ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, №6, 1979 Механика

А. А. БАБЛОЯН, А. М. МКРТЧЯН

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ СОЕДИНЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ И КОЛЬЦЕВЫХ СЕКТОРОВ

В работе рассматриваются некоторые задачи кручения однородных и неоднородных призматических стержней, когда поперечное сечение стержня представляет собой соединение криволинейных прямоугольников, границы которых образованы частями координатных линий в декартовой и полярной системах координат.

Такие задачи встречаются в строительной и машиностроительной технике и имеют практическое значение.

Задачи решаются с использованием аппарата сингулярных интегральных уравнений. Предложенный метод позволяет получить точные численные результаты как для жесткости, так и для напряжений в зависимости от геометрических и физических параметров профиля.

§ 1. Рассмотрим задачу кручения полого составного стержня постоянной толщины с поперечным сечением в виде чередующихся прямоугольников и кольцевых секторов из различных материалов (фиг. 1, 2).

Как известно [1—3], решение задачи кручения в постановке Сен-Венана сводится к определению функции напряжений, которая в области поперечного сечения удовлетворяет уравнению Пуассона, а на границе области принимает постоянные значения.

Для полого призматического стержня одно из постоянных значений произвольно, а другое определяется по формуле Бредта [1].

Пользуясь наличием осей симметрии, для области поперечного сечения стержня берем $\frac{1}{2}$ m-ую часть основной области (фиг. 2), где m — число осей симметрии профиля (при $m=3$ имеем правильный треугольник с закругленными углами (фиг. 3), при $m=4$ — полое квадратное сечение (фиг. 1)).

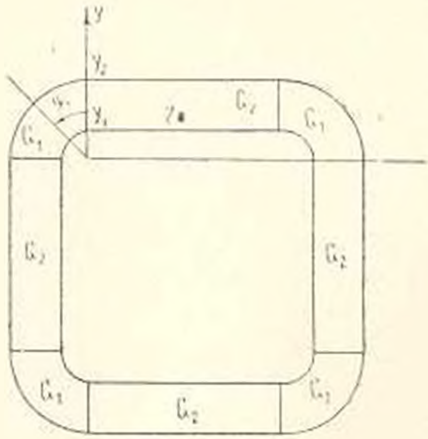
Отделенную $\frac{1}{2}$ m-ую область берем в виде соединения прямоугольной области с сектором кольца, имеющих одинаковую толщину и составленных из различных материалов, угол $\gamma_1=\frac{\pi}{m}$ (фиг. 2) зависит от числа осей симметрии.

Функцию напряжений ищем в виде

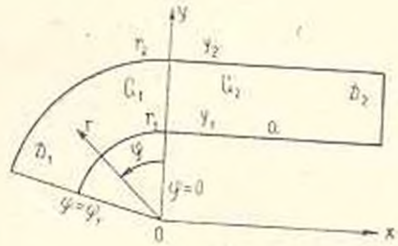
$$u=\begin{cases} u_1(r,\varphi) \text{ в кольцевой области } D_1 \\ u_2(x,y) \text{ в прямоугольной области } D_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

На линии контакта областей D_1 и D_2 функции $u_i(i = 1, 2)$ должны удовлетворять следующим условиям сопряжения:

$$u_1(r, 0) = u_2(0, y), \qquad \frac{1}{G_1 r}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = -\frac{1}{G_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} \tag{1.2}$$



Фиг. 1.

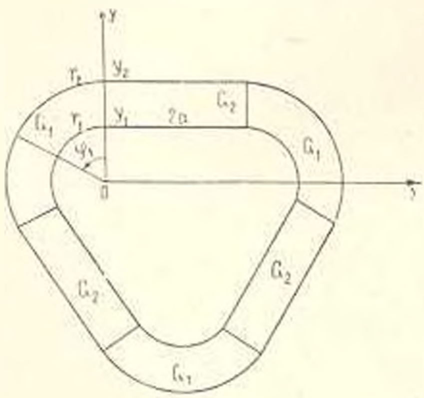


Фиг. 2.

На осях симметрии ($x = a$ и $\varphi = \varphi_1$) нормальная производная функции напряжений должна равняться нулю

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=a} = 0, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{m} \tag{1.3}$$

а на контурах сечения необходимо удовлетворять условиям



Фиг 3.

$$u_1(r_2, \varphi) = u_2(x, r_2) = 0$$
$$u_1(r_1, \varphi) = u_2(x, r_1) = C_0 \tag{1.4}$$

где постоянная C_0 должна определяться по формуле Бредта [1].

Функции u_i ($i = 1, 2$), удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} = -2G_1 \quad \text{для } D_1$$
$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -2G_2 \quad \text{для } D_2 \tag{1.5}$$

ищем в виде

$$\frac{1}{G_1}u_1(r, \varphi) = \frac{C_0}{G_1}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) + f_1(r) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\operatorname{ch}\beta_k(\varphi_1 - \varphi)}{\beta_k \operatorname{sh}\beta_k \varphi_1}\sin\beta_k t$$
$$\frac{1}{G_2}u_2(x, y) = \frac{C_0(r_2 - y)}{G_2(r_2 - r_1)} + f_2(y) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\operatorname{ch}\gamma_k(a - x)}{\gamma_k \operatorname{sh}\gamma_k a}\sin\gamma_k(y - r_1) \tag{1.6}$$

где

$$t = \ln \frac{r}{r_1}, \quad t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad \gamma_k = \frac{\pi k}{r_2 - r_1}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1} \tag{1.7}$$

функции $G_1 f_1$ и $G_2 f_2$ являются частными решениями неоднородных уравнений (1.5), обращающимися в нуль на концах интервалов определения

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{r_1^2 - r^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} \ln \frac{r}{r_1} \qquad (r_1 \leqslant r \leqslant r_2) \\ f_2(y) &= (r_2 - y)(y - r_1) \qquad\qquad (r_1 \leqslant y \leqslant r_2) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Функции (1.6) удовлетворяют (1.3) и (1.4).

Введем вспомогательную неизвестную функцию

$$f(r) = \frac{1}{G_1} \frac{\partial u_1}{r \partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = -\frac{1}{G_2} \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} \tag{1.9}$$

Удовлетворяя второму условию (1.2), получим

$$f(r) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \beta_k t = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \gamma_k (r - r_1) \tag{1.10}$$

откуда для коэффициентов A_k и B_k получим следующие представления:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{t_1} \int_{r_1}^{r_2} f(\rho) \sin \left(\beta_k \ln \frac{\rho}{r_1} \right) d\rho \\ B_k &= \frac{2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} f(\rho) \sin \gamma_k (\rho - r_1)\, d\rho \end{aligned} \tag{1.11}$$

Удовлетворяя первому условию (1.2), используя при этом (1.10) и (1.11), после некоторых преобразований для определения неизвестной функции $f(r)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\int_{r_1}^{r_2} f(\rho) \left[G_1 K_1(\rho, r) + G_2 K_2(r, \rho) \right] d\rho = g(r), \quad (r_1 \leqslant r \leqslant r_2) \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned} K_1(r, \rho) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{cth} \beta_n \varphi_1 \sin \left(\beta_n \ln \frac{r}{r_1} \right) \sin \left(\beta_n \ln \frac{\rho}{r_1} \right) \\ K_2(r, \rho) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{cth} \gamma_n a \sin \gamma_n (r - r_1) \sin \gamma_n (\rho - r_1) \\ g(r) &= G_1 f_1(r) - G_2 f_2(r) + C_0 \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} - \frac{t}{t_1} \right) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Введем обозначение

$$K(r, \rho) = K_1(r, \rho) - K_2(r, \rho) \tag{1.14}$$

Нетрудно убедиться, что функция $K(r, \rho)$ непрерывна и на границе области определения обращается в нуль.

Действительно, если воспользоваться значением ряда [7]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = \ln \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \quad (0 < x < 2\pi) \tag{1.15}$$

и представить функцию $K(r, \rho)$ в виде

$$K(r, \rho) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{cth} \beta_n \varphi_1 - 1) \sin\left(\beta_n \ln \frac{r}{r_1}\right) \sin\left(\beta_n \ln \frac{\rho}{r_1}\right) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{cth} \gamma_n a - 1) \sin \gamma_n (r - r_1) \sin \gamma_n (\rho - r_1) + \tag{1.16}$$

$$+ \ln \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2t_1} \ln \frac{r\rho}{r_1^2}\right) \sin \frac{\pi (r - \rho)}{2(r_2 - r_1)}}{\sin \frac{\pi (r + \rho - 2r_1)}{2(r_2 - r_1)} \sin\left(\frac{\pi}{2t_1} \ln \frac{r}{\rho}\right)} \right|$$

тогда каждое слагаемое (1.16) будет обладать вышеупомянутыми свойствами. Благодаря равномерной сходимости рядов (1.16) относительно переменных r, ρ, функция $K(r, \rho)$ также будет обладать этими свойствами.

Функция $g(r)$ (1.13) дважды дифференцируема при $r_1 > 0$ и на концах интервала $[r_1, r_2]$ обращается в нуль.

Пользуясь формулами (1.10—1.14), сводим интегральное уравнение (1.12) к решению двух независимых друг от друга бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_k, B_k

$$A_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} A_k + \alpha_p \qquad B_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} B_k + b_p \quad (p = 1, 2) \tag{1.17}$$

где

$$a_{pk} = \frac{2\beta_p G_2 \operatorname{th} \beta_p \varphi_1}{(G_1 + G_2) t_1} \int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2} K(r, \rho) \sin\left(\beta_k \ln \frac{\rho}{r_1}\right) \sin\left(\beta_p \ln \frac{r}{r_1}\right) \frac{d\rho\, dr}{\rho r}$$

$$b_{pk} = -\frac{2\gamma_p G_1 \operatorname{th} \gamma_p a}{(G_1 + G_2)(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2} K(r, \rho) \sin \gamma_p (r - r_1) \sin \gamma_k (\rho - r_1)\, dr\, d\rho$$

$$\alpha_p = \frac{2\beta_p \operatorname{th} \beta_p \varphi_1}{(G_1 + G_2) t_1} \int_{r_1}^{r_2} g(r) \sin\left(\beta_p \ln \frac{r}{r_1}\right) \frac{dr}{r} \tag{1.18}$$

$$b_p = \frac{2\gamma_p \operatorname{th} \gamma_p a}{(G_1 + G_2)(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} g(r) \sin \gamma_p (r - r_1)\, dr$$

Из свойств функций $K(r, \varphi)$ и $g(r)$ следует [4, 5], что коэффициенты a_{pk} и b_{pk} при фиксированном значении p и $k \to \infty$ стремятся к нулю, как $O(k^{-3})$, а при фиксированном k и $p \to \infty$ имеют порядок $O(p^{-1})$. Свободные члены бесконечных систем при возрастании индекса p стремятся к нулю, как $O(p^{-1})$.

При таких условиях нетрудно убедиться, что [6]

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| = 0, \qquad \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| = 0$$

то есть система (1.17) при $r_1 > 0$, $a > 0$, $\varphi_1 > 0$ квазивполне регулярна. Применяя метод последовательных приближений к системам (1.7), получим, что при $p \to \infty$ неизвестные A_p и B_p стремятся к нулю, как $O(p^{-2})$. Отсюда следует, что функция $f(r)$ непрерывна и на концах интервала $[r_1, r_1]$ обращается в нуль.

Пользуясь формулой Бредта, которая в этом случае принимает вид

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{r}{G_1} \frac{\partial u_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} d\varphi - \int_0^{a} \frac{1}{G_2} \frac{\partial u_2}{\partial y}\bigg|_{y=r_1} dx = -2\Omega_0$$

$$\Omega_0 = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \varphi_1 + ar_1 + \frac{r_1^2}{2} \varphi_1 \tag{1.19}$$

для постоянной C_0 и жесткости при кручении получим следующие выражения:

$$C_0 \left[\frac{\varphi_1}{G_1 t_1} + \frac{a}{G_2 (r_2 - r_1)} \right] = a(r_1 - r_2) + a^2 \operatorname{ctg} \varphi_1 + \\ + \frac{\varphi_1 (r_2^2 - r_1^2)}{2t_1} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k}{\beta_k} - \frac{B_k}{\gamma_k} \right) \tag{1.20}$$

$$\frac{1}{4m} C = \frac{1}{2} C_0 \left[a^2 \operatorname{ctg} \varphi_1 + a(r_1 + r_2) + \varphi_1 \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} \right] + \\ + \frac{1}{8} G_1 \varphi_1 \left[r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{t_1} \right] + G_2 \frac{a (r_2 - r_1)^3}{6} - \\ - G_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_2^2 - (-1)^k r_1^2}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)} A_k + G_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^3} B_k \tag{1.21}$$

Используя формулы

$$\tau_{rz} = \theta \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \tau_{yz} = \theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

для напряжений получим

$$\frac{1}{G_1 \theta} \tau_{\varphi z} (r, \varphi) = -\frac{C_0}{G_1 r t_1} + f_1(r) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{r \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1} \cos \beta_k t \tag{1.22}$$

$$\frac{1}{G_2\delta}\tau_{xz}(x, y) = -\frac{C_0}{G_2(r_2-r_1)} + f_2(y) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\operatorname{ch}\gamma_k(a-x)}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\cos\gamma_k(y-r_1) \tag{1.23}$$

где $f_1(r)$ и $f_2(r)$ даются формулами (1.8).

Отметим, что достаточно решить только одну из бесконечных систем (1.17), так как имея значения $A_k(B_k)$, неизвестное $B_k(A_k)$ можно определить по формулам

$$A_p = \frac{r_2-r_1}{l_1}\sum_{k=1}^{\infty} B_k M_{pk}, \qquad B_k = \frac{l_1}{r_2-r_1}\sum_{p=1}^{\infty} A_p N_{kp} \tag{1.24}$$

которые получаются из формул (1.10), (1.11).
Здесь

$$M_{kp} = \frac{1}{r_2-r_1}\int_{r_1}^{r_2}\sin\left(\beta_k \ln\frac{r}{r_1}\right)\sin\gamma_p(r-r_1)\,dr$$

$$N_{pn} = \frac{2}{l_1}\int_{r_1}^{r_2}\sin\left(\beta_p \ln\frac{r}{r_1}\right)\sin\gamma_n(r-r_1)\,\frac{dr}{r} \tag{1.25}$$

Пользуясь обозначениями (1.25), выражения (1.18) можно представить в виде, удобном для вычислений

$$a_{pk} = \frac{G_2}{G_1+G_2}\left[\delta_{pk} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p\operatorname{th}\beta_p\varphi_1}{n\operatorname{th}\gamma_n a}N_{kn}N_{pn}\right]$$

$$b_{pk} = \frac{G_1}{G_1+G_2}\left[\delta_{pk} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p\operatorname{th}\gamma_p a}{n\operatorname{th}\beta_n\varphi_1}M_{np}M_{nk}\right]$$

$$a_p = \frac{\beta_p\operatorname{th}\beta_p\varphi_1}{(G_1+G_2)}\left[G_1\alpha_p^{(1)} + C_0\alpha_p^{(2)} - \frac{4G_2}{r_2-r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\gamma_n^2}N_{pn}\right] \tag{1.26}$$

$$b_p = \frac{\gamma_p\operatorname{th}\gamma_p a}{G_1+G_2}\left[G_1\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(1)}M_{kp} + C_0\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(2)}M_{kp} - \frac{4G_2[1-(-1)^p]}{(r_2-r_1)\gamma_p^2}\right]$$

где δ_{pn} — символ Кронекера, а

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{4[r_1^2-(-1)^k r_2^2]}{l_1\beta_k(\beta_k^2+4)}, \qquad \alpha_k^{(2)} = -\frac{2[r_1-(-1)^k r_2]}{l_1\beta_k(r_2-r_1)(\beta_k^2+1)}$$

Отметим, что ряд в выражении для a_p суммируется, а сходимость ряда в выражении C_0 можно улучшить.

$$\frac{2}{r_2-r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\gamma_n^2}N_{pn} = \alpha_p^{(1)} + \frac{r_2^2-r_1^2}{2}\alpha_p^{(2)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{A_k\cos\beta_k t}{\beta_k}-\frac{B_k\cos\gamma_k(r-r_1)}{\gamma_k}\right]= \tag{1.27}$$

$$=\int_{r_1}^{r_2} f(r)\left(\frac{r-r_1}{r_2-r_1}-\frac{t}{t_1}\right)dr=\frac{t_1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}A_k\alpha_k^{(2)}$$

§ 2. Рассмотрим числовые примеры. Вычисления проведены для различных значений безразмерных величин:

$$\mu=\frac{G_1}{G_2},\quad \eta=\frac{x}{r_1},\quad \eta_1=\frac{a}{r_1},\quad \xi=\frac{r}{r_1},\quad \xi_1=\frac{r_2}{r_1},\quad U_0=\frac{C_0}{G_2 r_1^2}$$

$$G_0=\frac{C}{G_2 r_1^4},\quad m=\frac{\pi}{\varphi_1},\quad \tau_0=\begin{cases}\tau_{z\varphi}(r,\varphi)/G_2\theta r_1 & \text{для круговой области}\\ \tau_{zx}(x,y)/G_2\theta r_1 & \text{для прямоугольной области}\end{cases}$$

В табл. 1—4 приведены значения жесткости G_0, постоянного U_0 и напряжения τ_0 вдоль внутреннего $\xi=1$ и наружного $\xi=\xi_1$ контуров поперечного сечения при следующих соотношениях геометрических и физических параметров:

$$m = 2;\ 3;\ 4.$$

$$\eta_1 = 0.25;\ 0.5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8.$$

$$\mu = 0.5;\ 1;\ 2;\ 4.$$

$$\xi = 1,\ \xi_1.$$

$$\xi_1 = 1.2;\ 2.$$

На основе табл. 1—4 можно сделать следующие выводы:

1. При $\mu \leqslant 2$ на внутреннем контуре сечения максимальное напряжение достигается в центре круговой части, а на внешнем контуре—в середине прямолинейной части.

2. При $\mu > 2$ на внутреннем контуре максимальное напряжение достигается на середине прямоугольной части. Причем, когда $\eta_1 \leqslant 4$, при перемещении от середины дуги круговой части к середине прямолинейной части напряжения монотонно возрастают. На внешнем контуре, наоборот, максимальное напряжение — на середине круговой части и уменьшается по мере приближения к центру прямолинейной части.

3. При переходе по нормали от внутреннего контура к наружному на прямолинейных частях напряжения возрастают.

На круговых частях от внутреннего контура к внешнему напряжения возрастают при малых значениях η_1. При больших η_1 напряжения на внешнем контуре круговой части не превышают соответствующие значения напряжений на внутреннем контуре.

4. На круговых и прямоугольных частях в отдельности напряжения мало изменяются вдали от точек стыка. В окрестностях стыка от круговых частей к прямолинейным напряжения претерпевают плавный переход.

На основе табл. 1—4 и формул (1.20)—(1.23) нетрудно получить приближенные выражения для искомых величин:

Таблица 1

$\xi_1=2;\ m=2$

μ	η_1	G_0	U_0	ξ	φ_0: φ_1	$\varphi_1/2$	0	$\varphi_1/2$	φ_1
$\frac{1}{2}$	0.25	16.187	0.8657	1	0.6651	0.6591	0.4405	0.27636	0.2383
				2	1.0829	1.0859	1.2760	1.4544	1.4921
	0.5	21.148	0.9693	1	0.8167	0.8069	0.5314	0.2178	0.1536
				2	1.1588	1.1629	1.4129	1.7237	1.7867
	1	32.304	1.1530	1	1.0806	1.0715	0.7611	0.2576	0.19429
				2	1.2909	1.2955	1.5629	2.0489	2.1115
	2	58.075	1.4353	1	1.4880	1.4779	1.1248	0.4583	0.4372
				2	1.4968	1.4979	1.7925	2.4123	2.4333
	4	117.74	1.8021	1	2.0165	2.0051	1.5976	0.8028	0.8017
				2	1.7590	1.7648	2.0891	2.8006	2.8017
	8	251.43	2.1839	1	2.5679	2.5550	2.0907	1.1839	1.1839
				2	2.0364	2.0412	2.3988	3.1839	3.1839
1	0.25	30.818	1.6458	1	1.2101	1.2034	0.9702	0.8757	0.8547
				2	2.1055	2.1089	2.3175	2.4178	2.4335
	0.5	38.472	1.7674	1	1.3853	1.3766	1.0807	0.9029	0.8678
				2	2.1932	2.1976	2.4568	2.6337	2.6678
	1	54.560	1.9556	1	1.6567	1.6466	1.2996	1.0138	0.9761
				2	2.3290	2.3341	2.6173	2.8981	2.9327
	2	88.552	2.2001	1	2.0093	1.9979	1.5968	1.2131	1.2012
				2	2.5053	2.5111	2.8369	3.1871	3.1990
	4	159.73	2.4551	1	2.3732	2.3644	1.9074	1.4558	1.4552
				2	2.6894	2.6959	3.0550	3.4545	3.4551
	8	306.16	2.6673	1	2.6832	2.6692	2.1658	1.6673	1.6673
				2	2.8425	2.8495	3.2565	3.6673	3.6673
4	0.25	97.206	5.0920	1	2.6918	2.7210	3.7298	3.8408	3.8638
				2	7.3441	7.3293	6.4599	6.3368	6.3155
	0.5	103.17	4.6031	1	1.9873	2.0232	3.2626	3.4633	3.5001
				2	6.9915	6.9733	5.9392	5.7393	5.7051
	1	118.33	4.0936	1	1.2506	1.2915	2.7222	3.0337	3.0694
				2	6.6228	6.6022	5.4444	5.1503	5.1156
	2	152.75	3.6673	1	0.63731	0.6819	2.2594	2.6547	2.6662
				2	6.3159	6.2934	5.0449	4.6798	4.6684
	4	225.41	3.3752	1	0.21606	0.2632	1.9409	2.3746	2.3752
				2	6.1052	6.0814	4.7711	4.3758	4.3752
	8	373.51	3.2001	1	0.03652	0.0121	1.7500	2.2001	2.2001
				2	5.9788	5.9542	4.6069	4.2001	4.2001

$$G_0=4m\left[\frac{c}{2}U_0+d\right] \tag{2.1}$$

$$U_0=\frac{1}{b}\left[c+\frac{u^2(1+\xi_1)X_1}{\pi(\xi_1-1)(u^2+\pi^2)}\right] \tag{2.2}$$

$$\frac{\tau_{\eta z}(\xi,\eta)}{G_2\theta r_1}=\xi_1+1-2\xi-\frac{U_0}{\xi_1-1}\qquad |\eta-\eta_0|<\frac{\eta_0}{2} \tag{2.3}$$

$$\frac{\tau_{\varphi z}(\xi,\varphi)}{G_2\theta r_1}=-\frac{U_0}{u\xi}-\xi\mu+\frac{\xi_1^2-1}{2u\xi}\mu-\frac{\mu X_1\operatorname{ch}\pi/u\,(\varphi_1-\varphi)}{\xi\operatorname{sh}(\pi^2/mu)} \tag{2.4}$$

где введены следующие обозначения:

Таблица 2

$\xi_1 = 2, \; m = 3$

μ	τ_1	G_0	U_0	ξ	τ_0: $-\tau_1$	$-\tau_1/2$	0	$\tau_1/2$	τ_1
$\frac{1}{2}$	0.25	18.964	0.928	1	0.7538	0.7362	0.5258	0.3529	0.3135
				2	1.1308	1.1399	1.3368	1.5080	1.5464
	0.5	28.336	1.105	1	1.0064	0.9827	0.7059	0.3676	0.2993
				2	1.2587	1.2712	1.5216	1.8457	1.9118
	1	54.118	1.447	1	1.4992	1.4706	1.1351	0.5642	0.4933
				2	1.5062	1.5211	1.8141	2.3317	2.4011
	2	138.60	2.100	1	2.4398	2.4045	1.9713	1.1286	1.1026
				2	1.9780	1.9964	2.3518	3.0719	3.0978
	4	480.50	3.342	1	4.2281	4.1801	3.5653	2.3434	2.3417
				2	2.8751	2.8999	3.3553	4.3401	4.3417
	8	2190.6	5.730	1	7.6681	7.5959	6.6412	4.7303	4.7303
				2	4.6009	4.6381	5.3042	6.7303	6.7303
1	0.25	35.329	1.729	1	1.3255	1.3019	1.0697	0.9717	0.9491
				2	2.1673	2.1777	2.3961	2.4899	2.5114
	0.5	49.669	1.939	1	1.6274	1.6004	1.2863	1.0890	1.0498
				2	2.3199	2.3341	2.6114	2.7929	2.8299
	1	86.574	2.322	1	2.1777	2.1437	1.7378	1.3914	1.3491
				2	2.5967	2.6144	2.9514	3.2536	3.2945
	2	197.98	3.007	1	3.1640	3.1194	2.5745	2.0249	2.0086
				2	3.0023	3.1154	3.5441	3.9893	4.0055
	4	611.97	4.260	1	4.9676	4.9038	4.0861	3.2614	3.2603
				2	3.9985	1.0313	4.6187	5.2592	5.2603
	8	2538.7	6.643	1	8.3961	8.2957	7.0066	5.6425	5.6425
				2	5.7210	5.7725	6.6536	7.6425	7.6425
2	0.25	62.431	3.036	1	2.0515	2.0513	2.0419	2.0398	2.0393
				2	4.0259	4.0262	4.0131	4.0324	4.0327
	0.5	80.419	3.115	1	2.1648	2.1625	2.1316	2.1210	2.1192
				2	4.0829	4.0841	4.1030	4.1089	4.1103
	1	125.05	3.328	1	2.4719	2.4652	2.3647	2.3349	2.3308
				2	4.2375	4.2409	4.2966	4.3217	4.3255
	2	253.86	3.837	1	3.2034	3.1864	2.9564	2.8402	2.8372
				2	4.6056	4.6143	4.7538	4.8336	4.8366
	4	711.25	4.941	1	4.7910	4.7514	4.2251	3.9412	3.9400
				2	5.4046	5.4247	5.7541	5.9405	5.9409
	8	2760.5	7.218	1	8.0661	7.9799	6.8175	6.2183	6.2183
				2	7.0527	7.0965	7.8161	8.2183	8.2183
4	0.25	102.00	4.877	1	2.4000	2.4870	3.4907	3.6107	3.6353
				2	7.1799	7.1344	6.2628	6.1347	6.1125
	0.5	117.92	4.468	1	1.8134	1.9175	3.1179	3.3231	3.3611
				2	6.8826	6.8283	5.8125	5.6077	5.5726
	1	163.00	4.250	1	1.5008	1.6120	2.8938	3.1930	3.2275
				2	6.7247	6.6667	5.5918	5.3058	5.2822
	2	298.60	4.452	1	1.7919	1.8982	3.1154	3.4417	3.4515
				2	6.8714	6.8159	5.7809	5.4632	5.4534
	4	777.63	5.371	1	3.1119	3.1958	4.1168	4.3706	4.3710
				2	7.5365	7.4924	6.6420	6.3714	6.3710
	8	2890.8	7.546	1	6.2380	6.2686	6.4883	6.5462	6.5462
				2	9.1117	9.0947	8.6812	8.5462	8.5462

$\varepsilon_1 = 2, \quad m = 4$

μ	τ_1	G_0	U_r	i	τ_a: $-\tau_1$	$-\tau_1/2$	0	$\tau_1/2$	τ_1
$\frac{1}{2}$	0.25	22.026	0.993	1	0.8364	0.8098	0.6092	0.4294	0.3885
				2	1.1817	1.1964	1.3968	1.5617	1.6009
	0.5	36.886	1.240	1	1.1874	1.1501	0.8802	0.5170	0.4445
				2	1.3627	1.3832	1.6305	1.9676	2.0366
	1	83.155	1.737	1	1.9003	1.8532	1.5051	0.8661	0.7878
				2	1.7240	1.7497	2.0500	2.6104	2.6864
	2	262.45	2.731	1	3.3313	3.2687	2.7831	1.7678	1.7372
				2	2.4472	2.4810	2.8450	3.7010	3.7314
	4	1135.9	4.732	1	6.1972	6.1038	5.3466	3.7336	3.7315
				2	3.8956	3.9453	4.4632	5.7294	5.7315
	8	6286.0	8.729	1	11.936	11.779	10.504	7.7292	7.7292
				2	6.7946	6.8764	7.7330	9.7292	9.7292
1	0.25	40.213	1.810	1	1.4316	1.4005	1.1703	1.0656	1.0417
				2	2.2316	2.2487	2.4618	2.5508	2.5830
	0.5	62.592	2.105	1	1.8505	1.8066	1.4872	1.2684	1.2253
				2	2.4475	2.4715	2.7530	2.9465	2.9864
	1	127.33	2.664	1	2.6504	2.5917	2.1561	1.7446	1.6959
				2	2.8548	2.8866	3.2463	3.5863	3.6331
	2	357.34	3.727	1	4.1710	4.0876	3.4408	2.7491	2.7288
				2	3.6274	3.6720	4.1562	4.7049	4.7250
	4	1386.9	5.779	1	7.1080	6.9769	5.9342	4.7804	4.7790
				2	5.1195	5.1887	5.9203	6.7775	6.7790
	8	7067.5	9.815	1	12.884	12.659	10.832	8.1447	8.1447
				2	8.0539	8.1716	9.3711	10.815	10.815
2	0.25	68.829	3.076	1	2.1089	2.1069	2.0893	2.0847	2.0838
				2	4.0555	4.0565	4.0667	4.0691	4.0696
	0.5	96.924	3.233	1	2.3334	2.3264	2.2683	2.2466	2.2429
				2	4.1702	4.1738	4.2098	4.2220	4.2247
	1	174.88	3.637	1	2.9088	2.8892	2.7287	2.6499	2.6418
				2	4.4641	4.4743	4.5715	4.6243	4.6316
	2	438.25	4.556	1	4.2211	4.1731	3.7765	3.5622	3.5565
				2	5.1343	5.1592	5.4076	5.5498	5.5555
	4	1561.9	6.561	1	6.9969	6.8888	6.0023	5.5012	5.5006
				2	6.5519	6.6080	7.1636	7.5000	7.5006
	8	7539.7	10.467	1	12.659	12.429	10.540	9.4673	9.4673
				2	9.1437	9.5633	10.747	11.467	11.467
4	0.25	107.69	4.728	1	2.2334	2.3691	3.3258	3.4518	3.4775
				2	7.0483	6.9747	6.1261	5.9946	5.9718
	0.5	135.15	4.418	1	1.7970	1.9541	3.0603	3.2719	3.3103
				2	6.8188	6.7330	5.7659	5.5594	5.5239
	1	217.46	4.450	1	1.8440	2.0024	3.1125	3.3957	3.4286
				2	6.8415	1.7548	5.7792	5.5035	5.4714
	2	497.31	5.128	1	2.8099	2.9434	3.8524	4.1191	4.1274
				2	7.3368	7.2631	6.4142	6.1372	6.1289
	4	1670.7	6.935	1	5.3836	5.4503	5.8221	5.9348	5.9350
				2	8.6567	8.6177	8.1081	7.9352	7.9350
	8	7804.8	10.828	1	10.930	10.852	10.066	9.8284	9.8284
				2	11.501	11.537	11.758	11.828	11.828

Таблица 4

$\xi_1 = 1,2; \quad m = 2$

μ	η_1	G_0	U_0	$\tau_0(\xi = 1)$				
				η_1	$\eta_1/4$	0	$\eta_1/4$	η_1
0.25	0.25	0.6766	0.0685	0.3239	0.3238	0.2878	0.1872	0.1469
	0.5	0.9805	0.0810	0.3928	0.3928	0.3520	0.2222	0.2053
	1	1.7149	0.1038	0.5175	0.5175	0.4743	0.3213	0.3189
	2	3.5908	0.1416	0.7249	0.7249	0.6818	0.5080	0.5079
	4	8.4481	0.1964	1.0254	1.0254	0.9771	0.7819	0.7819
	8	20.506	0.2618	1.3843	1.3843	1.3297	1.1091	1.1091
0.5	0.25	1.3059	0.1323	0.6224	0.6223	0.5693	0.4946	0.4649
	0.5	1.8332	0.1518	0.7293	0.7292	0.6699	0.5719	9.5591
	1	3.0373	0.1842	0.9070	0.9070	0.8421	0.7230	0.7210
	2	5.8517	0.2312	1.1646	1.1646	1.0957	0.9559	0.9559
	4	12.341	0.2873	1.4723	1.4723	1.3944	1.2369	1.2363
	8	26.658	0.3406	1.7650	1.7650	1.6786	1.5032	1.5032
1	0.25	2.4456	0.2479	1.1528	1.1528	1.0967	1.0568	1.0411
	0.5	3.2525	0.2695	1.2713	1.2713	1.2078	1.1543	1.1474
	1	4.9564	0.3008	1.4431	1.4430	1.3743	1.3050	1.3039
	2	8.5555	0.3382	1.6482	1.6481	1.5705	1.4909	1.4909
	4	16.051	0.3738	1.8433	1.8432	1.7571	1.6688	1.6688
	8	31.375	0.4010	1.9928	1.9927	1.9001	1.8050	1.8050
2	0.25	4.3435	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	0.5	5.3138	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	1	7.2555	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	2	11.138	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	4	18.903	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	8	34.434	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
4	0.25	7.1035	0.7184	3.1139	3.1142	3.3334	3.3753	3.3905
	0.5	7.9906	0.6437	2.7037	2.7040	2.9515	3.0113	3.0183
	1	9.4621	0.5725	2.3134	2.3137	2.5883	2.6614	2.6625
	2	13.138	0.5180	2.0144	2.0147	2.3101	2.3899	2.3899
	4	20.770	0.4828	1.8214	1.8217	2.1305	2.2139	2.2139

$$X_3 = \frac{2u\,\mathrm{th}\left(\frac{\pi^2}{um}\right)}{1+\mu}\left\{2(\mu-2)\frac{1+\xi_1^2}{\pi^2+4u^2} + \frac{\xi_1+1}{\pi^2+u^2}\left[\xi_1+1-\frac{c}{b(\xi_1-1)}\right]\right\}$$

$$c = \eta_1(1+\xi_1) + \frac{\pi(\xi_1^2-1)}{2um} + \eta_1^2\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{m}$$

$$b = \frac{\pi}{\mu m u} + \frac{\eta_1}{\xi_1-1}$$

$$d = \frac{\pi\mu}{8m}\left[\xi_1^4 - 1 - \frac{(\xi_1^2-1)^2}{u}\right] + \frac{\eta_1(\xi_1-1)^2}{6}$$

$$u = t_1, \quad \eta_1 = \frac{a}{r_1}, \quad X_1 = \frac{A_1}{r_1^2}$$

Погрешность этих приближенных формул легко оценивается при помощи приведенных табл. 1—4.

Так, например, погрешность формулы (2.4) при $\eta_1 > 2$ и для любого μ не превышает 1%. Погрешность уменьшается при возрастании μ и η_1 при $\xi_1 = 2$, для $\xi_1 < 2$ погрешность меньше 1%, начиная с $\eta_1 > 1$.

В табл. 5 приведены сравнения значений напряжений вдоль круговой части внутреннего контура, вычисленных по точным и приближенным формулам.

Таблица 5

$\mu = 1;\ \xi_1 = 2;\ m = 4;\ \xi = 1$

η_1	$\tau_0(1, \varphi)$	$\varphi = \varphi_1$	$\varphi = \frac{\varphi_1}{2}$	$\varphi = 0$
0.5	прибл.	1.8499	1.8041	1.4603
	точн.	1.8505	1.8066	1.4872
1	прибл.	2.6515	2.5931	2.1596
	точн.	2.6504	2.5917	2.1561
2	прибл.	4.1576	4.0443	3.4797
	точн.	4.1710	4.0876	3.4408
8	прибл.	12.889	12.669	11.043
	точн.	12.884	12.659	10.832

Сравнение табл. 3 при $\mu = 1$, $m = 4$ с таблицами, приведенными в книге [1] для задачи кручения полого однородного стержня коробчатого сечения показывает (табл. 6), что для тонкостенных стержней значения жесткости G_0, параметра U_0 и напряжений, действующих вдали от углов, мало изменяются при закруглении углов профиля стержня.

Таблица 6

$\mu = 1;\ \xi_1 = 2;\ m = 4$

η_1		Без закруг. [1]	С закруглением углов		
			точное	I прибл.	II прибл.
0.5	G_0	73.780	62.592	62.581	—
	$U_0(\eta_1, \xi_1)$	2.1941	2.1049	2.1123	2.1046
	$\tau_0(\eta_1, \xi_1)$	3.1791	2.9864	3.1056	—
1	G_0	139.52	127.33	127.32	—
	U_0	2.7012	2.6644	2.6720	2.6645
	$\tau_0(\eta_1, \xi_1)$	3.6970	3.6331	3.6645	—
2	G_0	369.72	357.34	357.34	—
	U_0	3.7081	3.7269	3.7342	3.7270
	$\tau_0(\eta_1, \xi_1)$	4.7250	4.7080	4.7270	—
8	G_0	7035.1	7067.5	7072.3	—
	U_0	9.7200	9.8147	9.8214	9.8148
	$\tau_0(\eta_1, \xi_1)$	10.720	10.815	10.815	—

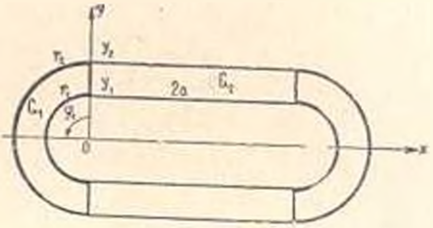
Под первым приближением понимается случай, когда принимается $X_1 = 0$.

§ 3. Особый интерес представляет частный случай задачи, рассмотренной в § 1, фиг. 4.

При $m = 2$, $n = 2$ задача допускает замкнутое решение в виде элементарных функций

$$u_1(r, \varphi) = \frac{G_1}{2}(r_2^2 - r^2)$$

$$u_2(x, y) = G_2(y_2^2 - y^2) \tag{3.1}$$



Фиг. 4.

Напряжения определяются формулами

$$\frac{\tau_{zr}(r, \varphi)}{G_1 r_1 \theta} = -2\frac{r}{r_1} = -2\xi$$

$$\frac{\tau_{zx}(x, y)}{G_2 r_1 \theta} = -2\frac{y}{r_1} = -2\eta \tag{3.2}$$

Постоянная U_0 и жесткость при кручении имеют вид

$$U_0 = \xi_1^2 - 1, \qquad G_0 = \pi(\xi_1^4 - 1) + 16\eta_1(\xi_1^3 - 1)$$

Из (3.2) следует, что напряжения вдоль контуров, а также вдоль линий, равноудаленных от контуров, имеют постоянные значения независимо от соотношений геометрических параметров ξ_1 и η_1.

Способ, использованный в настоящей работе, позволяет решить также задачи кручения для открытых составных профилей.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступило 13 II 1979

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՄԻԱՑՄԱՆ ՏԵՍՔԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Բերվում է տարբեր նյութերից պատրաստված ուղղանկյունների և օղակային սեկտորների միացման տեսքով լայնական հատույթ ունեցող պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը։

Ընդհանուր դեպքում խնդիրը բերվում է քվազի-լիովին ռեգուլյար անվերջ հավասարումների սիստեմի։

Բերված են թվային հաշվարկների արդյունքները սնամեջ, կլորացված անկյուններով քառակուսի և եռանկյան ձևով հատվածքների, ինչպես նաև երկու ուղղանկյունների և երկու կիսաշրջանային օղակների միացումից առաջացած մակերեսով հատվածքի համար։

Ստացված են մոտավոր բանաձևեր կոշտության և լարումների համար։

TORSION OF RODS WITH CROSS SECTION AS COMBINATION OF DIFFERENT CURVILINEAR RECTANGLES

A. H. BABLOYAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

An accurate solution of the torsion problem for prismatic rods with cross section as combination of rectangles and ring sectors is presented.

In the general case the problem is reduced to a quasi-quite regular infinite system of algebraic equations.

The results of calculation for hollow quadratic and triangle sections with rounded angles as well as for a profile consisting of two rectangles connected with two semi-circular rings are given. The approximate formulas for strength and stress are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. Л., ОНТИ, 1937
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд. АН СССР, 1954.
4. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., изд. Физматгиз, 1963.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
6. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М., Гостехиздат, 1949.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.