

А. Н. ЗЛАТИН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОДНОРОДНЫМ РЕШЕНИЯМ ДЛЯ ЦИЛИНДРА

Одним из обобщений метода Фурье разделения переменных на задачи теории упругости является метод однородных решений [1]. Проблема нахождения этих решений сводится, как правило, к несамосопряженной задаче на собственные значения; получаемые при этом собственные функции (однородные решения) оказываются комплексными и неортогональными, поэтому для обоснования метода приходится исследовать вопрос о разложении по однородным решениям (или родственные вопросы полноты систем этих решений).

Впервые теоремы разложения по однородным решениям были получены в работе [2] для прямоугольной области. Дальнейшее развитие проблема получила в основном в связи с построением асимптотической теории пластины и оболочек [3]. Из работ, посвященных исследованию систем однородных решений для цилиндра, автору известна лишь заметка [4], где аннотированы результаты, полученные методами функционального анализа, для случая, когда на боковой поверхности цилиндра отсутствуют перемещения.

В настоящей работе исследуются условия, при которых формальное решение, получаемое с помощью соотношения обобщенной ортогональности Шиффла [5, 6], фактически удовлетворяет крайевым условиям на торцах цилиндра. Работа является развитием статьи [2], как в смысле тематики, так и в смысле применяемого математического аппарата.

1. *Постановка задачи и формальное решение.* Рассмотрим сначала изотропный однородный цилиндр единичного радиуса, описываемый в цилиндрической системе координат (ρ, φ, x) неравенствами $0 \leq \rho \leq 1$, $-\infty < x \leq 0$, и предположим, что на боковой поверхности цилиндра отсутствуют напряжения.

Решение уравнений теории упругости, оставляющее боковую поверхность цилиндра свободной от напряжений и отвечающее условиям убывания на бесконечности ($x \rightarrow -\infty$), может быть в осесимметричном случае построено в виде суперпозиции однородных решений

$$\begin{aligned} \omega(\rho, x) &= C_0 + \sum_k C_k w_k(\rho) e^{P_k x} \\ \tau_{rz}(\rho, x) &= (2G)^{-1} \tau_{rz} = \sum_k C_k \tau_k(\rho) e^{P_k x} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$z(r, x) = (2G)^{-1} z_k = \sum_k C_k z_k(r) e^{p_k x} \quad (1.1)$$

$$u(r, x) = \sum_k C_k u_k(r) e^{p_k x}$$

где $\{u, 0, \omega\}$ — вектор перемещений; $\tau_{\alpha\beta}$, σ_x — составляющие тензора напряжений; знак суммирования \sum' распространяется на все корни p_k уравнения

$$s(p) = 2(1-\nu) f_1^2(p) - p^2 [f_0^2(p) + f_1^2(p)] = 0 \quad (1.2)$$

расположенные в правой полуплоскости ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\begin{aligned} w_k(r) &= w^*(p_k, r), \quad z_k(r) = z^*(p_k, r) \\ z_k(r) &= z^*(p_k, r), \quad u_k(r) = u^*(p_k, r) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$w^*(p, r) = J_0(p) J_0(pr) + r J_1(p) J_1(pr) - 2(1-\nu) p^{-1} J_1(p) J_0(pr)$$

$$z^*(p, r) = p [r J_1(p) J_0(pr) - J_0(p) J_1(pr)]$$

$$z^*(p, r) = p J_0(p) J_0(pr) + pr J_1(p) J_1(pr) - 2 J_1(p) J_0(pr)$$

$$u^*(p, r) = r J_1(p) J_0(pr) - J_0(p) J_1(pr) - 2(1-\nu) p^{-1} J_1(p) J_1(pr)$$

G, ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала цилиндра. Заметим здесь, что распределение корней p_k дается следующей асимптотической формулой [7]:

$$p_{-k} \sim k\pi + \frac{i}{2} \ln(4k\pi), \quad k \rightarrow +\infty \quad (1.4)$$

Однородные решения (1.3) удовлетворяют соотношению обобщенной ортогональности Шиффа [5, 6], которое может быть представлено в форме

$$\int_0^1 [z_k(r) u_n(r) - \omega_n(r) z_k(r)] r dr = S_{nk} \delta_{nk}; \quad n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.5)$$

где δ_{nk} — символ Кронекера, и введены обозначения для однородных решений, соответствующих корню $p_0 = 0$ уравнения (1.2)

$$w_0 = z_0 = 1, \quad z_0 = 0, \quad u_0 = -\nu(1+\nu)^{-1}$$

Известно, что с помощью соотношения (1.5) коэффициенты C_k могут быть найдены в явном виде, если на торце цилиндра ($x=0$) задаются так называемые «перекрестные» граничные условия: то есть либо величины w и z , либо σ и u . Рассмотрим здесь первый случай (второй рассматривается аналогично), именно, пусть

$$w|_{x=0} = W(r), \quad z|_{x=0} = T(r), \quad 0 \leq r < 1 \quad (1.6)$$

Формально перейдем к пределу в (1.1)

$$w(\zeta, 0) = C_0 + \sum_k C_k w_k(\zeta) = W(\zeta)$$

$$z(\zeta, 0) = \sum_k C_k z_k(\zeta) = T(\zeta), \quad 0 \leq \zeta < 1$$

Умножим эти равенства соответственно на $-\sigma_k(\rho)\rho$ и $\tau_k(\rho)\rho$, сложим и проинтегрируем по $\rho \in [0, 1]$. После перемены порядка суммирования и интегрирования, используя соотношение (1.5), получаем

$$C_k = S_k^{-1} \int_0^1 [T(\zeta) \sigma_k(\zeta) - W(\zeta) z_k(\zeta)] \zeta d\zeta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.7)$$

Формулы (1.1), (1.7) дают формальное решение поставленной задачи.

2. *Преобразование формального решения.* Рассмотрим последовательность контурных интегралов (см. (1.2))

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_n} F'(p) dp^n \quad (2.1)$$

где

$$F(p) = -z^*(p, \zeta) w^*(p, \zeta) e^{2\pi i \Delta^{-1}(p)} \quad (2.2)$$

$$\Delta(p) = (1 - \nu) p^{-2} \int_0^1 s(p) \rho \quad (2.3)$$

L_n — контур, состоящий из отрезка мнимой оси $L_n^{(1)}$, замкнутого вправо полуокружностью $L_n^{(2)}$ большого радиуса $R_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$.

В силу симметрии поведение функции (2.2) на дугах $L_n^{(2)}$ достаточно исследовать лишь в первом квадранте. Используя асимптотические формулы для функции Бесселя в комплексной плоскости, можно получить при $\arg(p) \in (\pi, \pi/2]$ и любом $\alpha \in (0, \pi/2)$:

$$F(p) = O(p^\alpha \exp[(2 - \zeta - \eta)ip + \alpha p]), \quad p \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

При $\arg(p) \in [0, \pi]$ можно воспользоваться имеющимися в [8] оценками для функции $s(p)$, из которых следует, что $|F(p)|$ убывает при $p \rightarrow \infty$ на дугах $L_n^{(2)}$ за счет множителя e^{ip} . Полученные оценки позволяют заключить, что

$$\int_{L_n^{(2)}} F'(p) dp \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

если $\rho + \xi < 2$, $\alpha < 0$.

Подынтегральная функция (2.2) в правой полуплоскости имеет полюсы первого порядка в точках ρ_k и полюсы второго порядка в точках λ_k , где λ_k — положительные корни уравнения

* Интегрирование производится против часовой стрелки.

$$J_1(k) = 0$$

Учитывая (2.5), перейдем в (2.1) к пределу при $n \rightarrow \infty$. Используя теорему Коши о вычетах, после некоторых выкладок получим

$$-\sum_k^{\infty} \sigma_k(\xi) w_k(\zeta) e^{p_k x} S_k^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2J_0^{-2}(i_k) J_0(i_k \xi) J_0(i_k \zeta) \left[1 - \frac{x+i_k}{2(1-\nu)} \right] e^{i_k x} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(xy) u^*(iy, \xi) w^*(iy, \zeta) \Delta^{-1}(iy) idy \quad (2.6)$$

В левую часть этой формулы помещены вычеты в точках p_k , вычисленные с помощью равенства

$$\frac{d}{dp} \Delta(p) \Big|_{p=p_k} = S_k$$

которое можно проверить, найдя S_k по формуле (1.5).

Рассматривая теперь контурный интеграл (2.1) от функции

$$F(p) = u^*(p, \xi) w^*(p, \zeta) e^{p x} \Delta^{-1}(p) \quad (2.7)$$

можно получить

$$\begin{aligned} u_0(\xi) w_0(\zeta) S_0^{-1} + \sum_k^{\infty} u_k(\xi) w_k(\zeta) e^{p_k x} S_k^{-1} = \\ = -\frac{1}{1-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} J_0^{-2}(i_k) J_1(i_k \xi) J_0(i_k \zeta) x e^{i_k x} - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(xy) u^*(iy, \xi) w^*(iy, \zeta) \Delta^{-1}(iy) idy \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отличие от исследованного выше случая (2.2)–(2.6) состоит в том, что в левой части этого равенства учтен еще полувывчет от полюса первого порядка подынтегральной функции (2.7) в нуле.

Домножим теперь (2.6) на $-W(\xi)\bar{\zeta}$, а (2.8) на $T(\xi)\xi$, сложим и проинтегрируем по $\xi \in [0, 1]$. Из-за наличия экспоненциально убывающих сомножителей $e^{i_k x}$, $e^{p_k x}$ (см. (1.4)) в полученных равенствах может быть переменен порядок суммирования и интегрирования (единственным требованием для этого является интегрируемость функций $W(p)$ и $T(p)$ по Лебегу). После этого во внутренних точках цилиндра для перемещения w , определяемого (1.1), (1.7), оказывается справедливым представлении

$$w(\zeta, x) = w_I - \frac{1}{2(1-\nu)} (w_{II} + w_{III}) + w_{IV}, \quad x < 0, \quad 0 \leq \zeta < 1 \quad (2.9)$$

где $w_I(\rho, x) = D_0[W] + \sum_{k=1}^{\infty} D_k[W] J_0(\rho_k \rho) e^{\lambda_k x}$

$$w_{II}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k[W] J_0(\rho_k \rho) x \lambda_k e^{\lambda_k x}$$

$$w_{III}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k[T] J_0(\rho_k \rho) x e^{\lambda_k x}$$

$$w_{IV}(\rho, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 W(\xi) \xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy) \sigma^*(iy, \xi) \omega^*(iy, \rho) \Delta^{-1}(iy) idy - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^1 T(\xi) \xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy) u^*(iy, \xi) \omega^*(iy, \rho) \Delta^{-1}(iy) idy$$

и введены следующие обозначения для коэффициентов рядов Дини и Фурье—Бесселя функции $f(\rho)$

$$D_0[f] = 2 \int_0^1 f(\xi) \xi d\xi \quad (2.10)$$

$$D_k[f] = 2 J_0^{-2}(\rho_k) \int_0^1 f(\xi) J_0(\rho_k \xi) \xi d\xi$$

$$F_k[f] = 2 J_0^{-2}(\rho_k) \int_0^1 f(\xi) J_1(\rho_k \xi) \xi d\xi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Аналогично для напряжения τ имеем

$$\tau(\rho, x) = \tau_I + \frac{1}{2(1-\nu)} (\tau_{II} + \tau_{III}) + \tau_{IV}, \quad x < 0, \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (2.11)$$

$$\tau_I(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k[T] J_1(\rho_k \rho) e^{\lambda_k x}$$

$$\tau_{II}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k[T] J_1(\rho_k \rho) x \lambda_k e^{\lambda_k x}$$

$$\tau_{III}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k[W] J_2(\rho_k \rho) x \lambda_k^2 e^{\lambda_k x}$$

$$\tau_{IV}(\rho, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 W(\xi) \xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy) \sigma^*(iy, \xi) \omega^*(iy, \rho) \Delta^{-1}(iy) idy - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^1 T(\xi) \xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy) u^*(iy, \xi) \omega^*(iy, \rho) \Delta^{-1}(iy) idy$$

3. Исследование формального решения. Далее под рядами Фурье—Бесселя и Дини будут пониматься ряды по ортогональным с весом ρ полным системам функций $\{J_1(\nu_k \rho)\}$ и $\{J_0(\nu_k \rho)\}$, $k = 1, 2, \dots$, $\rho \in [0, 1]$. Обозначения для коэффициентов этих рядов даны формулами (2.10).

Центральное место в настоящей работе занимает следующая

Теорема 1. Пусть

а) функция $W(\rho)$ является абсолютной непрерывной ([9], стр. 226) на промежутке $[0, 1]$,

б) а $T(\rho)$ — интегрируемой (по Лебегу) на $[0, 1]$; тогда для решения (1.1) в виде ряда по однородным решениям с коэффициентами (1.7) краевые условия (1.6) выполняются в тех точках $\rho \in (0, 1)$, где одновременно:

с) ряд Дини функции $W(\rho)$ сходится к $W(\rho)$,

д) ряд Фурье—Бесселя $T(\rho)$ сходится к $T(\rho)$,

е) ряд Фурье—Бесселя производной $W'(\rho)$ сходится.

г) ряд Дини первообразной $T^*(\rho) = \int_0^1 T(\rho) d\rho$ сходится.

Доказательство основывается на исследовании предельного перехода $x \rightarrow -0$ в представлениях (2.9), (2.11).

В силу условий с), д) по признаку Абеля равномерной сходимости рядов заключаем:

$$\lim_{x \rightarrow -0} w_I(\rho, x) = W(\rho) \quad (3.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \tau_I(\rho, x) = T(\rho), \quad 0 < \rho < 1$$

С помощью оценок типа (2.4) при $\rho = iy$ легко доказать, что для интегралов w_{IV} и τ_{IV} выполняются условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла ([9], стр. 142) при $\rho < 1$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow -0} w_{IV}(\rho, x) = \lim_{x \rightarrow -0} \tau_{IV}(\rho, x) = 0, \quad \rho < 1 \quad (3.2)$$

Условия а), б) теоремы позволяют преобразовать интегрированием по частям ряды w_{III} , τ_{III}

$$w_{III}(\rho, x) = - \sum_{k=1}^{\infty} D_k [T^*] J_0(\nu_k \rho) x \nu_k e^{-\nu_k x}$$

$$\tau_{III}(\rho, x) = - \sum_{k=1}^{\infty} F_k [W'] J_1(\nu_k \rho) x \nu_k e^{-\nu_k x}$$

Члены этих рядов также, как и ряды w_{II} и τ_{II} , представляют собой произведения слагаемых рядов Дини (Фурье—Бесселя) на варианты

$a_k(x) = -x \nu_k e^{-\nu_k x}$, которая обладает следующими свойствами:

во-первых, при любых натуральном k и $x < \theta$: $0 < a_k(x) \leq e^{-1}$, во-вторых, $a_k(x)$, как функция натурального аргумента k , монотонно возрастает при $0 < \lambda_k \leq -x^{-1}$ и монотонно убывает при $\lambda_k > -x^{-1}$.

На этот случай легко может быть обобщен признак Абеля [10], который совместно с условиями с) — 1) теоремы показывает, что для рядов $w_{II, III}$ и $\tau_{II, III}$ допустим почленный переход к пределу

$$w_{II, III}(\rho, x), \tau_{II, III}(\rho, x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -0, 0 < \rho < 1 \quad (3.3)$$

Формулы (3.1), (3.2), (3.3) доказывают теорему 1.

Замечание. Поскольку при $\rho \in (0, 1)$, как известно [11, 12], ряды Фурье—Бесселя и Дини ведут себя в смысле сходимости так же, как тригонометрические [13], для выполнения условий с) — 1) теоремы 1 достаточно потребовать, например, чтобы в окрестности точки $\rho \in (0, 1)$ функции $W(\rho)$, $T(\rho)$ удовлетворяли условиям Липшица с показателем $\alpha \in (0, 1]$.

Кроме того, укажем (без доказательства) еще на одну возможную формулировку теоремы разложения:

Теорема 2. Если функции $W(\rho)$ и $T(\rho)$ имеют ограниченное полное изменение на промежутке $[0, 1]$, то

$$\lim_{x \rightarrow -0} w(\rho, x) = W(\rho), \quad 0 \leq \rho < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \tau(\rho, x) = \begin{cases} 0, & \rho = 0 \\ \frac{1}{2} [T(\rho - 0) + T(\rho + 0)], & 0 < \rho < 1 \end{cases}$$

4. Случай конечного цилиндра. Рассмотрим теперь цилиндр конечной высоты ($-l < x < l$) со свободной боковой поверхностью, на торцевых поверхностях которого заданы касательные напряжения и нормальные перемещения, и предположим для определенности, что деформация является симметричной относительно плоскости $x = 0$. (Антисимметричный случай рассматривается аналогично, а общий — как наложение упомянутых двух). Итак, пусть

$$w|_{x=l} = -w|_{x=-l} = W(\rho), \quad \tau|_{x=l} = -\tau|_{x=-l} = T(\rho), \quad 0 \leq \rho < 1$$

В этом случае решение задачи можно разыскивать в виде [6] (см. (1.1), (1.3))

$$w(\rho, x) = \frac{x}{l} C_0 + \sum_k C_k w_k(\rho) \operatorname{sh} p_k x / \operatorname{sh} p_k l$$

$$\tau(\rho, x) = \sum_k C_k \tau_k(\rho) \operatorname{sh} p_k x / \operatorname{sh} p_k l \quad (4.1)$$

При такой форме записи решения после повторения выкладок пункта 2 оказывается, что неизвестные C_k даются той же формулой (1.7), что и для полубесконечного цилиндра.

Для исследования предельного перехода преобразуем (4.1) к виду

$$w(\rho, x) = w_-(\rho, x) - w_+(\rho, x), \quad z(\rho, x) = z_-(\rho, x) - z_+(\rho, x) \quad (4.2)$$

введя обозначения

$$\begin{pmatrix} w_- \\ w_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{x}{l} \end{pmatrix} C_0 + \sum_k C_k w_k(\rho) \begin{pmatrix} e^{p_k(x-l)} \\ d_k(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_- \\ z_+ \end{pmatrix} = \sum_k C_k z_k(\rho) \begin{pmatrix} e^{p_k(x-l)} \\ d_k(x) \end{pmatrix}$$

$$d_k(x) = e^{p_k(x-l)} - \operatorname{sh} p_k x / \operatorname{sh} p_k l$$

Учитывая (1.4) и асимптотику

$$d_k(x) = O(\exp[-p_k(x-l)]), \quad k \rightarrow \infty$$

можно показать, что ряды w_\pm, z_\pm сходятся равномерно, скажем, при $0 < x < l$. Поэтому, в силу очевидного свойства $d_k(l) = 0$, заключаем

$$w_\pm, z_\pm \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow l - 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (4.3)$$

Первые слагаемые в (4.2) совпадают при замене $x = l$ на x с представлениями для соответствующих величин в полубесконечном цилиндре. На поведение при приближении к торцу определяется теоремами 1 и 2. Учитывая (4.3), заключаем окончательно: результаты теорем 1 и 2 распространяются и на случай конечного цилиндра.

Автор благодарит Я. С. Урлянда и А. С. Зильбергейта за прочтение рукописи и сделанные замечания.

Ленинградский орден Ленина
математический институт
им. М. И. Калинина

Поступила 21 XI 1973

Ա. Կ. ՋԱՅՐԻ

ՊԻՍՏՈՒՆ ԶԱՄԱՐ ԸՍՏ ԶԱՐԿՆԵՐ ԼՈՒՆՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒՄԵՆ
ՈՐ ՔԱՆԵ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ու լ

Ստաբիլացման հետազոտություններում ուսումնասիրվել են այն պայմանները, որոնց դեպքում աղաղակաբար կազմակերպվող կլոր զրանի համար առաջադիտ-
նաբան տեսության հավասարումների լուծումը, որը կառուցվել է բաց հա-

Մասին լուծումների շարքի տեսքով, բազարարում է գլանի իմքերի վրա
ևզրային պայմաններին: Շարքերի գործակիցները որոշվում են Պ. Ա. Շիֆֆ
րնդ լանրացված որթագոնալուծյան հարարերակցությունների օգնությամբ:

SOME THEOREMS ON EXPANSION INVOLVING ELEMENTARY SOLUTIONS FOR THE CYLINDER

A. N. ZLATIN

S u m m a r y

The end problem of the elastic cylinder is considered. The solution is assumed to be a series involving elementary ones for the cylinder with a free side surface. The limits on the realization of boundary conditions are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости. Тр. Ленинград. политехн. инст., 1967, № 279.
2. Гримберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Панновичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области, и о некоторых его обобщениях. ИММ, 1953, т. 17, вып. 2.
3. Варочич И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек. Материалы I Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси, Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975.
4. Орлов М. Б. О полноте собственных и присоединенных векторов самосопряженного квадратичного пучка. Функци. анализ и его прилож., 1976, т. 10, № 2.
5. Schiff P. A. Sur l'équilibre d'un cylindre elastique. J. math. pures et appl., 1883, ser. 3, t. 9.
6. Нумер Б. М. О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ИММ, 1969, т. 33, вып. 2.
7. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section. Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1913-1914, v. 49, p. 4, No. 17.
8. Прокопов В. К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра. Тр. Ленинград. политехн. инст., 1950, № 2.
9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974.
10. Шихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., «Наука», 1966.
11. Ватсон Г. И. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., ИЛ, 1960.
12. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. 1. М., ИЛ, 1960.
13. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., «Мир», 1965.