареющих материалов на основе численного решения соответствующей задачи для упругого тела.

Для упрощения обозначений операторы, описывающие поведение анизотропного материала, идентифицируются одним индексом, в отличие от общепринятого обозначения  $E_{ijkl}$ .

§ 1. Пусть свойства наследственной среды (возможно, анизотропной) описываются операторами

$$\bar{E}_* = E_*[I - \Gamma_*], \quad \Gamma_* y(t) = \int_0^t \Gamma_*(t, \tau) y(\tau) d\tau, \quad Iy(t) = y(t) \quad (1.1)$$

Принцип Вольтерра [1] позволяет получить решение наследственной задачи, заменив упругие константы  $E_*$  в решении задачи теории упругости операторами (1.1). Таким образом, устанавливается соответствие

$$F_0(E_1, \dots, E_n) \leftrightarrow F_0(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n) \quad (1.2)$$

между функциями упругих констант и функциями операторов.

Если свойства материала в различных точках тела различны, то принцип Вольтерра в указанной формулировке не может быть использован, так как операции дифференцирования и интегрирования по координатам непереставимы с операцией умножения на  $\bar{E}_*(r)$  ( $r = (x_1, x_2, x_3)$  — точка тела). Кроме того, возникают существенные трудности при фактической реализации принципа в случаях, когда решение упругой задачи является трансцендентной функцией упругих постоянных, или задача решается численно и запись решения от констант в явном виде неизвестна. Эти трудности частично преодолеваются методом аппроксимаций

[2, 3], который применим к задачам наследственной теории упругости, если свойства наследственно-упругого материала описываются одним оператором (обычно полагается, что модуль объемной деформации — константа). В общем случае затруднения остаются существенными.

Более гибкой является несколько иная трактовка принципа Вольтерра, развитая в [4], которая позволяет распространить его на некоторые классы неоднородных сред и оказывается удобной при фактической реализации.

Все операторы  $\Gamma_s^*$ , фигурирующие в исходных уравнениях, представим (если это возможно) в виде функций некоторого одного оператора  $H^*$ :

$$\Gamma_s^* = P_s(H^*) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k H^{*k} \quad (1.3)$$

причем функции  $P_s(\lambda)$  предполагаются регулярными в точке  $\lambda = 0$ .

Наследственной задаче поставим в соответствие задачу теории упругости с константами материала

$$E_s^0(\lambda) = E_s[1 - P_s(\lambda)] \quad (1.4)$$

зависящими от числового параметра  $\lambda$ . Решение наследственной задачи получим, заменив в решении упругой задачи параметр  $\lambda$  оператором  $H^*$ .

Таким образом, вместо соответствия (1.2) устанавливается соответствие

$$F(\lambda) \leftrightarrow F(H^*) \quad (1.5)$$

между функциями фиктивного параметра  $\lambda$ , введенного в уравнения упругой задачи, и функциями оператора  $H^*$ .

Операторы типа (1.3) позволяют распространить принцип Вольтерра на некоторые классы неоднородных сред.

Пусть от точки тела зависят упругие модули и параметры функций  $P_s$  (но не  $H^*$ ):

$$E_s = E_s(r), \quad \Gamma_s^*(r) = P_s(r, H^*) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) H^{*k} \quad (1.6)$$

Наследственной задаче поставим в соответствие задачу для неоднородного упругого тела с упругими модулями

$$E_s^0(r, \lambda) = E_s(r)[1 - P_s(r, \lambda)] \quad (1.7)$$

Соответствие (1.5) между решениями упругой и наследственной задачи остается справедливым [4].

Таким образом, если возможно представление исходных операторов в виде (1.3) или (1.6), то решение наследственной задачи приводится к вычислению функций вида

$$\varphi(r, t) = F(r, H^*)f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(r) H^{*k-1} f(t) \quad (1.8)$$

где  $\varphi$  — некоторый параметр, характеризующий напряженно-деформированное состояние тела;  $F(r, \lambda)$  — решение соответствующей упругой задачи;  $I(t)$  — известная функция времени, пропорционально которой изменяются внешние воздействия.

Несмотря на то, что в исходных уравнениях может фигурировать несколько операторов  $\Gamma^*$ , решение (1.8) является функцией только одного оператора  $H^*$ . Методы приближения функций одного оператора, применимые в общем случае к операторам с инвариантными ядрами, приводятся в разделах 3—5 настоящей статьи.

Рассмотрим некоторые типы наследственных сред, поведение которых может быть описано операторами вида (1.3), (1.6).

В теории наследственной упругости находят широкое применение резольвентные операторы, ядра которых имеют интегрируемую особенность [1]. Пусть упруго-наследственная среда или однородна, или неоднородна, но во всех точках операторы остаются инвариантными относительно начала отсчета времени (например, неоднородность обусловлена воздействием стационарного неоднородного температурного поля). Тогда в каждой точке  $r$  ядра операторов  $\Gamma^*$  могут быть достаточно точно аппроксимированы агрегатами обобщенных дробно-экспоненциальных функций

$$\Gamma_*(r, t - \tau) = \sum_{p=1}^l \gamma_{sp}(r) \exp[-\tau(t - \tau)] \mathfrak{D}_\alpha(-\beta_{sp}(r), t - \tau), \quad -1 < \alpha \quad (1.9)$$

где  $\mathfrak{D}_\alpha(-\beta, t - \tau)$  — дробно-экспоненциальная функция Ю. Н. Работнова [1].

Каждое слагаемое в выражении (1.9) является резольвентой ядра А. Р. Ржаницына [5] с параметром  $(-\beta_{sp})$ . Используя операторную конструкцию резольвенты, получим оператор, соответствующий ядру (1.9)

$$\Gamma_*(r) = \sum_{p=1}^l \frac{\gamma_{sp}(r) H^*}{1 + \beta_{sp}(r) H^*}, \quad H(t - \tau) = e^{-\alpha(t-\tau)} (t - \tau)^\alpha / \Gamma(\alpha + 1) \quad (1.10)$$

Представление (1.10) является частным случаем (1.6).

Отметим, что параметры  $\mu$  и  $\alpha$  являются внутренними параметрами ядра  $H$ , поэтому они полагаются независимыми от координат и индексов  $s, p$ .

В частности, если свойства материала описываются агрегатами дробных экспонент, то операторы  $\Gamma_*(r)$  также имеют конструкцию (1.10), но  $H(t - \tau) = (t - \tau)^\alpha / \Gamma(\alpha + 1)$ , то есть ядро  $H$  совпадает с ядром Абеля.

Характеристики материала упругой задачи, соответствующие оператору (1.10), имеют вид

$$E^*(r, \lambda) = E_*(r) \left| 1 - \sum_{p=1}^l \frac{\gamma_{sp}(r) \lambda}{1 + \beta_{sp}(r) \lambda} \right| \quad (1.11)$$

Поведение стареющих материалов может быть описано операторами вида (1.3), (1.6) лишь при определенных допущениях. Однако, и в этом случае изложенная трактовка принципа Вольтерра оказывается полезной.

Пусть, например, свойства неоднородного изотропного стареющего тела описываются операторами сдвига и объемной деформации  $\bar{E}_1(r)$  и  $\bar{E}_2(r)$ , ядра которых отличаются только множителем

$$\bar{E}_1(r) = E_1(r) [I - \gamma_1(r) H^*], \quad \bar{E}_2(r) = E_2(r) [I - \gamma_2(r) H^*] \quad (1.12)$$

Даже в этом простейшем случае принцип Вольтерра в формулировке [1] не может быть использован. Подход, изложенный выше, позволяет применить к решению операторный метод, поставив в соответствие наследственной задаче задачу теории упругости для неоднородного тела с характеристиками материала

$$E_1(r, \lambda) = E_1(r) [1 - \gamma_1(r) \lambda], \quad E_2(r, \lambda) = E_2(r) [1 - \gamma_2(r) \lambda] \quad (1.13)$$

Важный для практики случай неоднородно стареющей наследственной среды, поведение которой описывается уравнениями Н. Х. Арутюяна [6], рассмотрен в [7].

В общем случае представления (1.3), (1.6) следует рассматривать как аппроксимацию ядер  $\bar{E}_i(t, \tau)$ , получаемых из опытов, разложениями по итерированным ядрам, порождаемым некоторым (произвольным) ядром  $H(t, \tau)$ .

Отметим, что операторы вида (1.3) естественным образом появляются в соотношениях, связывающих внутренние усилия и деформации неоднородно армированных стержневых систем из стареющего наследственного материала [8].

§ 2. Для обоснования методов приближения функций оператора, излагаемых в разделах 3, 4, предварительно получим решение уравнения типа Вольтерра в форме, несколько отличной от классической. Такое представление имеет также самостоятельное значение, так как может быть использовано для эффективного приближенного решения уравнений

Рассмотрим интегральное уравнение типа Вольтерра 2-го рода

$$y(t) - \lambda H^* y(t) = f(t) \quad (2.1)$$

в котором  $y(t)$  — искомая,  $f(t)$  — заданная функция;  $\lambda$  — параметр уравнения в общем случае комплексный.

Классическое решение уравнения (2.1) представляет собой ряд по степеням параметра  $\lambda$ :

$$y(t) = f(t) + \lambda R^*(\lambda) f(t), \quad R^*(\lambda) f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} y_n(t), \quad y_0(t) = f(t) \quad (2.2)$$

где  $y_n(t) = H^{*n} f(t)$  — итерированные функции,  $R^*(\lambda)$  — резольвента  $H^*$ .

Покажем прежде всего, что итерированные функции линейно независимы. Для доказательства воспользуемся интегральным представлением регулярной функции оператора [9]

$$F(H^*)f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} F(\lambda) W(\lambda, t) d\lambda, \quad (2.3)$$

$$W(\lambda, t) = \lambda^{-1} [I + \lambda^{-1} R^*(\lambda^{-1})] f(t)$$

где  $\omega$  — замкнутый контур в области регулярности  $F(\lambda)$ , обходящий точку  $\lambda = 0$ ,  $R^*(\lambda^{-1})$  — резольвента уравнения типа (2.1) с параметром  $\lambda^{-1}$ .

Допустим, что  $[\beta_0 + \beta_1 H^* + \dots + \beta_m H^{*m}] f(t) = 0$ , из (2.3) получим  $\beta_0 + \beta_1 \lambda + \dots + \beta_m \lambda^m = 0$  на любом контуре  $\omega$ . Это невозможно в силу линейной независимости функций  $\lambda^n$ .

Рассмотрим теперь, наряду с (2.1), уравнение

$$\tilde{y}(t) - \lambda H^* \tilde{y}(t) = f(t) + \tilde{\alpha} Q_m(H^*) f(t) \quad (2.4)$$

где  $Q_m(H^*)$  — некоторый полином с коэффициентом, равным единице при старшей степени  $H^*$ :

$$Q_m(H^*) f(t) = \sum_{n=0}^m \alpha_n H^{*n} f(t) = \sum_{n=0}^m \alpha_n y_n(t), \quad \alpha_m = 1 \quad (2.5)$$

$\delta$  — неопределенный параметр. Коэффициенты  $\alpha_n$  полагаем заданными.

Будем искать решение уравнения (2.5) в виде

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n H^{*n} f(t) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n y_n(t) \quad (2.6)$$

Ввиду линейной независимости итерированных функций, для определения  $a_n$  воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Подставляя (2.6) в (2.5) и приравнивая коэффициенты при  $y_n(t)$ , получим

$$a_0 = 1 + \tilde{\alpha} \alpha_0, \quad a_n = \lambda a_{n-1} + \tilde{\alpha} \alpha_n \quad (n = 1, \dots, m-1), \quad \lambda a_{m-1} + \tilde{\alpha} = 0 \quad (2.7)$$

откуда

$$a_n = \lambda^n + \tilde{\alpha} \sum_{s=0}^{n-1} \lambda^s \lambda^{n-1-s}, \quad \tilde{\alpha} = -1/Q_m(\lambda^{-1}) \quad (2.8)$$

Таким образом, уравнение (2.5) удовлетворяется конечным разложением по итерированным функциям.

Разность между решениями уравнений (2.1) и (2.5)  $z_m(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$  может быть найдена из уравнения

$$\epsilon_m(t) - \lambda H^* z_m(t) = -\tilde{\alpha} z_0(t), \quad z_0(t) = Q_m(H^*) f(t) \quad (2.9)$$

Из (2.9) получим

$$z_m(t) = -\tilde{\alpha} [I + \lambda R^*(\lambda)] z_0(t) \quad (2.10)$$

Таким образом, решение исходного уравнения (2.1) можно представить в виде

$$y(t) = \bar{y}(t) + z_n(t) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n y_n(t) + Q_m^{-1}(t^{-1})[I + tR^*(t)]z_n(t) \quad (2.11)$$

Полученный результат может быть использован для приближенного решения уравнения (2.1). Распорядимся коэффициентами  $a_n$  таким образом, чтобы отклонение функции  $\bar{y}_n(t)$  от нуля в рассматриваемом интервале  $[t_0, t_+]$  было по возможности малым. Для этого можно минимизировать максимальное отклонение функции  $|\bar{y}_n(t)|$ , или квадратичное отклонение, или приравнять  $\bar{y}_n(t)$  нулю в  $m$  точках  $t_i \in [t_0, t_+]$ . Последние два критерия приводят к системе линейных уравнений относительно  $a_n$ .

Если величина  $\lambda^{-1}$  не очень близка к корню полинома  $Q_m(z)$ , то функция  $\bar{z}_0(t)$  будет мало отличаться от нуля, а функция  $y(t)$  близка к  $\bar{y}(t)$ .

Отметим, что при любом  $m$  условие  $a_n = 0$  дает:  $\bar{z} = -\lambda^*$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_n = \lambda^*$ , то есть приближение отрезком ряда (2.2) есть частный случай рассматриваемого. При этом погрешность приближения определяется выражением (2.10), в котором  $z_0(t) = y_m(t)$ .

Эффективность рассматриваемого метода приближенного решения уравнения определяется тем, что уже при небольших  $m$  отклонение от нуля функции  $\bar{y}_n(t)$  может быть сделано малым за счет соответствующего выбора  $a_n$ , в то время как функции  $y_m(t)$  стремятся к нулю более медленно.

В качестве примера было решено уравнение с ядром Абеля  $H(t-\tau) = (t-\tau)^* \Gamma(x+1)$  при  $\lambda = -1$ ,  $f(t) = 1$  и  $x = -0.8$ . Максимум абсолютной погрешности в интервале  $0 \leq t^{-1} \leq 5$  составил 0.0018 при аппроксимации решения посылкой итерированными функциями.

Решение с помощью ряда (2.1) при указанных значениях параметров сходится чрезвычайно медленно. Для получения приближения с погрешностью, не превосходящей 0.0018, необходимо просуммировать около 40000 членов.

§ 3. Рассмотрим теперь задачу аппроксимации функции (1.8). Полагаем, что решение соответствующей упругой задачи  $F(\lambda)$  известно в некоторых узлах  $\lambda_j$  (здесь и в дальнейшем точку тела считаем фиксированной и зависимость решения от  $t$  не отмечаем). Ядро  $H(t, \tau)$  полагаем непрерывным или имеющим степенную особенность порядка  $\alpha > -1$ ; функция  $F(\lambda)$  предполагается регулярной в некотором круге  $|\lambda| \leq \rho$ ,  $\rho > 0$ .

Значения  $F(\lambda_j)$  могут быть найдены в результате численного решения задачи для упругого материала с фиктивными упругими модулями (1.4) или (1.7), в которых  $\lambda = \lambda_j$ .

Отметим, что при  $\lambda = 0$  фиктивные упругие модули совпадают с фактическими, поэтому допущение о регулярности  $F(\lambda)$  выполняется, если задача теории упругости с модулями  $E_s(r)$  имеет единственное решение.

Будем разыскивать приближение функции  $\varphi(t)$  в виде линейной комбинации итерированных функций

$$\varphi(t) = F(H^*)f(t) = \Phi_m(t) + \varepsilon(t), \quad \Phi_m(t) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n^{(m)} y_n(t) \quad (3.1)$$

где  $\varepsilon(t)$  — погрешность аппроксимации.

Пусть  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) — последовательность попарно различных комплексных чисел и  $G_{m-1}(\lambda)$  — полином, интерполирующий функцию  $F(\lambda)$  в узлах  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ .

Покажем, что при некоторых ограничениях на предельное распределение точек  $\lambda_j$  при  $j \rightarrow \infty$  последовательность  $\Phi_m(t) \rightarrow \varphi(t)$ , если коэффициенты  $c_n^{(m)}$  совпадают с коэффициентами полинома  $G_{m-1}(\lambda)$ .

Предположим, что последовательность  $\lambda_j$  удовлетворяет условиям:

- а) в узлах  $\lambda_j$  функция  $F(\lambda)$  регулярна;
- б) при  $j > j_0$  все числа  $\lambda_j$  лежат в круге  $|\lambda| \leq \varrho/3$ .

Используя представление (2.3) и учитывая, что функция  $w(\lambda, t)$  только множителем  $t^{-1}$  отличается от решения уравнения (2.1) с параметром  $\lambda^{-1}$ , получим

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\lambda) \sum_{n=0}^{m-1} U_{m-n-1}(\lambda) y_n(t) d\lambda}{Q_m(\lambda)} + \varepsilon(t) \quad (3.2)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\lambda) [I + \lambda^{-1} R^*(\lambda^{-1})] z_0(t) d\lambda}{\lambda Q_m(\lambda)} \quad (3.3)$$

где

$$U_0 = 1, \quad U_{m-n-1}(\lambda) = \sum_{s=n+1}^m \alpha_s \lambda^{s-n-1} \quad (3.4)$$

— полином степени  $m-n-1$ .

При выводе выражений (3.2)–(3.4) использовались соотношения (2.8), (2.9), (2.11).

Пусть все корни  $\lambda_j$  полинома  $Q_m(\lambda)$  простые и лежат в замкнутой области  $V$ , заключенной внутри контура  $\omega$ . Учитывая, что числитель в (3.2) — регулярная функция в области  $V$  и используя теорему о вычетах, получим

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n^{(m)} y_n(t) + \varepsilon(t), \quad c_n^{(m)} = \sum_{j=1}^m \frac{F(\lambda_j) U_{m-n-1}(\lambda_j)}{Q_m'(\lambda_j)} \quad (3.5)$$

Второе из выражений (3.5) совпадает с выражением для коэффициентов интерполяционного полинома.

Покажем, что  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Пусть контур  $\omega$  совпадает с окружностью радиуса  $\rho$ . Представим функцию  $E_m(\lambda, t) = \varepsilon(t)/Q_m(\lambda)$  в виде

$$E_n(\lambda, t) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} (K^* - z_s) \psi(t)}{\prod_{s=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_{n+s-1})}, \quad (3.6)$$

где  $z_s = \frac{3}{2} \lambda_{j+s-1}$ ,  $K^* = \frac{3}{2} H^*$ ,  $n = m - j_0$

$$\psi(t) = \prod_{s=1}^{k+1} \frac{(H^* - \lambda_s) f(t)}{(\lambda - \lambda_s)} \quad (3.7)$$

— функция, ограниченная в области  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $\lambda \in \omega$ .

В силу условия б) при  $j > j_0$  расстояние от  $\lambda_j$  до  $\omega$  не меньше, чем  $2\rho/3$ , поэтому

$$\left| \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_{n+s-1}) \right| \geq \left(\frac{2\rho}{3}\right)^{n-1} \quad (3.8)$$

Таким образом,

$$|E_n(\lambda, t)| \leq \left| \sum_{k=0}^n \gamma_{nk} K^{*k-1} \psi(t) \right|, \quad \gamma_{nk} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u_{nk} \quad (3.9)$$

где  $u_{nk}$  — коэффициенты полинома  $(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$ .

На основании теоремы Виетта каждый из коэффициентов  $u_{nk}$  равен сумме  $C_{n-1}^{n-k}$  произведений вида  $z_1 z_2 \dots z_{n-k}$ . Учитывая, что  $|z_s| \leq 1$ , получим оценку

$$|\gamma_{n1}| + \dots + |\gamma_{nk}| \leq \left(1 + \sum_{k=2}^n C_{n-1}^{n-k}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1$$

При фиксированном  $k$

$$|\gamma_{nk}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} C_{n-1}^{n-k} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n-1)^{k-1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, коэффициенты  $\gamma_{nk}$  удовлетворяют условиям а), б) теоремы Теплица [10].

Так как  $K^{*n-1} \psi(t) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , на основании теоремы Теплица правая часть выражения (3.9) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и  $\lambda \in \omega$ . Из (3.3) следует, что  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ , так как длина контура  $\omega$  ограничена.

Оценим погрешность приближения при фиксированном  $m$ .

Пусть  $L$  — длина контура  $\omega$ ,  $M$  — максимум модуля функции  $F$  на  $\omega$ ,  $\delta_0$  — минимальное расстояние от  $\lambda = 0$  до  $\omega$  и  $\delta_j$  — минимальное расстояние от  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) до  $\omega$ . Из (3.3) следует оценка

$$|\varepsilon(t)| \leq \max |\varepsilon_n(t)| \leq L M \varepsilon(\delta_0, t) / 2\pi \delta_0 \delta^m \quad (3.10)$$

где  $\varepsilon(\delta_0, t) = 1 + \delta_0^{-1} R_0^*(\delta_0^{-1}) 1$ ,  $R_0$  — резольвента ядра  $|H(t, \tau)|$ .

§ 4. Доказанная сходимость последовательности  $\Phi_m(t)$  к  $\varphi(t)$  позволяет построить приближение (3.1), определив коэффициенты  $c_n^{(m)}$  как коэффициенты полинома  $G_{m-1}(\lambda)$ , интерполирующего функцию  $F(\lambda)$  в узлах  $\lambda_j$ . Точность приближения в некотором интервале времени  $[\tau_0, \tau_1]$  зависит от выбора узлов интерполяции.

Из оценки (3.10) следует, что погрешность приближения будет мала, если мало отклонение от нуля функции  $\epsilon_n(t)$ . Поэтому представляется целесообразным выбрать узлы  $\lambda_j$  так, чтобы минимизировать в интервале  $[\tau_0, \tau_1]$  квадратичное отклонение, или из условия равенства  $\epsilon_n(t)$  нулю в  $m$  точках  $t \in [\tau_0, \tau_1]$ . Указанные критерии приводят к системе линейных уравнений относительно коэффициентов  $c_n$  полинома  $Q_m(H^*)$ . Корни уравнения  $Q_m(\lambda) = 0$  определяют эффективные узлы  $\lambda_j$  [7]. Среди узлов, найденных изложенным методом, имеются, как правило, комплексные. Это не приводит к затруднениям, если функция  $F(\lambda_j)$  известна в ином виде. Однако в случае, когда соответствующая задача теории упругости решается численно, для получения  $F(\lambda_j)$  необходимо решать упругую задачу с комплексными модулями, что связано с определенными вычислительными неудобствами. В этом случае целесообразно использовать действительные узлы, определив их из условия минимума функционала

$$U(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \epsilon^2(t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} [(H^* - \lambda_1 I) \dots (H^* - \lambda_m I) f(t)]^2 dt \quad (4.1)$$

где  $\lambda_j$  рассматриваются как действительные параметры.

Отметим, что найденные изложенным методом узлы  $\lambda_j$  и, следовательно, коэффициенты приближения (3.1) зависят от оператора  $H^*$  и рассматриваемого интервала времени. Это позволяет получить хорошее приближение уже при  $m = 4 \div 7$ . Примеры приведены в § 6.

Из представления (2.3) следует, что последовательность  $G_{m-1}(H^*)f(t) \rightarrow \varphi(t)$ , если последовательность  $G_{m-1}(\lambda) \rightarrow F(\lambda)$  на контуре  $\omega$ . Так как  $\omega$  — произвольный контур, при определении коэффициентов приближения (3.1) можно использовать некоторую заранее заданную последовательность узлов, если при этом последовательность  $G_{m-1}(\lambda)$  сходится к  $F(\lambda)$  в некоторой окрестности  $\lambda = 0$ . В частности, последовательность полиномов, интерполирующих  $F(\lambda)$  в узлах Чебышева сходится к  $F(\lambda)$  внутри наибольшего эллипса с фокусами  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ , на границе которого функция  $F$  перестает быть регулярной [11]. Таким образом, коэффициенты приближения (3.1) могут быть найдены в результате интерполяции в узлах Чебышева. При этом, однако, сходимость может оказаться более медленной, чем при использовании узлов, найденных в результате минимизации функционала (4.1). Это объясняется тем, что при выборе узлов не используется информация о конкретном виде оператора  $H^*$  и интервале времени, в котором разыскивается приближение.

§ 5. Метод, изложенный в разделах 3, 4, основан на приближении функции  $\varphi(t)$  линейной комбинацией итерированных функций. В настоящем разделе развит метод разложения по функциям  $u_j(t)$ , которые могут быть найдены из независимых интегральных уравнений, решение которых в некоторых случаях проще, чем построение итерированных функций.

Представим функцию  $F(\lambda)$  в виде ряда по рациональным функциям

$$F(\lambda) = a_0 + a_1 \frac{(\lambda - \lambda_1)}{(\lambda - \alpha_1)} + a_2 \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)} + \dots \quad (5.1)$$

где  $\lambda_j$  и  $\alpha_j$  — заданные числа. Коэффициенты  $a_0, a_1, \dots$  легко найти, последовательно приравняв левую часть (5.1) правой в точках  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

Пусть точки  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) стремятся к нулю, точки  $\alpha_j$  стремятся к бесконечности и  $\alpha_j = \alpha_k$ . При указанных условиях ряд (5.1) сходится равномерно к  $F(\lambda)$  в круге регулярности [12].

Рассмотрим разложение

$$\varphi(t) = F(H^*)f(t) = \left[ a_0 + a_1 \frac{(H^* - \lambda_1 I)}{(H^* - \alpha_1 I)} + \right. \\ \left. + a_2 \frac{(H^* - \lambda_1 I)(H^* - \lambda_2 I)}{(H^* - \alpha_1 I)(H^* - \alpha_2 I)} + \dots \right] f(t) \quad (5.2)$$

Из представления (2.3) и равномерной сходимости ряда (5.1) на контуре  $\omega$  следует равномерная сходимость ряда (5.2) для  $t \in [\tau_0, \tau_*]$ ,  $\tau_* < \infty$ .

Каждое слагаемое ряда (5.2) можно выразить через сумму функции вида

$$u_j(t) = R^*(\vartheta_j)f(t) = \int_0^t R(\vartheta_j, t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad \vartheta_j = 1/\alpha_j \quad (5.3)$$

где  $R(\vartheta_j, t, \tau)$  — резольвента ядра  $H(t, \tau)$  с параметром  $\vartheta_j$ .

Используя теоремы умножения резольвенты операторов [1, 13] и ограничиваясь в разложении (5.2) конечным числом членов, после некоторых преобразований получим

$$\varphi(t) \simeq \Phi_m(t) = b_0 f(t) + \sum_{j=1}^{m-1} b_j u_j(t) \quad (5.4)$$

где

$$b_j = \sum_{k=0}^{m-1} a_j d_j^{(k)} \quad (j = 0, \dots, m-1) \quad (5.5)$$

а коэффициенты  $d_j^{(k)}$  определяются последовательно по формулам

$$\begin{aligned}
d_0^{(1)} &= r_1, & d_1^{(1)} &= \gamma_1 \\
d_0^{(k)} &= r_k d_0^{(k-1)}, & d_1^{(k)} &= d_1^{(k-1)} \left( r_k + \frac{\gamma_k}{b_1 - b_k} \right), \dots \\
d_{k-1}^{(k)} &= d_{k-1}^{(k-1)} \left( r_k + \frac{\gamma_k}{b_{k-1} - b_k} \right) \\
d_k^{(k)} &= \gamma_k \left( d_0^{(k-1)} - \frac{d_1^{(k-1)}}{b_1 - b_k} - \dots - \frac{d_{k-1}^{(k-1)}}{b_{k-1} - b_k} \right)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

где

$$r_k = b_k/b_k, \quad \gamma_k = b_k(r_k - 1)$$

Из (5.2) следует, что погрешность приближения  $\tilde{\xi}(t) = \varphi(t) - \Phi_k(t)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}(t) &= \left| a_m I + \sum_{k=1}^{\infty} a_{m-k} \prod_{s=1}^k \frac{(H^* - \lambda_{m+s} I)}{(H^* - \alpha_{m+s} I)} \right| \tilde{\xi}_0(t) \\
\tilde{\xi}_0(t) &= \prod_{k=1}^m \frac{(H^* - \lambda_k I)}{(H^* - \alpha_k I)} f(t)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Если параметры  $\alpha_j$  заданы, то величина погрешности зависит от узлов  $\lambda_j$ . Эти узлы целесообразно выбрать так, чтобы в рассматриваемом интервале времени  $[\tau_0, \tau_*]$  по возможности уменьшить отклонение от нуля функции  $\tilde{\xi}_0(t)$ , которая является одним из сомножителей в выражении для погрешности.

§ 6. Приведем числовые примеры, иллюстрирующие точность изложенных методов.

#### 1. Вычислялась функция

$$\varphi(t) = F(H^*)^{-1} = [I + \beta w_0 (I - H^* (I + H^*)^{-1})]^{-1}, \quad w_0 = 0.4 \tag{6.1}$$

при различных значениях параметра  $\beta$ .

Ядро оператора  $H^*$  принято в виде

$$\begin{aligned}
H(t, \tau) &= -E_0 \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) \\
C(t, \tau) &= \left( C_0 + \frac{A_1}{r + \tau} \right) [1 - B_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)} - B_2 e^{-\lambda_2(t-\tau)}]
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Числовые значения параметров (единице времени — 10 сут):

$$r = 0; \quad B_1 = 1; \quad B_2 = 0; \quad E_0 C_0 = 0.44; \quad A_1 E_0 = 0.61; \quad \gamma_1 = 0.25$$

При построении приближения методом, изложенным в разделах 3, 4, в разложении (3.1) удерживалось 6 слагаемых; для определения коэффициентов использовались значения  $F(\lambda_j)$  в узлах, найденных при минимизации функционала (4.1).

При решении задачи методом § 5 в разложении (5.4) удерживалось 7 членов. Узлы  $z_i$  определялись в результате минимизации квадратичного отклонения от нуля функции  $\xi_n(t)$  из (5.7).

Найденные приближения сравнивались с точными значениями  $\varphi(t)$ , которые можно получить, расшифровав рациональную дробь (6.1) оператора  $H^*$ . Для ядра (6.2) при  $r = B_1 = 0$  функция  $\varphi(t)$  выражается через решение уравнения с ядром Н. Х. Арутюняна, полученное в замкнутом виде [14].

В табл. 1 приведены значения максимума абсолютной погрешности в интервале  $0.07 \leq t \leq 20$ , полученные при приближении  $\varphi(t)$  методами § 4 (метод I) и § 5 (метод II).

Таблица 1

|          | 0.1     | 3.5    | 11     | 25     |
|----------|---------|--------|--------|--------|
| Метод I  | 0.00013 | 0.0011 | 0.0004 | 0.0002 |
| Метод II | 0.0002  | 0.0012 | 0.0018 | 0.0033 |

Как видно из табл. 1, погрешность метода I не превосходит 0.0011, метода II — 0.0033.

2. Рассмотрена задача расчета бетонного блока прямоугольного поперечного сечения, расположенного на скальном основании. Предполагается, что длина блока велика и система блок—основание находится в условиях плоской деформации. В момент  $t_0$  температура блока увеличивается на  $1^\circ\text{C}$  и в дальнейшем не изменяется. Свойства бетона описываются оператором  $E^{-1} = E_0^{-1}(I + H^*)^{-1}$ , основание предполагается идеально упругим. При решении задачи приняты следующие значения параметров: отношение высоты блока к ширине  $\alpha = 0.25$ ;  $E_0 = 3.33 \cdot 10^4$  МПа; модуль упругости основания  $E_1 = 1 \cdot 10^4$  МПа; коэффициенты Пуассона блока и основания:  $\nu_1 = 0.16$ ,  $\nu_0 = 0.20$ ; коэффициент линейного расширения бетона  $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$  1/град.

Ядро оператора  $H^*$  принято в виде (6.2) при следующих значениях параметров (единица времени — 10 сут):  $r = 0.15$ ;  $E_0 C_0 = 0.5395$ ;  $A E_0 = 0.9152$ ;  $B_1 = 0.35$ ;  $B_2 = 0.65$ ;  $\gamma_1 = 0.3$ ;  $\gamma_2 = 5.8$ . Момент приложения температуры  $t_0 = 3.5$  сут.

Задача решалась методом, изложенным в § 4; для построения приближения (3.1) использовалось численное решение задачи теории упругости с модулями  $E(t_j) = E_0(1 + t_j)^{-1}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ). Значения  $\lambda_j$  определялись в результате минимизации функционала (4.1).

В табл. 2 приведены значения напряжений  $\sigma_{xx}(0, y, t)$  в точках  $(0, y)$ , расположенных на разных расстояниях по вертикальной оси блока

\* Задача теории упругости решалась методом «Конечных полос» [15]. Расчеты выполнены в институте гидротехники им. Б. Е. Веденсева.

( $y_1 = 0$  — точка, расположенная на границе блока и основания;  $y_{11}$  — точка на верхней граничной поверхности).

Таблица 2

| $l$<br>(см) | Номер точки |       |       |       |       |       |
|-------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|             | 1           | 3     | 5     | 7     | 9     | 11    |
| 3.5         | -1.49       | -1.15 | -0.81 | -0.47 | -0.14 | +0.15 |
| 4           | -1.17       | -0.93 | -0.68 | -0.45 | -0.22 | +0.03 |
| 10          | -0.74       | -0.61 | -0.49 | -0.37 | -0.27 | -0.18 |
| 20          | -0.68       | -0.57 | -0.46 | -0.36 | -0.27 | -0.21 |
| 30          | -0.64       | -0.54 | -0.44 | -0.35 | -0.27 | -0.22 |

Таблица 3

| $l$<br>(см) | Номер точки |       |       |       |       |       |
|-------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|             | 1           | 3     | 5     | 7     | 9     | 11    |
| 3.5         | -1.49       | -1.15 | -0.81 | -0.47 | -0.14 | +0.15 |
| 4           | -1.20       | -0.95 | -0.69 | -0.45 | -0.21 | -0.01 |
| 10          | -0.73       | -0.61 | -0.49 | -0.37 | -0.27 | -0.19 |
| 20          | -0.68       | -0.57 | -0.46 | -0.36 | -0.27 | -0.20 |
| 30          | -0.64       | -0.54 | -0.45 | -0.35 | -0.27 | -0.22 |

В табл. 3 даны результаты решения рассматриваемой задачи, найденные численно, методом «шаг за шагом» [15]. Максимальное абсолютное расхождение между решениями, полученными различными методами, составило 0.03.

ИИАКЭС Селеро-Западного  
отделения ин-та «Энергосетпроект»

Поступила 18 V 1979

Ա. Ա. Զեւին

## ՆԵՐԱՑՈՂ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՈՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՎՈՒՏՆԵՐՅԱՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Առաձգական և ծերացող ժառանգական միջավայրերի վարքի նկարագրման համար օգտագործվում են հատուկ կառուցվածքի օպերատորներ, նրանց կիրառումը հնարավորություն է տալիս ներկայացնել լուծումը մի օպերատորի ֆունկցիաների տեսքով և տարածել Վոլտերի սկզբունքը որոշ առևանգի առնամասին միջավայրերի վրա:

Բերվում են օպերատորի ֆունկցիաների մոտարկման մի շարք մեթոդներ, որոնց օգտագործումով կարելի է առաձգական մարմնի համար համապատասխան խնդրի իվային լուծման հիման վրա կառուցել ժառանգական խնդրի լուծումը:

# APPROXIMATION OF VOLTERRA'S OPERATORS FUNCTIONS IN PROBLEMS FOR AGEING MATERIALS IN THE CREEP THEORY

A. A. ZEVIN

## S u m m a r y

Special design operators are applied to describe behaviour of elastic and ageing hereditary media. Their application enables us to present a solution in the form of one-operator functions and to extend Volterra's principle to some types of heterogeneous media.

There are given some methods of approximation of operator functions, applying which the construction of a hereditary problem may be based on a numerical solution of the appropriate elastic body problem.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной техники твердых тел. М., «Наука», 1977.
2. Ильюшин А. А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости. Механика полимеров, 1968, № 2.
3. Аким М. И. М. Победря Б. Е. К решению квазистатических задач анизотропной вязкоупругости. Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, 31, № 2.
4. Зевин А. А. Напряжения и деформации неоднородной наследственной среды. ПМ, 1973, т. 9, вып. 3.
5. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.—Л. Гостехиздат, 1949.
6. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородных стареющих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
7. Зевин А. А. Распространение принципа Вольтерра на случай неоднородно стареющей наследственной среды. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 4.
8. Зевин А. А. К расчету статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона. ПМ, 1974, т. 10, вып. 7.
9. Пеллегрини Ф. Теория аналитических функционалов и ее приложения. В кн.: Леви И. Конкретные проблемы функционального анализа. М., «Наука», 1967.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., Физматгиз, 1959.
11. Гончаров В. А. Теория интерполирования и приближения функций. М., ГИИТА, 1954.
12. Уолш Дж. А. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., ИЛ, 1961.
13. Розовский М. И. Об одном классе функций и их приложениях. Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 1.
14. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
15. Маркевич Т. Г., Трапезникова А. П. Применение начала возможных изменений напряженного состояния к решению задач термоползучести для бетонного блока на скальном основании. Известия ВНИИГ, т. 114, 1976.