ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 4, 1979 Механика

А. А. ЕНГИБАРЯН, А. М. МКРТЧЯН

НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ С ТРЕЩИНАМИ И СО ШТАМПАМИ

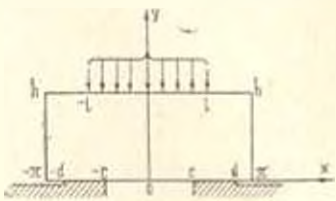
В настоящей работе рассматривается равновесие упругого прямоугольника, лежащего на двух жестких опорах, когда между материалом прямоугольника и опорами имеет место: а) кулоновское трение, б) жесткое сцепление, в) гладкий контакт. Последний случай трактуется как первая основная задача для прямоугольника, ослабленного тремя разрезами, расположенными вдоль линии симметрии. Вне зоны контакта по всему контуру прямоугольника заданы напряжения. В случаях а) и в) выявляются возможности отрыва от опор.

Задача решается при помощи бигармонической функции Эри [1] и решения сингулярных интегральных уравнений [2].

Контактные задачи для прямоугольной области рассматривались многими авторами [1—5]. В работах [6—11], [15—16] исследован вопрос зоны контакта. Задачам прямоугольника с разрезами посвящены статьи [12—13] и др.

1. Пусть упругий прямоугольник, занимающий область $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant h$, лежит на двух жестких опорах вдоль линии $y = 0$ по участкам $c \leqslant |x| \leqslant d$ (фиг. 1). В силу симметрии рассматриваем правую половину области при следующих граничных условиях:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y(x, h) = f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos kx \\
&\tau_{xy}(x, h) = 0 \qquad\qquad (0 < x < \pi) \\
&\sigma_x(\pi, y) = \tau_{xy}(\pi, y) = 0 \\
&u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = 0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant h)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$



Фиг. 1.

$$
\begin{aligned}
&\tau_{xy}(x, 0) = \sigma_y(x, 0) = 0 \qquad x \notin [c, d] \\
&v(x, 0) = g(x) \qquad\qquad x \in [c, d]
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \tau_{xy}(x, 0) = \rho\sigma(x, 0) \\
&\text{б)}\quad u(x, 0) = l(x) \qquad\qquad x \in [c, d] \\
&\text{в)}\quad \tau_{xy}(x, 0) = 0
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Условие (1.3а) является одним из возможных вариантов учета сложного физического процесса трения. Необходимо иметь в виду, что из-за симметрии деформаций при $c = 0$ (опоры сливаются) $\tau_{xy}(0, 0) = 0$, однако тогда $\sigma_0(0, 0) \neq 0$. Следовательно, при учете трения из условия (1.3а) необходимо исключить случай $c = 0$.

Представим решение первой основной задачи для прямоугольника в виде [1]

$$\Phi(x, y) = d_1 x^2 + d_2 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{ch} ky + B_k^{(1)} \operatorname{sh} ky + ky (C_k^{(1)} \operatorname{ch} ky +$$

$$+ D_k^{(1)} \operatorname{sh} ky)] \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k x + D_k^{(2)} \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x] \cos \beta_k y \tag{1.4}$$

$$\beta_k = \frac{k\pi}{h}$$

Введя неизвестные функции

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \sin kx = \begin{cases} 0 & x \overline{\in} [c, d] \\ Q(x) & x \in [c, d] \end{cases} \\ \sigma_y(x, 0) &= \frac{F_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos kx = \begin{cases} 0 & x \overline{\in} [c, d] \\ F(x) & x \in [c, d] \end{cases} \end{aligned} \tag{1.5}$$

и удовлетворяя граничным условиям (1.1), (1.2), с учетом (1.5) для коэффициентов разложения (1.4) получаем:

$$\begin{gathered} 4d_1 = f_0 - F_0, \quad d_2 = \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k Q_k}{k}, \quad k^2 C_k^{(1)} = Y_k \\ k^2 A_k^{(1)} = Y_k (1 + M_k^{(1)}) - X_k N_k - Q_k \operatorname{cth} kh \\ k^2 B_k^{(1)} = Q_k - Y_k, \qquad k^2 \operatorname{sh} kh D_k^{(1)} = X_k - Y_k \operatorname{ch} kh \\ k^2 A_k^{(2)} = -Z_k M_k^{(2)}, \qquad \beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k \pi D_k^{(2)} = Z_k \end{gathered} \tag{1.6}$$

где X_k, Y_k, Z_k определяются из бесконечных систем

$$\begin{aligned} X_k (1 + M_k^{(1)}) - Y_k N_k &= \frac{4k^2 (-1)^k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta_p Z_p}{(k^2 + \beta_p^2)^2} + f_k - \frac{Q_k}{\operatorname{sh} kh} \\ Y_k (1 + M_k^{(1)}) + X_k N_k &= -\frac{4k^2 (-1)^k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(k^2 + \beta_p^2)^2} - F_k + Q_k \operatorname{cth} kh \\ Z_k (1 + M_k^{(2)}) &= \frac{4\beta_k^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p}{(p^2 + \beta_k^2)^2} [(-1)^k X_p - Y_p] - \frac{2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p Q_p}{p^2 + \beta_k^2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$\begin{gathered} M_k^{(1)} \operatorname{sh}^2 kh = e^{-kh} \operatorname{sh} kh + kh, \quad M_k^{(2)} \operatorname{sh}^2 \beta_k \pi = e^{-\beta_k \pi} \operatorname{sh} \beta_k \pi + \beta_k \pi \\ N_k \operatorname{sh} kh = 1 + kh \operatorname{cth} kh \end{gathered} \tag{1.8}$$

Удовлетворяя условию $v(x, 0) = g(x)$, после некоторых преобразований с учетом (1.6) получаем

$$Ev_0 - \sum_{k=1}^{\infty} [2F_k - (1 - \nu) Q_k - 2R_k] \frac{\cos kx}{k} = Eg(x), \quad (c < x < d) \tag{1.9}$$

где

$$R_k = X_k N_k - Y_k M_k^{(1)} + \frac{Q_k e^{-kh}}{\operatorname{sh} kh} - \frac{4k^2(-1)^k}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\beta_\mu Z_\mu}{(\beta_\mu^2 + k^2)^2} \tag{1.10}$$

В случае наличия кулоновского трения (1.3а) из (1.9) с учетом (1.5) получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$-\rho (1 - \nu) \varphi (u) + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi (v)\, dv}{v - u} = C(u), \qquad (\alpha < u < \beta) \tag{1.11}$$

Здесь введены обозначения

$$u = \cos x, \quad v = \cos y, \quad \alpha = \cos d, \quad \beta = \cos c, \quad \varphi(u) = \frac{F(\arccos u)}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$C(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \left[Eg'(\arccos u) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R_k \sin (k \arccos u) \right] \tag{1.12}$$

Следуя [2], уравнение (1.11) представим в виде

$$\varphi (u) = -\rho (1 - \nu) C(u) - \frac{2Y(u)}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{C(v)\, dv}{Y(v)(v - u)} + PY(u) \tag{1.13}$$

то есть приведем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно неизвестной $\varphi(u)$.

Здесь

$$Y(u) = (\beta - u)^{\theta - 1} (u - \alpha)^{-\theta}, \quad \theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2}{\rho(1 - \nu)}$$

$$P = \frac{\sin \pi\theta}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi (u)\, du = \frac{F_0}{2} \sin \pi\theta \tag{1.14}$$

Из условия статического равновесия прямоугольника находим, что

$$P = \frac{f_0}{2} \sin \pi\theta \tag{1.15}$$

Решение уравнения (1.11), представленное в виде (1.13), сводится к бесконечной системе относительно F_k

$$F_k = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} R_p a_{pk} + \frac{f_0 \sin \pi\theta}{\pi} \psi_k + g_k \tag{1.16}$$

где

$$a_{pk} = \sum_{i=1}^{p-2i+1>0} (-1)^{i+1} \binom{p-i}{i-1} 2^{p-2i+1} \Bigg[2^{k-1} \int_{\alpha}^{\beta} \overline{N}_{p-2i+1}(u)\, u^{k}\, du +$$

$$+ k \sum_{l=1}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{(-1)^{l}}{l} \binom{k-l-1}{l-1} 2^{k-2l-1} \int_{\alpha}^{\beta} \overline{N}_{p-2i+1}(u)\, u^{k-2l}\, du \Bigg]$$

$$\overline{N}_k(u) = \frac{2Y(u)}{\sin \pi\theta} \Bigg[u^{k-1} + Du^{k} - \sum_{n=1}^{k} u^{n-1} d_{k-n} \Bigg]$$

$$d_m = 0.5\,\theta(1-\theta)\,\alpha^{m}(\beta-\alpha)^2 F\left(-m,\ 2-\theta,\ 3,\ -\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\right), \quad m > 0 \tag{1.17}$$

$$D = -\beta + \theta(\beta-\alpha); \quad \binom{p}{n} = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}; \quad \binom{p}{0} = 1$$

$$\Psi_k = 2^{k-1} M_k + k \sum_{i=1}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{(-1)^{i}}{i} \binom{k-i-1}{k-1} 2^{k-2i-1} M_{k-2i}$$

$$M_k \sin \pi\theta = \pi\alpha^{k} F\left(-k,\ 1-\theta,\ 1,\ -\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\right)$$

$$g_k = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} G(u) \cos(k \arccos u)\, du$$

$$G(u) = \rho(1-\nu) \frac{Eg'(\arccos u)}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{2Y(u)}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{Eg'(\arccos v)\, dv}{Y(v)(v-u)\sqrt{1-v^2}}$$

При получении (1.17) использованы значения интегралов [14]

$$\int_{a}^{b} \frac{(x-a)^{\nu-1}(b-x)^{\mu-1}}{x-c}\, dx = \pi(c-a)^{\nu-1}(b-c)^{\mu-1} \operatorname{ctg} \mu\pi -$$

$$-(b-a)^{\mu+\nu-2} B(\mu-1,\ \nu) F\left(2-\nu-\mu,\ 1,\ 2-\mu,\ \frac{b-c}{b-a}\right), \quad (a < c < b)$$

$$\int_{0}^{u} x^{\nu-1}(x+\alpha)^{\lambda}(u-x)^{\mu-1}\, dx = \alpha^{\lambda} u^{\mu+\nu-1} B(\mu,\nu) F\left(-\lambda,\ \nu,\ \mu+\nu,\ -\frac{u}{\alpha}\right)$$

Присоединяя к бесконечным системам (1.7), (1.16) уравнения

$$\frac{Q_k}{\rho} = \frac{F_0}{\pi k}\left[1-(-1)^{k}\right] + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} F_p \frac{p\left[1-(-1)^{p+k}\right]}{p^2-k^2}$$

получаем полную, замкнутую систему для определения неизвестных

$$X_k,\ Y_k,\ Z_k,\ F_k,\ Q_k$$

Формулу для напряжений можно привести к виду с явно выделенной особенностью

$$\sigma(u)=\frac{\sigma_1(u)}{(\beta-u)^{1-\theta}(u-\alpha)^{\theta}} \tag{1.18}$$

где

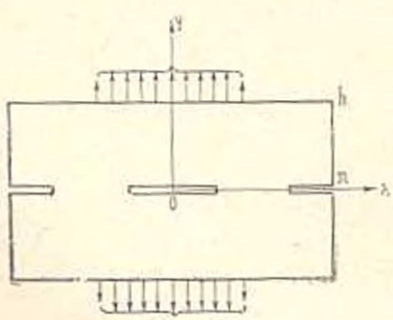
$$\sigma_1(u)=P-\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{C(v)-C(u)}{Y(v)(v-u)}\,dv-\frac{2C(u)}{\sin\pi\theta}\left[\beta-u-\theta(\beta-\alpha)\right] \tag{1.19}$$

Случай контакта без трения получается из вышеприведенного решения подстановкой $\rho=0$. Одновременно, если подставить $g(x)=0$, то получим решение задачи о растяжении прямоугольника с размерами $(2\pi,\ 2h)$, ослабленного одним внутренним и двумя наружными разрезами, расположенными симметрично на одной из осей прямоугольника (фиг. 2).

2. В случае, когда между опорами и прямоугольником имеет место полное сцепление, то есть выполняется условие (1.3б), задача сводится к определению комплексного контактного напряжения $P(u)=q(u)+i\tau(u)$ из сингулярного интегрального уравнения, которое имеет вид

$$(1-\nu)P(u)+\frac{2}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{P(v)\,dv}{v-u}=T(u)-iC(u),\quad(\alpha<u<\beta) \tag{2.1}$$

где



Фиг. 2.

$$\psi(u)=\frac{Q(\arccos u)}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$T(u)=\frac{T_1(\arccos u)}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$T_1(x)=Z'(x)-$$

$$-\frac{(1-\nu)F_0}{2}-Et'(x)$$

$$Z'(x)=2(d_2-\nu d_1)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[X_k\left(\frac{1}{\operatorname{sh}kh}-2N_k\right)+2Y_k\left(M_k^{(1)}-\frac{e^{-kh}}{\operatorname{sh}kh}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu Q_k e^{-kh}}{\operatorname{sh}kh}+\frac{4(1-\nu)k^2(-1)^k}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2+k^2)^2}\right]\cos kx- \tag{2.2}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_k}{\operatorname{sh}\beta_k\pi}\left[\beta_k(1+\nu)(x\operatorname{sh}\beta_k x-\pi\operatorname{cth}\beta_k\pi\operatorname{ch}\beta_k x)-(1-\nu)\operatorname{ch}\beta_k x\right]$$

Решение уравнения (2.1), подобно п. 1, представляется в виде [2]

$$P(u) = (1-\nu)\left[T(u) - iC(u)\right] -$$

$$- \frac{2Z(u)}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\left[T(v) - iC(v)\right] dv}{Z(v)(v-u)} + 2AZ(u) \tag{2.3}$$

где

$$Z(v) = (\beta - v)^{-1/2 - i\gamma} (v - \alpha)^{-1/2 + i\gamma}, \qquad \gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\nu}{3-\nu}$$

$$A = \frac{\operatorname{ch} \pi\gamma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} P(u)\, du \tag{2.4}$$

Решение (2.3), аналогично п. 1, сводится к бесконечным системам относительно F_k и Q_k. Из (2.2) видно, что при $c < x < d < \pi$ коэффициенты бесконечных систем имеют экспоненциальный порядок убывания, следовательно, системы будут квазивполне регулярны [5].

Отметим, что регулярность систем нарушается при $d = \pi$, так как меняется характер особенностей напряжений.

В случае $c = 0$, $\rho = 0$, $g(x) = 0$ получается решение задачи контакта двух одинаковых прямоугольников, ранее рассмотренной в работе [10].

В случае $d = \pi$, $\rho = 0$ получается решение задачи растяжения прямоугольника с внутренним симметричным разрезом, приведенное в работе [13].

В табл. 1—3 приведены результаты вычислений: значения коэффициентов особенностей напряжения η в зависимости от длины зоны контакта при некоторых соотношениях геометрических и физических параметров прямоугольника, причем зависимость коэффициента особенности от высоты прямоугольника при постоянном коэффициенте трения и площадки приложения распределенной нагрузки приведено в табл. 1.

Таблица 1

$\nu = 0.3$, $\rho = 0.5$, $c = 0.5\pi$, $l = \pi$

h	η \ d	0.5π	0.53125π	0.5625π	0.59375π	0.6250π
0.5π	$\eta(\alpha)$	0.98298	0.97176	0.94199	0.8[illegible]32	0.8621
	$\eta(\beta)$	0.97027	0.98632	1.07931	1.15343	1.17431
π	$\eta(\alpha)$	0.98249	0.96783	0.92942	0.86712	0.84619
	$\eta(\beta)$	0.96761	0.99282	1.11739	1.25193	1.40824

В табл. 2 показана зависимость коэффициента особенности от коэффициента трения, а в табл. 3 — от площадки приложения внешней нагрузки при отсутствии трения.

Таблица 2

$\nu = 0.3,\ h = \pi,\ c = 0.5\pi,\ l = \pi/16$

μ	$\eta \diagdown d$	0.5π	0.53125π	0.5625π	0.59375π	0.6250π
0	$\eta(\alpha)$	0.05986	0.04242	−0.00293	−0.077316	−0.16787
	$\eta(\beta)$	0.42049	0.55662	0.67913	0.76174	0.84471
0.1	$\eta(\alpha)$	0.05858	0.04131	−0.00364	−0.07703	−0.15912
	$\eta(\beta)$	0.41913	0.54840	0.66591	0.74262	0.83163
0.2	$\eta(\alpha)$	0.058497	0.041392	−0.003177	−0.075657	−0.14297
	$\eta(\beta)$	0.41661	0.54792	0.64726	0.73974	0.82893

Таблица 3

$\nu = 0.3,\ \mu = 0,\ h = 0.5\pi,\ c = 0.5\pi$

l	$\eta \diagdown d$	0.5π	0.53125π	0.5625π	0.59375π	0.6250π
$\pi/4$	$\eta(\alpha)$	0.24791	0.23402	0.19748	0.13727	−0.0785
	$\eta(\beta)$	0.25692	0.28918	0.40638	0.53617	0.81946
π	$\eta(\alpha)$	0.97279	0.95989	0.93730	0.88727	0.82398
	$\eta(\beta)$	0.98279	0.99318	1.079155	1.178278	1.428629

Институт механики
АН Армянской ССР
Ереванский зооветеринарный
институт

Поступила 25 X 1978

Ս. Ա. ԽԱԴԻԲԱՐՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՃԵՂՔԵՐՈՎ ԵՎ ԴՐՈՇՄՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐԹ ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու կոշտ հիմքերի վրա դրված առաձգական ուղղանկյան հավասարակշռության խնդիրը։ Դիտարկված է ուղղանկյան և հենարանների կոնտակտի երեք դեպքեր՝ 1) հենարանների վրա ուղղանկյունը կարող է սահել և շփման համար ընդունվում է Կուլոնի օրենքը։ 2) Ուղղանկյունը ամրակցված է հենարաններին այնպես, որ կոնտակտի մակերևույթի վրա բացակայում են տեղափոխությունները։ 3) Ողորկ կոնտակտ։ Վերջին դեպքը համապատասխանում է սիմետրիայի գծի վրա դասավորված երեք կտրվածքներով թուլացված ուղղանկյան համար առաջին եզրային խնդրին։

Խնդիրը լուծված է բիհարմոնիկ ֆունկցիայի միջոցով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծումների օգնությամբ։

Դիտարկված է թվային օրինակ։

THE PLANE PROBLEM OF A RECTANGLE WITH CUTS RESTING ON TWO RIGID SUPPORTS

A. A. ENGIBARIAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The plane problem on equilibrium of a rectangle, resting on two rigid supports, is considered. Three cases of contact between the rectangle and the support are discussed: 1) Coulombian friction, 2) rigid contact, 3) frictionless contact. The latter case is interpreted as a major problem for the rectangle with three cuts along the line of symmetry. The problem is solved dy biharmonic function and through solutions of singular integral equations.

A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ. 1957, т. 21, вып. 1.
2. *Гахов Ф. Ф.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
3. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения задач теории упругости для полосы, полуплоскости и плоскости, ослабленных периодической системой щелей. Изв. ВНИИГ, 1975, т. 107, 14—23.
4. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца. Изв. АН СССР, МТТ. 1976, № 3.
5. *Баблоян А. А., Енгибарян А. А.* Контактная задача для прямоугольника при наличии сцепления. Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. XXX, № 3.
6. *Вейцман У. А.* О контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством. ПМ, 1969, № 2, Изд. «Мир».
7. *Пу С. Л., Хусейн М. А.* К вопросу о контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством. ПМ, 1970, № 3, Изд. «Мир».
8. *Абрамян Б. Л., Макарян В. С.* Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями с учетом трения между слоями. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 5.
9. *Баблоян А. А., Мелконян М. Г.* О контакте двух прямоугольников без сцепления с определением области контакта. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 5.
10. *Мелконян М. Г., Мкртчян А. М.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 3.
11. *Дробязко В. В., Никитенко В. Н., Улитко А. Ф.* Периодическая контактная задача с трением на упругой полосе. Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, т. 31, № 1.
12. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев, «Наукова Думка», 1978.
13. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Решение плоской смешанной задачи для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. 25, № 2
14. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Изд. физ.-мат. литературы, 1962.
15. *Erdogan F., Ratwani M.* The contact problem for an elastic layer supported by two elastic quarter planes. J. Appl. mech., 1974, vol. 41, ser. E, No. 3, 673—678.
16. *Ratwani M., Erdogan F.* On the plane contact problem for a Frictionless elastic layer. Intern. Journal J. Solids and Structures, 1973, vol. 9, 921—936,