Л. М. КУРШИН, Г. И. РАСТОРГУЕВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ СЕЧЕНИЯ
 СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ

В работе [1] доказано, что из всех призматических стержней с одно-
 связным поперечным сечением с заданными осевыми моментами инерции
 максимальную жесткость кручения будет иметь стержень с эллиптическим
 сечением. Доказательство сводится к сравнению жесткостей кручения
 стержней эллиптического и любого другого сечений, имеющих те же осе-
 вые моменты инерции. Та же задача об определении формы поперечного
 сечения стержня максимальной крутильной жесткости с известными осе-
 выми моментами инерции рассматривается в настоящей работе как изопе-
 риметрическая вариационная задача о стационарном значении некоторого
 функционала в области с подвижной границей. В качестве естественных
 условий стационарности функционала, кроме обычных уравнений для
 функции кручения, получено дополнительное условие, позволяющее опре-
 делить форму искомого контура. Показано, что дополнительному краевому
 условию удовлетворяет контур сечения в виде эллипса.

1. Рассмотрим работающий на кручение призматический стержень
 с односвязным поперечным сечением B , ограниченным контуром L . Поче-
 мистим начало декартовой системы координат xOy в некоторую внутреннюю
 точку сечения. Пусть заданы осевые моменты инерции сечения

$$I_x = \iint_B y^2 dx dy, \quad I_y = \iint_B x^2 dx dy \quad (1.1)$$

Функция напряжений при кручении $\varphi(x, y)$ [2] должна удовлетво-
 рять уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + 2 = 0 \quad (x, y) \in B \quad (1.2)$$

и краевому условию

$$\varphi = 0 \quad (x, y) \in L \quad (1.3)$$

Согласно [3], задача об определении формы поперечного сечения
 стержня, имеющего максимальную крутильную жесткость при заданных
 осевых моментах инерции (1.1) сечения, может быть поставлена как ва-
 риационная задача о стационарном значении функционала

$$V = \iint_B (4\varphi - \varphi_x^2 - \varphi_y^2) dx dy - \lambda_1 \iint_B y^2 dx dy + \lambda_2 \iint_B x^2 dx dy \quad (1.4)$$

в области с подвижной границей при условии (1.3): через λ_1, λ_2 обозначены постоянные. Условию стационарности функционала (1.4) с учетом (1.3) соответствуют уравнение в области (1.2) и вследствие варьирования границы условие

$$\varphi_n^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 x^2 = 0 \quad (x, y) \in L \quad (1.5)$$

Здесь φ_n — производная функции $\varphi(x, y)$ по нормали к контуру. Условие (1.5) является дополнительным для обычной краевой задачи (1.2), (1.3) кручения стержней с одноосевым поперечным сечением и позволяет определить форму искомого контура.

Для определения отличных от нуля постоянных λ_1, λ_2 разыскиваем решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию (1.3) в виде

$$\varphi = -c_1 x^2 + (c_1 - 1)y^2 + c_2 \quad (x, y) \in B + L$$

где $0 < c_1 < 1, c_2 > 0$ — постоянные, и получаем уравнение границы сечения

$$y^2 = (-c_1 x^2 + c_2)/(1 - c_1) \quad (x, y) \in L$$

определяющее эллипс. В этом случае

$$\varphi_n^2 = 4\{c_1(2c_1 - 1)x^2 + c_2(1 - c_1)\} \quad (x, y) \in L$$

и постоянные λ_1, λ_2 однозначно определяются из дополнительного краевого условия (1.5).

2. Аналогичный результат — эллиптическая форма области — может быть получен и в задаче о равностороннем растяжении пластинки. Рассмотрим пластинку постоянной толщины h , ограниченную замкнутым контуром L и нагруженную постоянным напряжением $\sigma_n = p$, направленным по нормали к контуру. Форму границы разыскиваем из условия минимума энергии упругой деформации пластинки при заданных осевых моментах инерции (1.1) (xOy — срединная плоскость пластинки). Тогда на границе L получается дополнительное краевое условие вида

$$h(1 - \nu)p^2/E - \lambda_1 y^2 + \lambda_2 x^2 = 0 \quad (x, y) \in L$$

где λ_1, λ_2 — некоторые постоянные, E, ν — упругие постоянные материала. Эту задачу можно трактовать и как задачу об определении формы плоской замкнутой кривой, ограничивающей минимальную площадь при заданных осевых моментах инерции, поскольку рассматриваемая пластинка находится в состоянии равностороннего растяжения, и энергия упругой деформации пропорциональна площади, охватываемой L .

Форма сечения в виде эллипса или окружности соответствует стержню наименьшего веса при ограничениях на круглую и изгибную жесткости [4]. В работе [4] исследованы также аналогичные задачи.

ՈՂՈՐՎՈՂ ԶՈՂԻ ԿՏՐՎԱՅՔԻ ՕՓՏԻՄԱԼ ԶԵՎԻ ԻՐԱՍԻՆ

Ա մ փ ա լ ի ո ս մ

Դիտարկվում է արված խնդրիչայի առանցքային մոմենտներով և ամենամեծ ոլորման կոշտություն ունեցող պրիզմատիկ ձողի կտրվածքի ձևի որոշման խնդիրը:

Շարժվող կտրագծով սիրույթում տրված որոշակի ֆունկցիոնալի կայունության պայմանից հետևում է անհայտ եղրագծի վրա լրացուցիչ եզրային պայման, որին ըավարարում է էլիպսի աևսրով կտրվածքի եղրագիծը: Այդ համապատասխանում է Ե. Լ. Նիկոլայևի կողմից ապացուցված թևսրևմինս:

ON THE OPTIMAL SECTIONAL FORM OF THE TORSIONAL ROD

L. M. KURSHIN, G. I. RASTORGUEV

S u m m a r y

The problem on determination of the prismatic rod sectional form having maximum torsion stiffness with the given moments of inertia about its axis is discussed. The additional condition on the unknown boundary results from the stationarity of a functional in the field with a movable boundary. The elliptical form of the section contour satisfies this condition. It corresponds to the theorem proved by E. L. Nikolaji.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nikolai E. L. Über die Drillungssteifigkeit zylindrischer Stäbe. Zeitschrift für angew. Math. und Mech., 1924, 4, Сч. также Николаи Е. А., Тр. по механике. М., Гостехиздат, 1955, стр. 67—70.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
3. Куршин Л. М. К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости. Докл. АН СССР, 1975, 223, 3.
4. Banichuk N. V., Karthuloo B. L. Minimum-Weight design of multi-purpose cylindrical bars. Internat. J. Solids and Structures, 1976, 12, 4.