ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 5, 1979 Механика

А. А. БАБЛОЯН, А. А. ЕНГИБАРЯН

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА С ТРЕЩИНАМИ

Общее решение плоской задачи для изотропного кольцевого сектора граничные условия которого заданы в напряжениях, было построено в работе [1]. Решение этой же задачи для ортотропного материала приведено в работе [2]. Сжатие кругового кольца симметрично расположенными (внутренними или внешними) гладкими штампами со смешанными граничными условиями рассмотрено в работах [3, 4, 8, 9]. Задачи для круга, ослабленного внутренними или внешними радиальными трещинами, приведены в работах [10, 11, 12]. Аналогичные задачи для кольцевого сектора, ослабленного внешними трещинами, рассматривались в работах [5, 14].

В настоящей работе приводится решение двух задач теории упругости для вращающегося кругового кольца: а) контактная задача для двух круговых колец из различных изотропных материалов, насаженных и частично (симметрично) сцепленных друг с другом; б) задача для одного кольца, ослабленного симметрично расположенными внутренними и внешними радиальными трещинами.

Решения этих задач строятся единым методом [1] и после удовлетворения всем граничным условиям и условиям сопряжения сводятся к решению квазивполне регулярных бесконечных систем.

§ 1. Рассмотрим контактную задачу двух кольцевых секторов из различных изотропных материалов, соединенных друг с другом по n одинаковым участкам, расположенным симметрично вдоль дуги окружности (фиг. 1). Достаточно задачу решать только для заштрихованной части области, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$\tau_{r\varphi}^{(i)}(r, 0) = \tau_{r\varphi}^{(i)}(r, \varphi_1) = 0, \quad v^{(i)}(r, 0) = v^{(i)}(r, \varphi_1) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$ae^{i\varphi}\sigma_r^{(2)}(l_1, \varphi) = f_2^{(1)}(\varphi) = f_{02}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k2}^{(1)} \cos \alpha_k \varphi$$

$$ae^{i\varphi}\tau_{r\varphi}^{(1)}(l_1, \varphi) = g_2^{(1)}(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{k2}^{(1)} \sin \alpha_k \varphi \qquad (0 < \varphi < \varphi_1)$$

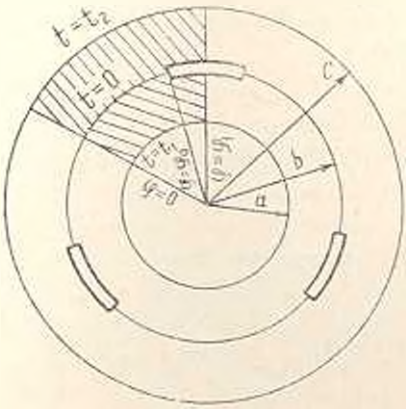
$$be^{i\varphi}\sigma_r^{(2)}(l_2, \varphi) = f_1^{(2)}(\varphi) = f_{02}^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k2}^{(2)} \cos \alpha_k \varphi \qquad (1.2)$$

$$be^{t}\tau_{tr}^{(2)}(t_2, \varphi) = g_1^{(2)}(\varphi) - \sum_{k=1}^{\infty} g_{k1}^{(2)} \sin \alpha_k \varphi$$

$$\sigma_t^{(1)}(0, \varphi) = \sigma_t^{(2)}(0, \varphi) = 0, \quad \tau_{tr}^{(1)}(0, \varphi) = \tau_{tr}^{(2)}(0, \varphi) = 0, \quad (\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$$

На линии $t = 0$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 < \varphi_1)$ должны удовлетворяться условия полного контакта двух материалов

$$\begin{aligned} u^{(1)}(0, \varphi) &= u^{(2)}(0, \varphi) \\ \sigma_\varphi^{(1)}(0, \varphi) &= \sigma_\varphi^{(2)}(0, \varphi) \\ v^{(1)}(0, \varphi) &= v^{(2)}(0, \varphi) \\ \tau_{tr}^{(1)}(0, \varphi) &= \tau_{tr}^{(2)}(0, \varphi) \end{aligned} \tag{1.3}$$



Фиг. 1.

Решение задачи для каждого кругового кольца ищется в виде [1]

$$F^{(i)}(t, \varphi) = b^{(i)}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k^{(i)}(t) \cos \alpha_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k^{(i)}(\varphi) \cos \beta_k^{(i)} t \tag{1.4}$$

где

$$\Phi_k^{(i)}(\varphi) = A_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k^{(i)}(\varphi_1 - \varphi) \sin(\varphi_1 - \varphi) + B_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k^{(i)}(\varphi_1 - \varphi) \sin \varphi + C_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k^{(i)} \varphi \sin(\varphi_1 - \varphi) + D_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k^{(i)} \varphi \sin \varphi$$

$$\Psi_k^{(i)}(t) = E_k^{(i)} \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh}(t_1 - t) + G_k^{(i)} \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t + F_k^{(i)} \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh}(t_1 - t) + H_k^{(i)} \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} t \tag{1.5}$$

$$b^{(i)}(t) = b_0^{(i)} e^{t} + b_1^{(i)} t e^{-t} + b_2^{(i)} t e^{t}$$

$0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$; $t_1 \leqslant t \leqslant 0$ — при $i = 1$, $0 \leqslant t \leqslant t_2$ при $i = 2$; $\alpha_k = \dfrac{k\pi}{\varphi_1}$;

$$\beta_k^{(i)} = \frac{k\pi}{t_i}, \quad t = \ln \frac{r}{a}, \quad t_1 = -\ln \frac{b}{a}, \quad t_2 = \ln \frac{c}{b}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{n}, \quad n \geqslant 2$$

n — число участков соединений двух материалов. Случай $n = 1$ получится после решения задачи предельным переходом.

Напряжения и перемещения с учетом инерционных сил выражаются через функцию Эри следующими формулами [7]:

$$r\sigma_r(t, \varphi) = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + F - \frac{2\lambda + 3\mu}{4(\lambda + 2\mu)} \rho \omega^2 r^2$$

$$r\sigma_\varphi(t, \varphi) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{2\lambda + \mu}{4(\lambda + 2\mu)} \rho \omega^2 r^2$$

$$r\tau_{r\varphi}(t,\ \varphi) = -\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial t} \tag{1.6}$$

$$u(t,\ \varphi) = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + F\right)dt + 2\gamma_1 F - \bar{\gamma}\frac{\partial F}{\partial t}\right] - \frac{\rho\omega^2 r^3}{8(\lambda + 2\mu)}$$

$$v(t,\ \varphi) = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} - F\right)d\varphi - \int\int F dt d\varphi - \int\frac{\partial F}{\partial\varphi}dt - \bar{\gamma}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right]$$

где

$$\bar{\gamma} = \frac{\nu}{1-\nu},\qquad \gamma_1 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},\qquad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.7}$$

ρ — плотность материала, ν — коэффициент Пуассона, ω — угловая скорость вращения.

Удовлетворяя граничным условиям и решая полученные системы уравнений относительно коэффициентов разложения, имеем

$$\begin{gathered} A_k^{(i)} = B_k^{(i)} = C_k^{(i)} = D_k^{(i)} = 0 \\ H_k^{(i)}\alpha_k \operatorname{sh}\alpha_k t_i \operatorname{sh} t_i = g_{k1}^{(i)},\qquad E_k^{(i)}\alpha_k \operatorname{sh}\alpha_k t_i \operatorname{sh} t_i = g_{k2}^{(i)} \\ \Delta_{k2}^{(i)} G_k^{(i)} = M_{k1}^{(i)}\alpha_k \operatorname{sh} t_i - M_{k2}^{(i)} \operatorname{sh}\alpha_k t_i \\ \Delta_{k1}^{(i)} F_k^{(i)} = M_k^{(i)} \operatorname{sh}\alpha_k t_i - M_{k2}^{(i)}\alpha_k \operatorname{sh} t_i \end{gathered} \tag{1.8}$$

где

$$\begin{gathered} M_{k1}^{(i)} = \alpha_k^{-1}(1 - \alpha_k \operatorname{cth}\alpha_k t_i + \operatorname{cth} t_i)\, g_{k1}^{(i)} - f_{k1}^{(i)} \\ M_{k2}^{(i)} = \alpha_k^{-1}(1 + \alpha_k \operatorname{cth}\alpha_k t_i - \operatorname{cth} t_i)\, g_{k2}^{(i)} - f_{k2}^{(i)} \\ \Delta_{k1}^{(i)} = \operatorname{sh}^2\alpha_k t_i - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_i \end{gathered} \tag{1.9}$$

При этом свободные члены разложения (1.4) определяются из следующих уравнений:

$$\begin{gathered} 2b_0^{(i)} e^{t_i} + b_1^{(i)} e^{-t_i} - \frac{2\lambda_i + 3\mu_i}{4(\lambda_i + 2\mu_i)}\rho_i\omega^2 a^4 e^{3t_i} = f_{01}^{(i)} \\ 2b_0^{(i)} + b_1^{(i)} - \frac{2\lambda_i + 3\mu_i}{4(\lambda_i + 2\mu_i)}\rho_i\omega^2 a^4 = f_{02}^{(i)},\quad b_2^{(i)} = 0 \end{gathered} \tag{1.10}$$

Вычислим значения перемещений на линии $t = 0$

$$\begin{gathered} v^{(i)}(0,\ \varphi) = \frac{2(1-\nu_i^2)}{E_i}\sum_{p=1}^{\infty}[\sigma_p^{-1}(\gamma_i \bar{f}_{pi} - \bar{g}_{pi}) + R_{pi}]\sin\alpha_p\varphi \\ u^{(i)}(0,\ \varphi) = \frac{2(1-\nu_i^2)}{E_i}\sum_{p=1}^{\infty}[\alpha_p^{-1}(\gamma_i \bar{g}_{pi} - \bar{f}_{pi}) + Q_{pi}]\cos\alpha_p\varphi + \\ + u_0^{(i)}(0) - \frac{\rho_i\omega^2 a^3}{8(\lambda_i + 2\mu_i)} \end{gathered} \tag{1.11}$$

где

$$(\alpha_p^2-1)\bar f_{pi}=\alpha_p(\alpha_p f_{pi}-g_{pi}),\qquad (\alpha_p^2-1)\bar g_{pi}=\alpha_p(\alpha_p g_{pi}-f_{pi})$$

$$E_i u_0^{(i)}(t)=(1+\nu_i)\Big\{[2(1-2\nu_i)b_0^{(i)}e^t-b_1^{(i)}e^{-t}]+ \tag{1.12}$$

$$+\frac{2\lambda_i+3\mu_i}{4(\lambda_i+2\mu_i)}[2(1-2\nu_i)e^t\operatorname{ch}t_i+e^{t_i-t}]\rho_i\omega^2a^3e^{t_i}\Big\}\qquad \begin{matrix}(i=1,\ 2)\\(p=1,\ 2,\ 3\ldots)\end{matrix}$$

$$\alpha_p\Delta_{p1}^{(1)}R_{p1}=(\alpha_p f_{p1}-g_{p1})(\lambda_{p1}^{(1)}-\lambda_{p2}^{(1)})+(\alpha_p f_{p2}-g_{p2})(\lambda_{p3}^{(1)}-\lambda_{p4}^{(1)})+$$

$$+g_{p2}(\lambda_{p5}^{(1)}-\lambda_{p4}^{(1)})+g_{p1}(\lambda_{p6}^{(1)}-\lambda_{p1}^{(1)})$$

$$\alpha_p\Delta_{p2}^{(2)}R_{p2}=(\alpha_p f_{p2}-g_{p2})(\lambda_{p1}^{(2)}+\lambda_{p2}^{(2)})-(\alpha_p f_{p1}-g_{p1})(\lambda_{p3}^{(2)}+\lambda_{p4}^{(2)})-$$

$$-g_{p1}(\lambda_{p5}^{(2)}+\lambda_{p4}^{(2)})-g_{p2}(\lambda_{p6}^{(2)}+\lambda_{p1}^{(2)})$$

$$\Delta_{p1}^{(1)}Q_{p1}=(\alpha_p f_{p1}-g_{p1})\lambda_{p2}^{(1)}-(\alpha_p f_{p2}-g_{p2})\lambda_{p3}^{(1)}+g_{p1}\lambda_{p4}^{(1)}+g_{p2}\lambda_{p4}^{(1)} \tag{1.13}$$

$$\Delta_{p1}^{(2)}Q_{p2}=(\alpha_p f_{p1}-g_{p1})\lambda_{p3}^{(2)}-(\alpha_p f_{p2}-g_{p2})\lambda_{p2}^{(2)}+g_{p1}\lambda_{p4}^{(2)}+g_{p2}\lambda_{p1}^{(2)}$$

$$\lambda_{p1}^{(1)}=\alpha_p\operatorname{sh}^2t_i,\quad (\alpha_p^2-1)\lambda_{p2}^{(1)}=\operatorname{sh}\alpha_p t_i\operatorname{ch}\alpha_p t_i+\alpha_p\operatorname{sh}t_i\operatorname{ch}t_i-\Delta_{p1}^{(1)}$$

$$(\alpha_p^2-1)\lambda_{p3}^{(1)}=\alpha_p\operatorname{ch}\alpha_p t_i\operatorname{sh}t_i+\operatorname{sh}\alpha_p t_i\operatorname{ch}t_i,\qquad \lambda_{p4}^{(1)}=\operatorname{sh}\alpha_p t_i\operatorname{sh}t_i$$

$$\lambda_{p5}^{(1)}=\alpha_p\operatorname{ch}\alpha_p t_i\operatorname{sh}t_i-\operatorname{sh}\alpha_p t_i\operatorname{ch}t_i,\qquad \lambda_{p6}^{(1)}=\operatorname{sh}\alpha_p t_i\operatorname{ch}\alpha_p t_i-\alpha_p\operatorname{sh}t_i\operatorname{ch}t_i-\Delta_{p1}^{(1)}$$

Вводим следующие функции

$$\sigma_k(\varphi)=f_{0k}-\sum_{p=1}^{\infty}\bar f_{pk}\cos\alpha_p\varphi,\qquad \tau_k(\varphi)=\sum_{p=1}^{\infty}\bar g_{pk}\sin\alpha_p\varphi,\qquad (k=1,\ 2) \tag{1.14}$$

При этом напряжения, действующие на дугах окружностей $t=0$, в силу (1.12) будут выражаться через приведенные напряжения (1.14) соотношениями

$$f_k(\varphi)=\sigma_k(\varphi)+\int_0^{\varphi_1}\left[\chi(x-\varphi)-\frac{x}{\varphi_1}\right]\tau_k(x)\,dx,\qquad \chi(z)=\begin{cases}1 & z>0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$g_k(\varphi)=\tau_k(\varphi)+\int_0^{\varphi_1}\left[\chi(\varphi-x)-\frac{\varphi}{\varphi_1}\right]\sigma_k(x)\,dx \tag{1.15}$$

Отметим, что перемещения (1.11) выражаются через приведенные напряжения $\sigma_k(\varphi)$ и $\tau_k(\varphi)$ более простыми формулами, удобными для дальнейшего применения, чем если бы они выражались через контактные напряжения $f_k(\varphi)$ и $g_k(\varphi)$. Эти функции вводятся с целью, чтобы регулярные части (вторые слагаемые) в формулах (1.11) для перемещений были бесконечно дифференцируемыми функциями.

Из формул (1.1) и (1.14) следует также, что

$$\int_{\delta}^{\varphi_0} \tau_k(\varphi)\, d\varphi = \int_{0}^{\varphi_0} f_k(\varphi)\, d\varphi \tag{1.16}$$

Удовлетворяя теперь условиям контакта (1.3), для определения комплексного контактного давления

$$p(x) = \sigma^{(1)}(x) + i\tau^{(1)}(x) = \sigma^{(2)}(x) + i\tau^{(2)}(x), \quad (|x| < \varphi_0) \tag{1.17}$$

получим сингулярное интегральное уравнение с регулярной частью

$$P(\xi) = \frac{\gamma i}{2\pi} \int_{-c}^{c} P(\eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2}\, d\eta = f(\xi), \quad (-c < \xi < c) \tag{1.18}$$

где

$$f(\xi) = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p \delta_2 (R_{p2} \cos p\xi + iQ_{p2} \sin p\xi) - \delta_1 (R_{p1} \cos p\xi +$$

$$+ iQ_{p1} \sin p\xi)] + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{c} \varepsilon_2 \left(\frac{\varphi_0 \eta}{\pi} \right) d\eta \tag{1.19}$$

$$\gamma = \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right] \Big/ \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \gamma_1 - \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \gamma_2 \right]$$

$$\delta_k = \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \Big/ \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \gamma_1 - \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \gamma_2 \right], \quad c = \frac{\pi \varphi_0}{\varphi_1}, \quad (k = 1, 2)$$

Решение уравнения (1.18), следуя [15], записывается в виде

$$p(\xi) = Af(\xi) + \frac{BX(\xi)}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{f(\eta)\, d\eta}{X(\eta) \sin \frac{\eta - \xi}{2}} +$$

$$+ 2BDX(\xi) \left(\operatorname{th} c\beta \sin \frac{\xi}{2} + i \cos \frac{\xi}{2} \right) \tag{1.20}$$

где

$$X(\xi) = \left(\sin \frac{c - \xi}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \beta i} \left(\sin \frac{c + \xi}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \beta i}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tag{1.21}$$

Коэффициент D определяется из условия статического равновесия

$$4\pi\gamma \operatorname{ch} 2c\beta D = -(1 - \gamma^2) \operatorname{ch} \pi\beta \operatorname{ch} c\beta \int_{-c}^{c} p(\xi)\, d\xi \tag{1.22}$$

Функция $f(\xi)$ в (1.19) содержит неизвестное контактное давление $p(\xi)$, поэтому (1.20) является уравнением Фредгольма для определения $p(\xi)$. Для того, чтобы интегральное уравнение (1.20) свести к решению бесконечных систем алгебраических уравнений, представим функцию $p(y)$ в виде

$$p(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ky + ib_k \sin ky) \tag{1.23}$$

где

$$\pi a_k = \int_{-c}^{c} \tau(y) \cos kydy, \qquad \pi b_k = \int_{-c}^{c} \tau(y) \sin kydy \tag{1.24}$$

Из интегрального уравнения (1.20) и граничных условий на линии контакта для определения неизвестных a_k и b_k получим следующую систему:

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{p=1}^{\infty} (a_p M_{pk}^{(1)} + b_p N_{pk}^{(2)}) + \gamma_k^{(1)} \\ b_k &= \sum_{p=1}^{\infty} (a_p M_{pk}^{(2)} + b_p N_{pk}^{(2)}) + \gamma_k^{(2)} \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.25}$$

где

$$M_{pk}^{(1)} = \int_{-c}^{c} [iN_p^{(1)} S_p(\xi) + N_p^{(2)} C_p(\xi)] \cos k\xi d\xi$$

$$M_{pk}^{(2)} = \int_{-c}^{c} [N_p^{(1)} S_p(\xi) - iN_p^{(2)} C_p(\xi)] \sin k\xi d\xi$$

$$N_{pk}^{(1)} = \int_{-c}^{c} [iN_p^{(3)} S_p(\xi) + N_p^{(4)} C_p(\xi)] \cos k\xi d\xi$$

$$N_{pk}^{(2)} = \int_{-c}^{c} [N_p^{(3)} S_p(\xi) - iN_p^{(3)} C_p(\xi)] \sin k\xi d\xi$$

$$\pi\Delta_{p1} N_p^{(1)} = -[\lambda_{p1}(\delta_1 - \delta_2) + (\alpha_p^2 - 1)\lambda_{p2}(\delta_1 + \delta_2)]$$

$$\pi\alpha_p\Delta_{p1} N_p^{(2)} = [(\alpha_p^2 - 1)\lambda_{p2} - \lambda_{p4}](\delta_1 + \delta_2) - (\alpha_p^2 - 2)\lambda_{p1}(\delta_1 - \delta_2)$$

$$\pi\Delta_{p1} N_p^{(3)} = -\alpha_p\lambda_{p2}(\delta_1 - \delta_2), \qquad \pi\Delta_{p1} N_p^{(4)} = \lambda_{p1}(\delta_1 - \delta_2) - \lambda_{p4}(\delta_1 + \delta_2)$$

$$\gamma_k^{(1)} \operatorname{ch} \pi\beta = 4BD\,[\operatorname{th} c\beta[B_k(0) - B_{k-1}(0)] + i[A_k(0) + A_{k-1}(0)]] +$$

$$+ \frac{2 \operatorname{ch} \pi\beta}{\pi^2} \int_0^{\pi} \sigma_1\left(\frac{\varphi_1\eta}{\pi}\right) d\eta \int_{-c}^{c} C_p(\xi) \cos k\xi d\xi \tag{1.26}$$

$$\pi\gamma(\delta) = 2\pi BD\{i \operatorname{th} c\beta[A_k(0) - A_{k-1}(0)] + [B_k(0) + B_{k-1}(0)]\} +$$

$$+ 2\int_0^{\pi} \sigma_1\left(\frac{\varphi_1\gamma_1}{\pi}\right) d\gamma_1 \int_{-c}^{c} C_0(\xi) \sin k\xi d\xi$$

$$\int_{-c}^{c} \frac{\cos\left[\left(p + \frac{1}{2}\right)x + \delta\right] dx}{X(x)} = \frac{2\pi}{\cos \pi\beta} A_p(\delta)$$

$$\int_{-c}^{c} \frac{\sin\left[\left(p + \frac{1}{2}\right)x + \delta\right] dx}{X(x)} = \frac{2\pi}{\cos \pi\beta} B_p(\delta)$$

$$C_k(x) = A \cos kx - \frac{BX(x)}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{\cos k\tau d\tau}{X(\tau) \sin \frac{\tau - x}{2}}$$

$$S_k(x) = A \sin kx - \frac{BX(x)}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{\sin k\tau d\tau}{X(\tau) \sin \frac{\tau - x}{2}}$$

$$C_0(x) = -\frac{BX(x)}{\cos \pi\beta} \sin\left(c\beta + \frac{x}{2}\right), \quad A = \frac{1}{1 - \gamma^2}, \quad B = \frac{\gamma i}{1 - \gamma^2}$$

Таким образом, рассмотренная задача сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений. В силу введения новых неизвестных (1.12) коэффициенты бесконечных систем (1.25) стремятся к нулю, как $O(k^{-1/2}, pe^{-l_1 p})$. Из выражения (1.26) следует, что $\beta_0\varphi_1 = \lambda \min(l_1, l_2)$. На основании вышесказанного и результатов работы [6] для коэффициентов бесконечных систем (1.25) имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} |M_{kp}^{(1)}|, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |N_{pk}^{(1)}| \to 0, \quad k \to \infty$$

то есть система (1.25) квазивполне регулярна.

Как следует из физических соображений, ряд (1.23) сходится условно. Но используя решение (1.20), сходимость этого ряда улучшается и при этом выделяются соответствующие особенности контактных напряжений (1.27).

В качестве численного примера рассмотрим случай, когда внутреннее тело—из меди ($E = 10^6$ кг/см², $\nu = 0.32$), а наружное — из стали ($E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu = 0.27$). Принято, что $-l_1 = l_2 = \ln 2$,

$$\sigma(l_1, \varphi) = f_2^{(1)} = p_{01}, \quad \sigma(l_2, \varphi) = f_{01}^{(2)} = p_{02}, \quad c = 0.5\pi; \ n = 3$$

При таких значениях параметров комплексное контактное напряжение примет вид

$$p(x) = \frac{D}{\sqrt{\sin\frac{c-x}{2}\sin\frac{c+x}{2}}}\,[C(x) + iS(x)][K_1(x) + iK_2(x)] \qquad (1.27)$$

где

$$C(x) = \cos\left(\beta \ln \frac{\sin\frac{c+x}{2}}{\sin\frac{c-x}{2}}\right), \qquad S(x) = \sin\left(\beta \ln \frac{\sin\frac{c+x}{2}}{\sin\frac{c-x}{2}}\right)$$

$$K_1(x) = 0.166385\cos\frac{x}{2} - 0.077669\cos\frac{3x}{2} - 0.001102\cos\frac{5x}{2} +$$

$$+ 0.000022\cos\frac{7x}{2} - \cdots$$

$$K_2(x) = 0.024985\sin\frac{x}{2} + 0.005874\sin\frac{3x}{2} -$$

$$- 0.000339\sin\frac{5x}{2} + 0.0000009\sin\frac{7x}{2} + \cdots$$

Имеем также

$$\int_{-c}^{c} p(x)\,dx = 1.05238\,D \qquad (1.28)$$

а для D получаем

$$D = -23.481324\rho_1\omega^2a^2 - 129.96447\rho_2\omega^2a^2 + 11.205104\,p_{01} -$$

$$- 23.146771\,p_{02} + 9.362577\cdot 10^{-3}\frac{\delta}{a} \qquad (1.29)$$

δ — сближения колец

$$\delta = u^{(1)}(0, \varphi) - u^{(2)}(0, \varphi), \quad |\varphi| < c$$

Из (1.28) и (1.29) можно получить те значения ω, зависящие от p_{01}, p_{02} и δ, при которых наступает момент отрыва колец друг от друга. Например, если $p_{01} = p_{02} = 0$, и разность радиусов колец до вращения была $a_1 - a_2 = \delta$, то тенденция к отрыву наступит при

$$\omega = 0.886256\cdot 10^3\sqrt{\frac{\delta}{a^2}}\ \text{сек}^{-1}$$

§ 2. Рассмотрим теперь задачу для кольца, ослабленного симметрично расположенными внешними или внутренними радиальными трещинами, когда на круговых частях и внутри трещин действуют равномерно распределенные нормальные нагрузки (фиг. 2).

Граничные условия этой задачи можно получить из (1.2) при

$$g_1^{(2)}(\varphi) = g_2^{(1)}(\varphi) = 0, \qquad f_{k1}^{(2)} = f_{k2}^{(1)} = 0$$

а условие для перемещения на линии $\varphi = \varphi_1$ заменяется одним из следующих смешанных условий:

а) внутренняя трещина

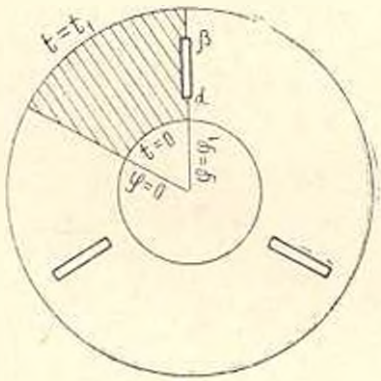
$$v(t, \varphi_1) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant \alpha, \ \beta \leqslant t \leqslant t_1)$$
$$\sigma_\varphi(t, \varphi_1) = -p \quad (\alpha < t < \beta)$$

б) трещина, расположенная на внутренней поверхности

$$\sigma_\varphi(t, \varphi_1) = -p \quad (0 < t < \beta)$$
$$v(t, \varphi_1) = 0 \quad (\beta < t < t_1) \qquad (2.1)$$

в) трещина, расположенная на внешней поверхности

$$v(t, \varphi_1) = 0 \quad (0 < t < \alpha)$$
$$\sigma_\varphi(t, \varphi_1) = -p \quad (\alpha < t < t_1)$$



Фиг. 2.

Удовлетворяя условию (2.1,а), с учетом (1.2) — (1.5), для определения $t_1(t)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\psi(z)\,dz}{u - z} = \bar{f}(u) \qquad (-1 \leqslant u \leqslant 1) \qquad (2.2)$$

где $\frac{1-\nu^2}{E} f_3(t)$ — нормальное перемещение точек берегов трещин

$$\psi(z) = f_3(y) - f_3(y), \qquad \beta_1 y = \arccos(az + b)$$

$$\beta_1 t = \arccos(au + b), \quad 2a = \cos\beta_1\beta - \cos\beta_1\alpha$$

$$2b = \cos\beta_1\beta + \cos\beta_1\alpha, \quad \bar{f}(u) = g(t)$$

$$g(t) = D_0^{(0)}(t) + D_0^{(1)}(t_1) - \int_{-1}^{1} \psi(y)\, D_0^{(2)}(t, y)\, dy$$

$$D_0^{(0)}(t) = 4t_2\beta_1(b_1 e^{-t} - b_2 e^{t})$$

$$D_0^{(1)}(t_1) = -2t_1\beta_1[2b_0 e^{t_1} + b_1 e^{-t_1} + b_2(1 + 2t_1)e^{t_1} - a(P_2 - ape^{t_1})]$$

$$D_0^{(2)}(t, y) = 2\varphi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \beta_k y}{\beta_k^2 + 1} [(-1)^{k+1}(1 + R_p^{(1)}) - R_p^{(1)}(\beta_k^2+1)\cos \beta_k t] + \right.$$

$$\left. + \frac{2t_1}{\varphi_1 \Delta_{k1}} [Q_1(\alpha_k, y) H_k(t) - Q_1(\alpha_k, t_1 - y) H_k(t_1 - t) - \Delta_{k1} Q_1(\alpha_k, y)] \right\} \quad (2.3)$$

$$R_k^{(1)} \Delta_{k2} = -e^{-\beta_k \varphi_1} \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 + \beta_k \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1$$

$$H_k(t) = \alpha_k \operatorname{sh} t_1 [\alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{ch} t - \alpha_k (\alpha_k^2 - 2) \operatorname{ch} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t] +$$

$$+ \operatorname{sh} \alpha_k t_1 [\alpha_k (\alpha_k^2 - 2) \operatorname{ch} \alpha_k t \operatorname{sh} (t_1 - t) - \alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{ch} (t_1 - t)]$$

$$Q_1(\alpha_k, y) = \frac{1}{4\alpha_k} \left[\frac{\operatorname{sh}(\alpha_k - 1) y}{\operatorname{sh}(\alpha_k - 1) t_1} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha_k + 1) y}{\operatorname{sh}(\alpha_k + 1) t_1} \right]$$

$$\Delta_{k2} = \operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1$$

$$\int_0^{t_1} a e^t \sigma_z(t, \varphi_1)\, dt = P_1, \quad \int_0^{t_1} a e^t \sigma_z(t, \varphi_1)\, dt = P_2$$

Представляя решение (2.2) в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(z) \right] \quad (2.4)$$

для определения a_k получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\alpha_m = \sum_{k=0}^{\infty} A_{mk} a_k + g_m, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \quad (2.5)$$

где

$$A_{mk} = -\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (1 - z^2)^{-1/2} \sqrt{1 - u^2}\, U_m(u)\, T_k(z) f_1(u, z)\, du\, dz$$

$$g_m = -\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2}\, U_m(u) f_0(u)\, du \quad (2.6)$$

$$\pi^2 f_0(u) = -2[D_0^{(0)}(t) + D_0^{(1)}(t_1)], \qquad \pi^2 f_1(u, z) = -2D_0^{(2)}(t, y)$$

$U_m(u)$, $T_k(u)$ — полиномы Чебышева.

Аналогичным образом, как это делалось в работах [3, 4], доказывается, что бесконечные системы этой задачи (2.5), а также следующей задачи (2.9) не только квазивполне регулярны, но и суммы модулей коэффициентов при неизвестных при возрастании номера строки стремятся к нулю, как $O(m^{-1/2})$.

При удовлетворении условий (2.1,в), то есть если трещина раскрывается к внешней поверхности, интегральное уравнение примет вид

$$\int_0^{\pi} \frac{\varphi(y)\sin\beta_1 y}{\cos\beta_1 y - \cos\beta_1 t}\,dy = g(t), \quad (\alpha < t < \pi) \tag{2.7}$$

решение которого ищется в виде

$$\varphi(z) = \frac{a_0\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{\cos\alpha - \cos z}} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos\frac{z}{2}\int_0^{\alpha} \frac{y_p(\cos\theta)\,tg\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta - \cos z}}\,d\theta \tag{2.8}$$

где

$$\beta_1 y = z, \quad \beta_1 t = u, \quad \beta_1\beta = \bar{\beta}, \quad \beta_1 g(t) = g(u)$$

Для определения a_n получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} a_m = \sum_{p=1}^{\infty} A_{pm} a_p + g_m, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \\ a_0 B_0 = \sum_{p=1}^{\infty} B_p a_p + g_0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

где

$$A_{pm} = m\sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} C_{mk}(\alpha)\, J_{pk}(\cos\alpha) -$$

$$-\frac{4\sqrt{2}\,m}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta_{k1}}\int_0^{\alpha} y_p(\cos\theta)\,R_{km}(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$\pi^2 g_m = -m\sqrt{2}\,A_{m0} + a_0 m\sum_{k=1}^{\infty}\left[R_k^{(1)} C_{mk}(\alpha)\,y_k(\cos\alpha) - \frac{4\sqrt{2}}{\varphi_1}\,\frac{R_{km}(\cos\alpha)}{\Delta_{k1}}\right]$$

$$J_{pk}(\cos\alpha) = \int_0^{\alpha} y_p(\cos\theta)\,y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$R_{km}(\cos\theta) = \int_{\theta}^{\alpha}\frac{\cos y/2}{\sqrt{\cos\theta - \cos y}}\,[Q_1(\alpha_k, y)\,H_{km}'(\alpha) -$$

$$- Q_1(\alpha_k, -y)\,H_{km}(\pi - y)]\,dy$$

$$C_{mk}(\alpha) = \int_0^{\alpha}\cos mt\cos kt\,dt, \qquad H_{km}(\alpha) = \int_0^{\alpha} H_k(t)\cos mt\,dt$$

$$B_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} y_k(\cos\alpha)\frac{\sin k\alpha}{k} - \frac{8}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_{k0}(\cos\alpha)}{\Delta_{k1}} \tag{2.10}$$

$$B_p = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{Z_p(\cos\theta)}{p} + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} J_{pk}(\cos\alpha) \frac{\sin k\alpha}{k} +$$

$$+ \frac{8}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{k1}} \int_0^{\pi} Y_p(\cos\theta) R_{k0}(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$g_0 = 8[b_1(e^{-\alpha} - e^{-\pi}) - b_2(e^{\alpha} - e^{\pi})] + \frac{2(\pi - \alpha) D_0^{(1)}(\pi)}{\pi \beta_1} -$$

$$- \frac{4(\pi - \alpha)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \left[\frac{(-1)^{k+1}(1 + R_k^{(1)}) \sin \beta_k y}{\beta_k + 1} - \frac{2\pi}{\varphi_1} Q_1(z_k, y) \right] \psi(y)\, dy$$

$$\overline{A}_{m0} = 4\pi \int_0^{\pi} [b_1 e^{-t} - b_2 e^{t}] \cos mt\, dt - \frac{D_0^{(1)}(\pi) \sin m\alpha}{m \beta_1} +$$

$$+ \frac{2 \sin m\alpha}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \left[\frac{(-1)^{k+1}(1 + R_k^{(1)}) \sin \beta_k y}{\beta_k + 1} - \frac{2\pi}{\varphi_1} Q_1(z_k, y) \right] \psi(y)\, dy$$

$Y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x)$, $P_k(x)$ — полиномы Лежандра.

В случае выполнения условий (2.1,б), то есть если трещина раскрывается к внутренней поверхности, аналогично случаю (2.1, в) решение интегрального уравнения приводится к регулярной бесконечной системе.

Институт механики
АН Армянской ССР
Ереванский зооветеринарный
институт

Поступила 15 II 1979

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Ա. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ

ՃԱՔԵՐՈՎ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿՈՒ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության երկու խնդիր պատվող շրջանային օղակների համար ա) մասնակիորեն իրար հարակցված երկու համակենտրոն շրջանային օղակների հարթ կոնտակտային խնդիրը, բ) սիմետրիկ ձևով դասավորված ներքին և արտաքին շառավղային ճեղքերով թուլացված օղակի խնդիրը։

Լուծումը փնտրվում է Ֆուրյեի եռանկյունաչափական շարքերի օգնությամբ քեհատային կոորդինատական սիստեմում, և այն բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման։ Վերջինս էլ փոխարինվում է համարժեք քվազի լիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմով։ Բերվում է թվային օրինակ։

ON TWO PROBLEMS FOR RING SECTORS

A. H. BABLOYAN, A. A. ENGIBARIAN

S u m m a r y

Two problems for a rotating disc a) a contact problem for two circular rings from different materials partially (symmetrically) bounded to each other, b) a problem for one ring weakened by symmetrically placed internal and external radial cracks are considered.

The stress function in the form of trigonometrical Fourier series in polar coordinate system is presented.

The solution is reduced to singular integral equations, later reduced to a quasi-quite regular system of algebraic equations.

A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 1962, т. 15, № 1.
2. *Баблоян А. А., Тоноян В. С.* Плоская задача для ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 1964, т. 17, № 5.
3. *Баблоян А. А., Саакян В. Г.* Решение смешанной задачи теории упругости для кругового кольца. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1967, т. 20, № 5.
4. *Баблоян А. А., Саакян В. Г.* Об одной плоской контактной задаче теории упругости для кругового кольца. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, т. 23, № 1.
5. *Баблоян А. А., Гулконян Н. О.* Плоская задача для кругового кольца с радиальными трещинами. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. 22, № 3.
6. *Баблоян А. А., Енгибарян А. А.* Контактная задача для прямоугольника при наличии сцепления. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 30, № 5.
7. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М., Изд. «Наука», 1975.
8. *Яу Вен-Фу.* Смешанная задача для упругого кольца. ПМ, 1968, т. 35, № 4.
9. *Rooke D. P., Tweed J.* The stress intensity factors of a radial crack in a point loaded disc. Intern. Journal, Eng. Sci., 1973, vol. 11, No. 2.
10. *Сапонджян О. М., Энфиаджян Р. А.* Круговой диск с радиальным разрезом под действием сосредоточенных сил. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. 29, № 5.
11. *Зартарян С. С., Энфиаджян Р. А.* Равномерно растянутая круглая пластинка с радиальными трещинами. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 2.
12. *Tweed J., Rooke D. P.* The stress intensity factor of an edge crack in a finite elastic disc. Intern. Journal Eng. Sci., 1973, vol. 11, No. 1.
13. *Gregory R. D.* A circular disc containing a radial edge crack opened by a constant internal pressure. Math. Proceedings, 1977, vol. 81, No. 3.
14. *Tweed J., Rooke D. P.* The distribution of stress near the top of a radial crack of the edge of a circular hole. Int. J. Eng., Sci., 1973, 11, No. 11.
15. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Уч. записки Казанского ун-та, 1962, т. 122, кн. 3.