В. А. ГОРДОН, Г. Б. КОЛЧИН

МЕТОД ФАЗОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧЕ
 ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

1. Квазистатическая осесимметричная плоская задача термоупругости для полого цилиндра, модуль упругости E которого зависит от температуры T , сведется, как известно, к уравнению [1, 2]

$$\sigma_r' + a(r)\sigma_r + b(r)\tau_r = c(r) \quad (1.1)$$

где

$$a(r) = \frac{3}{r} - \frac{E'}{E}, \quad b(r) = -\frac{\nu}{r} \frac{E'}{E}, \quad c(r) = \frac{E}{r(\nu-1)} \varepsilon_T$$

$$\varepsilon_T = \int_{T_0}^T \alpha dT$$

$$\nu = \begin{cases} \frac{1-2\nu_0}{1-\nu_0} & \text{в случае плоской деформации} \\ 1-\nu_0 & \text{в случае плоского напряженного состояния} \end{cases}$$

r — радиальная координата

Здесь и далее штрихом обозначается операция дифференцирования.

Введем безразмерные радиус $\rho = r/R_1$ и температуру $\tau = T/T_1$, где R_1 и T_1 — соответственно радиус и температура внутренней поверхности цилиндра. Распределение температур по толщине цилиндра в стационарном случае при условии постоянства коэффициента теплопроводности описывается зависимостью [3]

$$\tau = 1 + \frac{\Delta T}{\ln \rho} \ln \rho \quad (1.2)$$

где

$$\rho = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Delta T = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \quad (T_2 < T_1)$$

Здесь R_1 и T_1 — соответственно радиус и температура внешней поверхности цилиндра.

Принимая в качестве независимой переменной температуру τ и проведя в уравнении (1.1) замену переменной, получим разрешающее уравнение осесимметричной задачи неоднородной термоупругости в виде

$$z'' + \beta(z)z' + \gamma(z)z = \lambda(z) \quad (1.3)$$

где $z = \frac{r}{R_1}$, p_1 — внутреннее давление

$$\beta(z) = 3 \frac{\beta'}{\nu} - \frac{E'}{E}, \quad \gamma(z) = -\frac{E'}{E} \frac{\beta'}{\nu}, \quad \lambda(z) = \frac{E(\beta')^2}{\rho \phi (\nu - 1)} z \tau$$

Радиус выражается через температуру τ с помощью зависимости (1.2)

$$\beta = \exp h(\tau - 1) \quad (1.4)$$

где $h = \frac{\ln \beta_1}{\Delta T}$.

Аргумент изменяется в пределах

$$\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$$

где $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1 + \Delta T$.

Решение уравнения (1.3) должно удовлетворять граничным условиям

$$z(1) = 1, \quad z(1 + \Delta T) = i \quad (1.5)$$

где $i = \frac{p_2}{p_1}$, p_2 — наружное давление.

Классический подход к решению уравнения типа (1.3), заключающийся в отыскании базисных функций в виде бесконечных полиномов и определении частного решения методом вариации постоянных удается применить к сравнительно небольшому классу специальных уравнений. Сюда относятся уравнения Бесселя, Матье, Лежандра, Лаггера, Вебера, Эйри, гипергеометрические, для которых найдены и табулированы базисные функции. Эти уравнения представляют незначительную часть возможных линейных уравнений с переменными коэффициентами.

В случае произвольной неоднородности в основной массе работ, посвященных этой проблеме, используется метод последовательных приближений и различных модификациях [1].

2. В качестве одного из методов получения приближенного замкнутого решения поставленной задачи при произвольном характере неоднородности предлагается использовать матричный вариант метода фазовых интегралов (ВКБ) [4, 5].

С помощью подстановки

$$z = \sum \exp\left(-\frac{1}{2} \int \beta dz\right) \quad (2.1)$$

приведем (1.3) к виду

$$\Sigma'' + k^2(\tau)\Sigma = q(\tau) \quad (2.2)$$

где

$$k^2(\tau) = \gamma(\tau) - \frac{1}{4}\beta^2(\tau) - \frac{1}{2}\beta'(\tau)$$

$$q(\tau) = \delta(\tau) \exp\left(\frac{1}{2} \int \beta d\tau\right)$$

Обозначив

$$\underline{\Sigma} = x_1, \quad \underline{\Sigma}' = x_2 \quad (2.3)$$

получим из (2.2) каноническое уравнение в фазовых координатах

$$X' = A(\tau)X + Bq(\tau) \quad (2.4)$$

где

$$X(\tau) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы A определяются из уравнения

$$\det(A - zE) = 0$$

и равны

$$z_1 = ik, \quad z_2 = -ik$$

а соответствующие собственные векторы — $\{1, ik\}$ и $\{1, -ik\}$.

Введем преобразование

$$X = RF \quad (2.5)$$

где $F = \{f_1, f_2\}^T$ — неизвестный вектор, R — квадратная (2×2) матрица, столбцами которой являются координаты собственных векторов матрицы A .

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Тогда уравнение относительно F принимает вид

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik & 0 \\ 0 & -ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \frac{k'}{2k} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \frac{iq}{2k} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Структура системы уравнений (2.7) показывает, что в случае, когда функция k изменяется плавно и не принимает нулевых значений во всем диапазоне изменения аргумента, взаимодействие уравнений слабое и система распадается на два независимых неоднородных уравнения первого порядка относительно введенных фазовых координат f_1 и f_2 .

$$f_1 = \left(ik - \frac{k'}{2k} \right) f_1 - \frac{iq}{2k}$$

$$f_2 = \left(-ik - \frac{k'}{2k} \right) f_2 + \frac{iq}{2k}$$

решения которых (фазовые интегралы) легко определяются

$$f_1 = \left(C_1 - \frac{i}{2} \psi_2 \right) \bar{\varphi}_1 \quad (2.8)$$

$$f_2 = \left(C_2 + \frac{i}{2} \psi_1 \right) \bar{\varphi}_2 \quad (2.9)$$

где

$$\varphi_1 = k^{-\frac{1}{2}} \exp \left(i \int k d\xi \right), \quad \psi_1 = \int q(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi,$$

$$\varphi_2 = k^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-i \int k d\xi \right), \quad \psi_2 = \int q(\xi) \varphi_2(\xi) d\xi$$

Располагая решениями (2.8), (2.9), учитывая вид матрицы R (2.6), из представлений (2.5), (2.3) и (2.1) получим

$$c = C_1 \bar{\varphi}_1 + C_2 \bar{\varphi}_2 + \frac{i}{2} (\psi_1 \bar{\varphi}_2 - \psi_2 \bar{\varphi}_1) \quad (2.10)$$

где

$$\bar{\varphi}_1 = k^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\int \left(ik - \frac{1}{2} \beta \right) d\xi \right]$$

$$\bar{\varphi}_2 = k^{-\frac{1}{2}} \exp \left[- \int \left(ik + \frac{1}{2} \beta \right) d\xi \right]$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условия (1.5).

3. Функции $f_1^0 = C_1 \bar{\varphi}_1$ и $f_2^0 = C_2 \bar{\varphi}_2$ являются приближенными базисными функциями уравнения (2.2) и точными базисными функциями уравнения сравнения, образованного двукратным дифференцированием функции f_1'' (или f_2'')

$$f'' + k^2(1+g)f = 0 \quad (3.1)$$

где f означает любое из частных решений f_1'' или f_2'' .

$$g = \frac{1}{2k^2} \left| \frac{k''}{k} - \frac{3}{2} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \right| \quad (3.2)$$

Левые части уравнений (3.2) и (2.2) совпадают, если

$$|g| \ll 1$$

Таким образом, необходимым условием существования приближенных решений (2.8) и (2.9) является неравенство, накладываемое на функцию неоднородности

$$\left| \frac{1}{2k^2} \left| \frac{k'}{k} - \frac{3}{2} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \right| \right| \ll 1 \quad (3.3)$$

4. Пусть зависимость модуля Юнга от температуры носит линейный характер [6]

$$E = E_0(1 - \Delta E_1 \tau) \quad (4.1)$$

где E_0 — невозмущенный модуль упругости

$$\Delta E_1 = \frac{\beta_1 T_1}{E_0}$$

β_1 — эмпирическая константа материала.

Величина $\Delta E_1 \cdot 100\%$ показывает, на сколько процентов снижается модуль упругости на внутренней поверхности в результате нагрева по сравнению с невозмущенным модулем.

Левая часть неравенства (3.3) в случае зависимости (4.1) принимает вид

$$g = \frac{M(\tau)}{2N^2(\tau)} \left| S(\tau) - \frac{5}{8} \frac{M(\tau)}{N(\tau)} \right| \quad (4.2)$$

где

$$M(\tau) = h(\bar{\nu} - 1.5 S^2(\tau)) - 1.5 S^2(\tau)$$

$$N(\tau) = -2.25 h^2 + (\bar{\nu} - 1.5) h S(\tau) - 0.75 S^2(\tau)$$

$$S(\tau) = \frac{\Delta E_1}{1 - \Delta E_1 \tau}$$

Анализ выражения (4.2) показывает, что при $h \rightarrow \infty$, то есть в случае отверстия радиуса R_1 в бесконечной плоскости, получаем точное решение, так как $g(\tau) \rightarrow 0$, при $\Delta E_1 = 0$ ($\beta_1 = 0$) получаем точное решение, так как $g(\tau) \equiv 0$. В остальных случаях получаем приближенное решение.

Рассмотрим случай нагружения толстостенного цилиндра ($\mu = 10$) со значительным перепадом температур ($T_1 \ll T_0$, $\tau_1 \rightarrow 0$), причем модуль упругости материала на внутренней поверхности составляет 50% модуля в ненагретом состоянии ($\Delta E_1 = 0.5$). Коэффициент Пуассона примем 0.33. В этом случае аргумент изменяется в пределах от 1 на внутренней до 0 — на наружной поверхностях. Степень точности приближенного решения бу-

дет переменной для разных температур и определяется величиной $g-g(\tau)$. Абсолютная величина g при указанных значениях параметров цилиндра изменяется между значениями

$$|g(1)| = 0.0115 \ll 1, \quad |g(0)| = 1.0013 \ll 1$$

Отсюда следует, что использование решений типа (2.10) в этом случае корректно.

Очевидно, что предлагаемая методика допускает обобщение и на другие случаи распределения температуры по толщине цилиндра.

Институт математики
с ВЦ АН СССР
Квининевский политехнический
институт им. С. Лазо

Поступила 13 II 1979

Վ. Ա. ԳՈՐԴՈՆ, Գ. Յ. ԿՈԼԹԻՆ

ՖԱԶՉՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԸՆԹՈՒԿԸ ՈՉ ՀԱՊԱՍԵՆՈՒ ԿԵԼԱՆԻ ԶԵՐՈՄԱՑՈՒՂՄԱԿԱՆ ԿԵԼՄՈՒԹՅՈՒՄ

Ա. մ. փ. ս. փ. ո. ս.

Ուսումնասիրվում է բվադիստատիկ առանցքատիմնորիկ խնդիր, երբ կլորի առաձգականության մոդուլը արված է որպես ջերմաստիճանի ֆունկցիա:

Փոփոխական գործակիցներով անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը շատավզային լուծման համար, որը դիտարկվում է որպես ջերմաստիճանի ֆունկցիա, լուծվում է ֆազային ինտեգրալների մատրիցային մեթոդով:

Ստացվել է փակ մոտավոր լուծում: Ակզրնական հավասարման և ստացված լուծումների դիֆերենցիալ և նրանց օգնությամբ ստացված հավասարման բաղդատման նույնությունից ելնելով ձևակերպվում է մոտավոր լուծումների զոյության անհրաժեշտ պարամեր ոչ համասեռության ֆունկցիայի վրա դրված անհավասարության ձևով:

Քվալին օրինակի վրա ցույց է արված մեթոդի կիրառման նախադրությունը, երբ առաձգականության մոդուլը զծայնորեն է կախված ջերմաստիճանից:

PHASE INTEGRAL METHOD IN THE PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR THE NON-HOMOGENIOUS CYLINDER

V. A. GORDON, G. B. COLTHCIN

S u m m a r y

The axisymmetrical problem of a non-homogeneous thermoelasticity is solved by the phase integral method. The problem is reduced to the

solution of two coupled first-order differential equations. The coefficients of initial equation must subordinate by certain inequality.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин Г. Б. Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. Кишинев, Штиинца, 1977.
2. Масквитин В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М., Наука, 1974.
3. Карлсруу Г., Егер А. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
4. Хелинг Л. Введение в метод фазовых интегралов. М., Мир, 1965.
5. Гордон В. А. Изгиб неоднородной балки на неоднородном упругом основании. Сб. исследования механического сопротивления материалов и конструкций. Вып. 28. М., МИСИ, 1978.
6. Колчин Г. Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. Кишинев, Картя молдовеняско, 1971.