ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 5, 1979 Механика

Л. Н. ОЛЕЙНИК

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

Исследовано электроупругое состояние тонкой анизотропной пьезоэлектрической полосы при заданных на боковых поверхностях физических воздействиях.

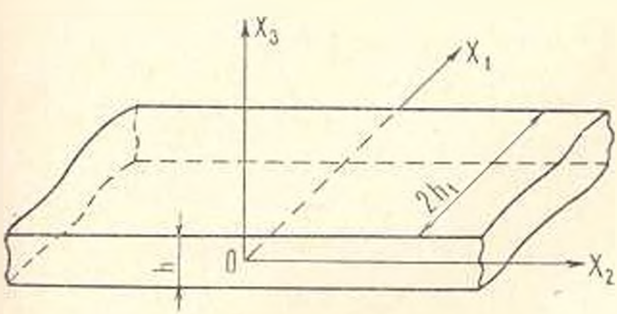
Задача решена методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений электроупругости [1]. Граничные условия на боковых поверхностях удовлетворены с помощью вариационного принципа Лагранжа [2], обобщенного на случай пьезоэлектрической среды [3].

Определение электроупругого состояния типа пограничного слоя сведено к решению бесконечной системы линейных уравнений.

Аналогичная задача о равновесии пьезокерамической пластинки с электродированными плоскими гранями решена методом однородных решений в работе [4].

§ 1. Рассмотрим тонкую анизотропную пьезоэлектрическую полосу: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2h_1$, $|x_2| < \infty$, $|x_3| \leqslant h$, $h \ll h_1$ (фиг. 1). Будем считать, что плоские грани полосы неэлектродированы и свободны от внешних физических воздействий, то есть

при $$x_3 = \pm h \quad t_{3j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad D_3 = 0 \tag{1.1}$$



Фиг. 1.

Действующие на полосу механические усилия, уравновешенные силами, приложенными на бесконечности, и распределение поверхностных электрических зарядов, как и в работе [5], заданы на ее боковых поверхностях

при $$x_1 = 0,\ 2h_1 \quad t_{1j} = T_j(x_2, x_3), \quad D_1 = 4\pi\sigma(x_2, x_3) \tag{1.2}$$

Следуя А. Л. Гольденвейзеру [1], электроупругое состояние полосы представим как сумму медленно затухающего вдали от краев электроупругого состояния, которое строится при помощи основного итерационного процесса [6], и быстро затухающих электроупругих состояний, которые строятся при помощи вспомогательных итерационных процессов.

§ 2. Для построения вспомогательных итерационных процессов воспользуемся термодинамическими соотношениями, связывающими механические напряжения и компоненты электростатического смещения с механическими деформациями и компонентами электростатического поля. Они имеют вид [7]

$$T = c^E R - eE_t, \quad D = 4\pi e R + \varepsilon E \tag{2.1}$$

Уравнения электроупругого равновесия при отсутствии массовых сил и объемных электрических зарядов можно записать так [8]:

$$t_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

Введем безразмерные величины

$$\bar{\xi}_1 = \frac{x_1}{h}, \qquad \xi_2 = \frac{x_2}{a}, \qquad \xi_3 = \frac{x_3}{h}, \qquad \lambda = \frac{h}{a} \tag{2.3}$$

где a — некоторый линейный параметр, и дифференциальные операторы

$$\bar{\partial}_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1}, \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad (j = 2, 3) \tag{2.4}$$

Будем считать, что $\lambda < 1$. Предположим, что электроупругие характеристики полосы можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{1}{a} u_m, \ \frac{1}{a} v\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{l+n+1} \left(u_m^{(n)}, v^{(n)}\right)$$

$$(t_{ij}, D_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{l+n} \left(t_{ij}^{(n)}, D_m^{(n)}\right) \tag{2.5}$$

Здесь u_m ($m = 1, 2, 3$) — механические перемещения, v — потенциал электростатического поля, l — некоторые целые числа [6].

Учитывая соотношения (2.1), из (2.2) получим систему дифференциальных уравнений

$$\left(c_{11}^E \bar{\partial}_1^2 + c_{55}^E \partial_3^2 - 2c_{15}^E \bar{\partial}_1 \partial_3\right) u_1^{(n)} + \left[c_{16}^E \bar{\partial}_1^2 + c_{45}^E \partial_3^2 + (c_{14}^E + c_{56}^E)\bar{\partial}_1 \partial_3\right] u_2^{(n)} +$$

$$+ \left[c_{15}^E \bar{\partial}_1^2 + c_{35}^E \partial_3^2 + (c_{13}^E + c_{55}^E)\bar{\partial}_1 \partial_3\right] u_3^{(n)} - \left[e_{11} \bar{\partial}_1^2 + e_{35} \partial_3^2 + (e_{31} + e_{15})\bar{\partial}_1 \partial_3\right] v^{(n)} =$$

$$= -2\left(c_{56}^E \partial_2 \partial_3 + c_{16}^E \bar{\partial}_1 \partial_2\right) u_1^{(n-1)} - \left[(c_{25}^E + c_{46}^E)\partial_2 \partial_3 + (c_{12}^E + c_{66}^E)\bar{\partial}_1 \partial_2\right] u_2^{(n-1)} -$$

$$- \left[(c_{36}^E + c_{45}^E)\partial_2 \partial_3 + (c_{14}^E + c_{56}^E)\bar{\partial}_1 \partial_2\right] u_3^{(n-1)} + \left[(e_{36} + e_{25})\partial_2 \partial_3 +\right.$$

$$\left. + (e_{21} + e_{16})\bar{\partial}_1 \partial_2\right] v^{(n-1)} - c_{66}^E \partial_2^2 u_1^{(n-2)} - c_{26}^E \partial_2^2 u_2^{(n-2)} - c_{46}^E \partial_2^2 u_3^{(n-2)} + e_{26} \partial_2^2 v^{(n-2)}$$

$$[c_{56}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{45}^E\partial_3^2 + (c_{14}^E + c_{56}^E)\bar{\partial}_1\partial_3]u_1^{(n)} + (c_{66}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{44}^E\partial_3^2 + 2c_{46}^E\bar{\partial}_1\partial_3)u_2^{(n)} +$$
$$+ [c_{36}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{45}^E\partial_3^2 + (c_{36}^E + c_{45}^E)\bar{\partial}_1\partial_3]u_3^{(n)} - [e_{16}\bar{\partial}_1^2 + e_{34}\partial_3^2 + (e_{14} + e_{36})\bar{\partial}_1\partial_3]v^{(n)} =$$
$$= -[(c_{25}^E + c_{46}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{12}^E + c_{66}^E)\bar{\partial}_1\partial_2]u_1^{(n-1)} - 2(c_{24}^E\partial_2\partial_3 + c_{26}^E\bar{\partial}_1\partial_2)u_2^{(n-1)} -$$
$$-[(c_{23}^E + c_{44}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{25}^E + c_{46}^E)\bar{\partial}_1\partial_2]u_3^{(n-1)} + [(e_{34} + e_{24})\partial_2\partial_3 +$$
$$+ (e_{12} + e_{26})\bar{\partial}_1\partial_2]v^{(n-1)} - c_{26}^E\partial_2^2u_1^{(n-2)} - c_{22}^E\partial_2^2u_2^{(n-2)} - c_{24}^E\partial_2^2u_3^{(n-2)} + e_{22}\partial_2^2v^{(n-2)} \tag{2.6}$$

$$[c_{15}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{35}^E\partial_3^2 + (c_{13}^E + c_{55}^E)\bar{\partial}_1\partial_3]u_1^{(n)} + [c_{56}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{34}^E\partial_3^2 + (c_{45}^E + c_{36}^E)\bar{\partial}_1\partial_3]u_2^{(n)} +$$
$$+ (c_{55}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{33}^E\partial_3^2 + 2c_{35}^E\bar{\partial}_1\partial_3)u_3^{(n)} - [e_{15}\bar{\partial}_1^2 + e_{33}\partial_3^2 + (e_{13} + e_{35})\bar{\partial}_1\partial_3]v^{(n)} =$$
$$= -[(c_{45}^E + c_{36}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{14}^E + c_{56}^E)\bar{\partial}_1\partial_2]u_1^{(n-1)} - [(c_{23}^E + c_{44}^E)\partial_2\partial_3 +$$
$$+ (c_{25}^E + c_{46}^E)\bar{\partial}_1\partial_2)u_2^{(n-1)} - 2(c_{34}^E\partial_2\partial_3 + c_{45}^E\bar{\partial}_1\partial_2)u_3^{(n-1)} +$$
$$-[(e_{23} + e_{34})\partial_2\partial_3 + (e_{14} + e_{35})\bar{\partial}_1\partial_2]v^{(n-1)} - c_{46}^E\partial_2^2u_1^{(n-2)} -$$
$$- c_{24}^E\partial_2^2u_2^{(n-2)} - c_{44}^E\partial_2^2u_3^{(n-2)} + e_{24}\partial_2^2v^{(n-2)}$$

$$4\pi[e_{11}\bar{\partial}_1^2 + e_{35}\partial_3^2 + (e_{31} + e_{15})\bar{\partial}_1\partial_3]u_1^{(n)} + 4\pi[e_{16}\bar{\partial}_1^2 + e_{34}\partial_3^2 +$$
$$+ (e_{14} + e_{36})\bar{\partial}_1\partial_3]u_2^{(n)} + 4\pi[e_{15}\bar{\partial}_1^2 + e_{33}\partial_3^2 + (e_{13} + e_{35})\bar{\partial}_1\partial_3]u_3^{(n)} +$$
$$+ (\varepsilon_{11}^S\bar{\partial}_1^2 + \varepsilon_{33}^S\partial_3^2 + 2\varepsilon_{13}^S\bar{\partial}_1\partial_3)v^{(n)} = -4\pi[(e_{25} + e_{36})\partial_2\partial_3 +$$
$$+ (e_{21} + e_{16})\bar{\partial}_1\partial_2]u_1^{(n-1)} - 4\pi[(e_{32} + e_{24})\partial_2\partial_3 + (e_{12} + e_{26})\bar{\partial}_1\partial_2]u_2^{(n-1)} -$$
$$-4\pi[(e_{23} + e_{34})\partial_2\partial_3 + (e_{14} + e_{25})\bar{\partial}_1\partial_2]u_3^{(n-1)} - 2(\varepsilon_{23}^S\partial_2\partial_3 + \varepsilon_{12}^S\bar{\partial}_1\partial_2)v^{(n-1)} -$$
$$-4\pi e_{26}\partial_2^2u_1^{(n-2)} - 4\pi e_{22}\partial_2^2u_2^{(n-2)} - 4\pi e_{24}\partial_2^2u_3^{(n-2)} - \varepsilon_{22}^S\partial_2^2v^{(n-2)}$$

Из условий (1.1) найдем условия на плоских гранях полосы:

при $$\xi_3 = \pm 1 \quad t_{j3}^{(n)} = 0, \quad D_3^{(n)} = 0 \tag{2.7}$$

Граничные условия на боковых поверхностях полосы будут сформулированы ниже.

В уравнениях (2.6) и в дальнейшем будем считать, что величины с индексами n равны нулю при $n < 0$.

§ 3. Для кристаллов моноклинной системы [7] уравнения (2.6)—(2.7) распадаются на две группы, которые можно решать независимо друг от друга.

Первый вспомогательный итерационный процесс описывается соотношениями

$$(c_{66}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{44}^E\partial_3^2 + 2c_{46}^E\bar{\partial}_1\partial_3)u_2^{(n)} - [e_{16}\bar{\partial}_1^2 + e_{34}\partial_3^2 + (e_{36} + e_{14})\bar{\partial}_1\partial_3]v^{(n)} =$$
$$= -[(c_{25}^E + c_{46}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{12}^E + c_{66}^E)\bar{\partial}_1\partial_2]u_1^{(n-1)} - [(c_{23}^E + c_{44}^E)\partial_2\partial_3 +$$
$$+ (c_{25}^E + c_{46}^E)\bar{\partial}_1\partial_2]u_3^{(n-1)} - c_{22}^E\partial_2^2u_2^{(n-2)} + e_{22}\partial_2^2v^{(n-2)} \tag{3.1}$$

$$4\pi[e_{16}\bar\partial_1^2 + e_{34}\partial_3^2 + (e_{14}+e_{36})\bar\partial_1\partial_3]u_2^{(n)} + (\varepsilon_{11}\bar\partial_1^2 + \varepsilon_{33}\partial_3^2 + 2\varepsilon_{13}\bar\partial_1\partial_3)v^{(n)} =$$

$$= -4\pi[(e_{25}+e_{36})\partial_2\partial_3 + (e_{21}+e_{16})\bar\partial_1\partial_2]u_1^{(n-1)} - 4\pi[(e_{23}+e_{34})\partial_2\partial_3 +$$

$$+ (e_{14}+e_{25})\bar\partial_1\partial_2]u_3^{(n-1)} - 4\pi e_{22}\partial_2^2 u_2^{(n-2)} - \varepsilon_{22}\partial_2^2 v^{(n-2)}$$

при $$\xi_3 = \pm 1 \quad t_{23}^{(n)} = D_3^{(n)} = 0 \tag{3.2}$$

Для второго вспомогательного итерационного процесса будем иметь

$$(c_{11}^E\bar\partial_1^2 + c_{55}^E\partial_3^2 + 2c_{15}^E\bar\partial_1\partial_3)u_1^{(n)} + [c_{15}^E\bar\partial_1^2 + c_{35}^E\partial_3^2 + (c_{13}^E+c_{55}^E)\bar\partial_1\partial_3]u_3^{(n)} =$$

$$= -[(c_{25}^E+c_{16}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{12}^E+c_{66}^E)\bar\partial_1\partial_2]u_2^{(n-1)} + [(e_{25}+e_{36})\partial_2\partial_3 +$$

$$+ (e_{21}+e_{16})\bar\partial_1\partial_2]v^{(n-1)} - c_{66}^E\partial_2^2 u_1^{(n-2)} - c_{46}^E\partial_2^2 u_3^{(n-2)} \tag{3.3}$$

$$[c_{15}^E\bar\partial_1^2 + c_{35}^E\partial_3^2 + (c_{13}^E+c_{55}^E)\bar\partial_1\partial_3]u_1^{(n)} + (c_{55}^E\bar\partial_1^2 + c_{33}^E\partial_3^2 + 2c_{35}^E\bar\partial_1\partial_3)u_3^{(n)} =$$

$$= -[(c_{23}^E+c_{44}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{25}^E+c_{16}^E)\bar\partial_1\partial_2]u_2^{(n-1)} + [(e_{23}+e_{34})\partial_2\partial_3 +$$

$$+ (e_{14}+e_{25})\bar\partial_1\partial_2]v^{(n-1)} - c_{46}^E\partial_2^2 u_1^{(n-2)} - c_{44}^E\partial_2^2 u_3^{(n-2)}$$

при $$\xi_3 = \pm 1 \quad t_{13}^{(n)} = t_{33}^{(n)} = 0 \tag{3.4}$$

Общее решение однородной системы (3.1) представим в виде

$$\bar u_2^{(n)} = [e_{16}\bar\partial_1^2 + e_{34}\partial_3^2 + (e_{36}+e_{14})\bar\partial_1\partial_3]\exp(\eta\xi_3\bar\partial_1)\bar W_1^{(n)}(\xi_1, \xi_2)$$

$$\bar v^{(n)} = (c_{66}^E\bar\partial_1^2 + c_{44}^E\partial_3^2 + 2c_{46}^E\bar\partial_1\partial_3)\exp(\eta\xi_3\bar\partial_1)\bar W_1^{(n)}(\xi_1, \xi_2) \tag{3.5}$$

где η — корни уравнения

$$4\pi[e_{16} + (e_{14}+e_{36})\eta + e_{34}\eta^2]^2 + (c_{66}^E + 2c_{46}^E\eta + c_{44}^E\eta^2)(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{13}\eta + \varepsilon_{33}\eta^2) = 0 \tag{3.6}$$

Из термодинамических неравенств [8]

$$c_{mn}^{E2} < c_{mm}^E c_{nn}^E \qquad \varepsilon_{mn}^2 < \varepsilon_{mm}\varepsilon_{nn} \tag{3.7}$$

следует, что уравнение (3.6) не может иметь вещественных корней.

Для электроупругих характеристик первого процесса получаем следующие представления:

$$\bar u_2^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{j1}\bar\partial_1^2 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2), \quad \bar v^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} \beta_{j1}\bar\partial_1^2 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2)$$

$$\bar t_{23}^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} a_{j1}\bar\partial_1^3 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2), \quad \bar t_{12}^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} b_{j1}\bar\partial_1^3 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2)$$

$$\bar D_1^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} c_{j1}\bar\partial_1^3 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2), \quad \bar D_3^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} d_{j1}\bar\partial_1^3 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2) \tag{3.8}$$

Здесь $\alpha_{j1}, \beta_{j1}, a_{j1}, b_{j1}, c_{j1}, d_{j1}$ — комплексные коэффициенты, зависящие от γ_j и электромеханических постоянных полосы.

Возьмем функции $\overline{W}_{j1}^{(n)}(\bar{\xi}_1, \xi_2)$ в виде

$$\overline{W}_{j1}^{(n)}(\bar{\xi}_1, \xi_2) = \exp\left(-i\frac{\gamma}{\gamma_j}\bar{\xi}_1\right)W_{j1}^{(n)}(\xi_2) \tag{3.9}$$

Тогда из граничных условий (3.2) получим дисперсионное уравнение относительно γ

$$\cos 4\gamma = 1 \tag{3.10}$$

Выберем γ_j и γ так, чтобы выполнялось условие

$$\mathrm{Re}\left(i\frac{\gamma}{\gamma_j}\right) > 0 \tag{3.11}$$

Тогда функции (3.9) будут убывать с увеличением $\bar{\xi}_1$, характеризуя электроупругое состояние пограничного слоя.

Первое выражение (3.8) принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{u}_2^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\left[A_{1k}^1\exp\left(-i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right) + B_{1k}^1\exp\left(i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)\right]\times\\ \times\exp\left(-i\frac{k\pi}{2\gamma_2}\bar{\xi}_1\right)W_{21k}^{(n)}(\xi_2) + \left[C_{1k}^1\exp\left(-i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)+\right.\\ \left.+D_{1k}^1\exp\left(i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)\right]\exp\left(i\frac{k\pi}{2\gamma_4}\bar{\xi}_1\right)W_{41k}^{(n)}(\xi_2)\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.12}$$

где $A_{1k}^1, B_{1k}^1, C_{1k}^1, D_{1k}^1$ — некоторые комплексные постоянные. Формулы для остальных выражений (3.8) имеют ту же структуру.

Общее решение однородной системы (3.3) строится аналогично. Для него характеристическое уравнение получается таким:

$$[c_{15}^E + (c_{55}^E + c_{13}^E)\zeta + c_{35}^E\zeta^2]^2 - (c_{11}^E + 2c_{15}^E\zeta + c_{55}^E\zeta^2)(c_{55}^E + 2c_{35}^E\zeta + c_{33}^E\zeta^2) = 0 \tag{3.13}$$

дисперсионное же уравнение совпадает с уравнением (3.10) первого процесса. Как и в работе [9], можно показать, что корни уравнения (3.13) не могут быть вещественными.

Выражения для характеристик второго процесса имеют структуру (3.12). Например,

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\left[A_{1k}^2\exp\left(-i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right) + B_{1k}^2\exp\left(i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)\right]\times\\ \times\exp\left(-i\frac{k\pi}{2\gamma_2}\bar{\xi}_1\right)W_{22k}^{(n)}(\xi_2) + \left[C_{1k}^2\exp\left(-i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)+\right.\\ \left.+D_{1k}^2\exp\left(i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)\right]\exp\left(i\frac{k\pi}{2\gamma_4}\bar{\xi}_1\right)W_{42k}^{(n)}(\xi_2)\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.14}$$

Частное решение неоднородных систем (3.1) и (3.3) зависит от предыдущих шагов обоих вспомогательных процессов. Его построение не представляет принципиальных трудностей.

Для удовлетворения граничным условиям (1.2) воспользуемся вариационным принципом Лагранжа [2], обобщенным на случай пьезоэлектрической среды [3]:

$$\iint\limits_S \left(t_{11}\delta u_1 + t_{12}\delta u_2 + t_{13}\delta u_3 - \frac{1}{4\pi} D_1 \delta v \right) dS =$$

$$= \iint\limits_S (T_1 \delta u_1 + T_2 \delta u_2 + T_3 \delta u_3 - \sigma \delta v)\, dS \qquad (3.15)$$

где S — боковая поверхность полосы.

Варьируя в уравнении (3.15) поочередно граничные значения первого и второго процессов и приравнивая коэффициенты при одинаковых вариациях $\delta w_{21k}^{(n)}$, $\delta w_{41k}^{(n)}$, $\delta w_{22k}^{(n)}$, $\delta w_{42k}^{(n)}$, получим бесконечную систему линейных уравнений относительно функций $w_{21k}^{(n)}(\zeta_2)$, $w_{41k}^{(n)}(\zeta_2)$, $w_{22k}^{(n)}(\zeta_4)$, $w_{42k}^{(n)}(\zeta_4)$. Матрица этой системы одна и та же для всех приближений и зависит только от электромеханических постоянных полосы.

§ 4. При проведении численных расчетов была рассмотрена полоса шириной $2h_1 \gg 2h$, изготовленная из кристалла сульфата лития, когда кристаллографические оси Y, Z направлены по осям координат x_2, x_3, а ось X под углом 17°18′ к x_1 [10].

Граничные условия на боковых поверхностях ($\zeta_1 = 0,\ 2h_1/h$) принимались в виде

$$t_{11} = q\zeta_3^{2m}, \quad t_{12} = t_{13} = 0, \qquad D_1 = 4\pi\sigma\zeta_3^{2m} \qquad (4.1)$$

Используя выражения для электроупругих характеристик основного итерационного процесса [6], в случае, когда $q \neq 0$, $\sigma = 0$, с точностью до q будем иметь

$$\text{при } m = 1 \quad t_{11} = 0.33 \qquad\qquad \text{при } m = 2 \quad t_{11} = 0.20 \qquad (4.2)$$

Если же $q = 0$, $\sigma \neq 0$, то с точностью до σ получим

$$\text{при } m = 1 \quad D_1 = 4.19; \qquad\qquad \text{при } m = 2 \quad D_1 = 2.51 \qquad (4.3)$$

В табл. 1 приведены в случае 1, 2 с точностью до $q(\sigma = 0)$ суммарные значения механических напряжений $t_{11}(m = 1,\ 2)$, а в случае 3, 4 — с точностью до $\sigma(q = 0)$ суммарные значения электростатических смещений $D_1(m = 1,\ 2)$.

Сравнивая основное решение (4.2) и (4.3) с результатами, приведенными в табл. 1, приходим к выводу, что для рассматриваемой задачи электроупругое состояние типа пограничного слоя проникает в глубь полосы на расстояние до $2h$.

Таблица 1

	ξ_1	$\xi_3=0.3$, $\lambda=0.125$	$\xi_3=0.3$, $\lambda=0.25$	$\xi_3=0.3$, $\lambda=0.5$	$\xi_3=0.6$, $\lambda=0.125$	$\xi_3=0.6$, $\lambda=0.25$	$\xi_3=0.6$, $\lambda=0.5$	$\xi_3=0.9$, $\lambda=0.125$	$\xi_3=0.9$, $\lambda=0.25$	$\xi_3=0.9$, $\lambda=0.5$
1	0.0	0.06	0.06	0.06	0.34	0.34	0.34	0.83	0.83	0.83
	0.1	0.23	0.12	0.07	0.23	0.21	[illegible]	0.26	0.35	0.51
	0.2	0.30	0.23	0.12	0.29	0.23	0.21	0.29	0.26	0.35
	0.3	0.33	0.28	0.18	0.32	0.26	0.22	0.32	0.27	0.28
	0.4	0.33	0.30	0.23	0.33	0.29	0.23	0.33	0.29	0.26
	0.5	0.33	0.32	0.26	0.33	0.31	0.25	0.33	0.31	0.27
2	0.0	0.01	0.01	0.01	0.11	0.11	0.11	0.68	0.68	0.68
	0.2	0.18	0.13	0.05	0.17	0.11	0.09	0.17	0.13	0.18
	0.4	0.20	0.18	0.12	0.20	0.17	0.11	0.20	0.17	0.13
	0.6	0.20	0.19	0.16	0.20	0.19	0.11	0.20	0.19	0.15
	0.8	0.20	0.20	0.18	0.20	0.20	0.17	0.20	0.20	0.17
	1.0	0.20	0.20	0.19	0.20	0.20	0.18	0.20	0.20	0.18
3	0.0	1.09	1.09	1.0	4.59	4.59	4.59	10.52	10.52	10.52
	0.1	4.08	3.61	2.84	4.24	4.44	4.65	4.35	5.13	6.51
	0.2	4.18	4.03	3.61	4.19	4.24	4.44	4.19	4.35	5.13
	0.3	4.19	4.17	[illegible]	4.19	4.19	4.30	4.19	4.21	4.58
	0.4	4.19	4.18	4.08	4.19	4.19	4.24	4.19	4.19	4.35
	0.5	4.19	4.19	4.14	4.19	4.19	4.21	4.19	4.19	4.25
4	0.0	0.10	0.10	0.10	1.74	1.74	1.74	8.89	8.89	8.89
	0.1	2.42	2.05	1.43	2.55	2.67	2.66	2.64	3.28	1.51
	0.2	2.51	2.42	2.05	2.51	2.55	2.67	2.51	2.64	3.28
	0.3	2.51	2.50	2.31	2.51	2.52	2.60	2.51	2.53	2.82
	0.4	2.51	2.51	2.42	2.51	2.51	2.55	2.51	2.51	2.64
	0.5	2.51	2.51	2.47	2.51	2.51	2.53	2.51	2.51	2.55

Автор благодарит А. С. Космодамианского и В. Н. Ложкина за постановку задачи и полезные советы.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила 10 X 1978

Լ. Ն. ՕԼԵՆԻԿ

ԲԱՐԱԿ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՊՅԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ԷԼԵԿՏՐԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվել է բարակ անիզոտրոպ պյեզոէլեկտրական շերտի էլեկտրաառաձգական վիճակը նրա կողմնային մակերևույթների վրա տրված ֆիզիկական ազդեցությունների դեպքում։

Խնդիրը լուծվել է էլեկտրաառաձգականության հավասարումների ասիմպտոտական ինտեգրման մեթոդով։ Կողմնային մակերևույթների վրա եզրային պայմանները բավարարվել են Լագրանժի վարիացիոն սկզբունքի օգնությամբ, որն ընդհանրացվել է պյեզոէլեկտրական միջավայրի դեպքի համար։

Սահմանային շերտի տիպի էլեկտրաառաձգական վիճակի որոշումը բերվել է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF ELECTRO-FLEXIBLE STATE OF THIN ANISOTROPIC PIEZOELECTRIC BAND

L. N. OLEYNICK

Summary

The electro-flexible state of thin anisotropic piezoelectric band is investigated with physical effects given on side surfaces.

The problem is solved by method of asymptotic integrating of three-dimensional equations of electric flexibility. The boundary conditions on side surfaces are satisfied by the Lagrange variation principle, generalized for the case of piezoelectric medium.

The definition of electro-flexible state of a border-layer type is reduced to calculation of an infinite system of linear equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, в. 4.
2. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плит малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, в. 6.
3. *Вековищева И. А.* Вариационные принципы в теории электроупругости. Прикл. механ., 1971, т. 7, в. 9.
4. *Жиров В. Е.* Электроупругое равновесие пьезокерамической плиты. ПММ, 1977, т. 41, в. 6.
5. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел. Респуол. межвед. сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», в. 15. Киев, «Наукова думка», 1975, стр. 176.
6. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Электроупругое равновесие тонкого анизотропного слоя с учетом пьезоэлектрического эффекта. ПММ, 1978, т. 42, в. 4.
7. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. Физическая акустика, т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований, ч. А. М., «Мир», 1966, стр. 592.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959, стр. 532.
9. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., «Наука», 1977, стр. 416.
10. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. М., «Наука», 1968, стр. 464.