

А. А. АРУТЮНЯН

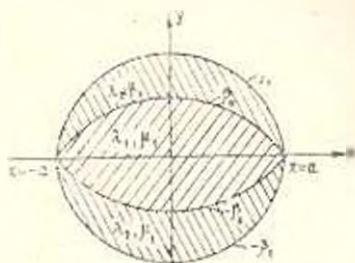
ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ЛУНОЧКИ

В работах [1—4] методом Фурье в биполярной координатной системе получено решение первой основной задачи теории упругости однородного и составного тела для луночной области.

В настоящей работе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье рассмотрена плоская задача теории упругости для нагруженного тела, составленного из трех соединенных между собой по боковым поверхностям призматических тел, сечения которых ограничены дугами пересекающихся окружностей.

В биполярной координатной системе первый материал с коэффициентами Ляме λ_1 и μ_1 занимает область $(-\beta_0 < \beta < \beta_0)$, второй с коэффициентами Ляме λ_2 и μ_2 — области $(\beta_0 < \beta < \beta_1)$ и $(-\beta_1 < \beta < -\beta_0)$, причем координата α внутри рассматриваемой области изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ (фиг. 1).

Между материалами вдоль линии $\beta = \pm \beta_0$ осуществляется полное сцепление. Составное тело нагружается по краям $\beta = \pm \beta_1$. Предполагаем, что эти нагружения одинаковые. При этом и силу симметрии можно рассматривать половину рассматриваемой области.



Фиг. 1.

Задача решается при помощи функции напряжений $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1, 2$), каждая из которых удовлетворяет бигармоническому уравнению [1]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) (g \Phi_k) \quad (k=1, 2) \quad (1.1)$$

где $g = (\cosh \alpha + \cos \beta)/\pi$ характеризует масштаб преобразования, a — параметр биполярных координат.

Удобно представить бигармоническую функцию $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1, 2$) интегралом Фурье такого вида:

$$g \Phi_k(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, \beta) e^{-at} dt \quad (k=1, 2) \quad (1.2)$$

где

$$f_1(t, \beta) = A_1(t) \operatorname{ch} t (\beta_0 - \beta) \cos \beta + B_1(t) \operatorname{ch} t \beta \cos (\beta_0 - \beta) + \\ + C_1(t) \operatorname{sh} t (\beta_0 - \beta) \sin \beta + D_1(t) \operatorname{sh} t \beta \sin (\beta_0 - \beta) \quad (1.3)$$

$$f_2(t, \beta) = A_2(t) \operatorname{ch} t (\beta_1 - \beta) \cos (\beta - \beta_0) + B_2(t) \operatorname{ch} t (\beta - \beta_0) \cos (\beta_1 - \beta) + \\ + C_2(t) \operatorname{sh} t (\beta_1 - \beta) \sin (\beta - \beta_0) + D_2(t) \operatorname{sh} t (\beta - \beta_0) \sin (\beta_1 - \beta)$$

Неизвестные функции интегрирования $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$ и $D_k(t)$ определяются из следующих граничных условий:

$$v_1(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = 0; \quad \varphi_{\alpha\beta}^{(1)}(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = 0$$

$$g\Phi_2(\alpha, \beta)|_{\beta=\beta_1} = \varphi_1(\alpha), \quad \frac{\partial(g\Phi_2(\alpha, \beta))}{\partial\beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = \varphi_2(\alpha) \quad (1.4)$$

$$g\Phi_1(\alpha, \beta)|_{\beta=\beta_1} = g\Phi_2(\alpha, \beta)|_{\beta=\beta_1}; \quad \frac{\partial(g\Phi_1(\alpha, \beta))}{\partial\alpha} \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{\partial(g\Phi_2(\alpha, \beta))}{\partial\alpha} \Big|_{\beta=\beta_1}$$

$$u_1(\alpha, \beta)|_{\beta=\beta_2} = u_2(\alpha, \beta)|_{\beta=\beta_2}; \quad v_1(\alpha, \beta)|_{\beta=\beta_2} = v_2(\alpha, \beta)|_{\beta=\beta_2}$$

где функции $\varphi_k(\alpha)$ ($k=1, 2$) легко выражаются через заданные граничные значения $\Phi_k(\alpha, \beta)$ и $\partial\Phi_k(\alpha, \beta)/\partial\beta$. Предполагается, что $\varphi_k(\alpha)$ ($k=1, 2$) удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

Перемещения $u_k(\alpha, \beta)$ и $v_k(\alpha, \beta)$ ($k=1, 2$) выражаются через $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1, 2$)

$$u_k(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\nu_k} \left(\frac{\nu_k}{\nu_k + \mu_k} \frac{\partial\Phi_k(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Psi_k(\alpha, \beta)}{\partial\beta} \right) \quad (1.5)$$

$$v_k(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_k} \left(\frac{\nu_k}{\nu_k + \mu_k} \frac{\partial\Phi_k(\alpha, \beta)}{\partial\beta} + \frac{\partial\Psi_k(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} \right) \quad (k=1, 2)$$

где $\Psi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1, 2$) — бигармоническая функция, связанная с $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1, 2$) формулой

$$g\Psi_k(\alpha, \beta) = \frac{\nu_k + 2\mu_k}{2(\nu_k + \mu_k)} \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1 \right) (g\Phi_k) d\alpha d\beta \quad (k=1, 2) \quad (1.6)$$

Подставляя (1.2) в (1.6) и учитывая (1.3), для бигармонической функции $g\Psi_k(\alpha, \beta)$ получаем следующие выражения:

$$g\Psi_k(\alpha, \beta) = \frac{i(\nu_k + 2\mu_k)}{1 - 2i(\nu_k + \mu_k)} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(t, \beta) e^{-i\alpha t} dt \quad (k=1, 2) \quad (1.7)$$

где

$$G_k(t, \beta) = A_k(t) \operatorname{sh} t (\beta_0 - \beta) \cos \beta - B_k(t) \operatorname{sh} t \beta \cos (\beta_0 - \beta) + \\ + C_k(t) \operatorname{ch} t (\beta_0 - \beta) \sin \beta - D_k(t) \operatorname{ch} t \beta \sin (\beta_0 - \beta) \quad (1.8)$$

$$G_2(t, \beta) = A_2(t) \operatorname{sh} t(\beta_1 - \beta) \cos(\beta - \beta_0) - B_2(t) \operatorname{sh} t(\beta - \beta_0) \cos(\beta_1 - \beta) + \\ + C_2(t) \operatorname{ch} t(\beta_1 - \beta) \sin(\beta - \beta_0) - D_2(t) \operatorname{ch} t(\beta - \beta_0) \sin(\beta_1 - \beta)$$

Из первых шести граничных условий (1.4) для неизвестных функций интегрирования $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$ и $D_k(t)$ ($k = 1, 2$) получаем следующие выражения через неизвестные функции $P_k(t)$ ($k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} A_1(t) &= P_1(t) \frac{2t \sin \gamma_1}{\Delta_1(t)} - P_2(t) \frac{\operatorname{sh} 2t\gamma_1 \sin \gamma_1}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)} \\ B_1(t) &= P_1(t) \frac{2 \operatorname{sh} t\gamma_1}{\Delta_1(t)} + P_2(t) \frac{\operatorname{sh} t\gamma_1 \sin 2\gamma_1}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)} \\ C_1(t) &= -P_1(t) \frac{2 \sin \gamma_1}{\Delta_1(t)} - P_2(t) \frac{\sin 2\gamma_1 \sin \gamma_1}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)} \\ D_1(t) &= P_1(t) \frac{2t \operatorname{sh} t\gamma_1}{\Delta_1(t)} - P_2(t) \frac{\operatorname{sh} 2t\gamma_1 \operatorname{sh} t\gamma_1}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)} \\ A_2(t) &= F_1(t) \frac{\operatorname{ch} t\gamma_2}{\Delta_4(t)} - \bar{\varphi}_1(t) \frac{\cos \gamma_2}{\Delta_4(t)} \\ B_2(t) &= -P_1(t) \frac{\cos \gamma_2}{\Delta_4(t)} + \bar{\varphi}_1(t) \frac{\operatorname{ch} t\gamma_2}{\Delta_4(t)} \\ C_2(t) &= P_1(t) \left(\frac{t \operatorname{ch} t\gamma_2}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} t\gamma_2 \sin 2\gamma_2}{2\Delta_2(t) \Delta_4(t)} \right) + \\ &+ P_2(t) \frac{\operatorname{sh} t\gamma_2}{\Delta_2(t)} - \bar{\varphi}_1(t) \left(\frac{t \cos \gamma_2}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} 2t\gamma_2 \sin \gamma_2}{2\Delta_2(t) \Delta_4(t)} \right) + \\ &+ \bar{\varphi}_2(t) \frac{t \sin \gamma_2}{\Delta_2(t)} \\ D_2(t) &= -P_2(t) \left(\frac{t \cos \gamma_2}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} 2t\gamma_2 \sin 2\gamma_2}{2\Delta_2(t) \Delta_4(t)} \right) - \\ &- P_1(t) \frac{t \sin \gamma_2}{\Delta_2(t)} + \bar{\varphi}_1(t) \left(\frac{t \operatorname{ch} t\gamma_2}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} t\gamma_2 \sin 2\gamma_2}{2\Delta_2(t) \Delta_4(t)} \right) - \\ &- \bar{\varphi}_2(t) \frac{\operatorname{sh} t\gamma_2}{\Delta_2(t)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\bar{\varphi}_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha \quad (k = 1, 2)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \operatorname{sh} 2t\gamma_1 + t \sin 2\gamma_1; & \Delta_2(t) &= \operatorname{sh}^2 t\gamma_2 - t^2 \sin^2 \gamma_2 \\ \Delta_3(t) &= \operatorname{sh}^2 t\gamma_1 + \sin^2 \gamma_1; & \Delta_4(t) &= \operatorname{sh}^2 t\gamma_2 + \sin^2 \gamma_2 \\ \gamma_1 &= \beta_1 - \beta_0; & \gamma_2 &= \beta_1 - \beta_0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

При удовлетворении последних двух условий (1.4) — условий равенства перемещений — получаем следующую характеристическую систему сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций:

$$\begin{aligned} M_1(t) X_1(t) + M_2(t) X_2(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(z) X_1(z)}{\eta(z) - \eta(t)} dz = N_1(t) \\ M_2(-t) X_1(t) + M_3(-t) X_2(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(z) X_2(z)}{\eta(z) - \eta(t)} dz = N_2(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} e^{-i(\gamma_0 + \pi)} X_1 &= \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 + a_{21} \right) P_1 + a_{22} P_2 + a_{23} \bar{\varphi}_1 + a_{24} \bar{\varphi}_2 \\ e^{i(\gamma_0 + \pi)} X_2 &= \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 - a_{21} \right) P_1 - a_{22} P_2 - a_{23} \bar{\varphi}_1 + a_{24} \bar{\varphi}_2 \\ M_1(t) &= \frac{1}{(h_1 + 2h_2 - 2)a_{22}} \left(a_{11}a_{22} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 + a_{12} \right) \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 - a_{21} \right) \right) - t \\ e^{-2i\gamma_0} M_2(t) &= \frac{1}{(h_1 + 2h_2 - 2)a_{22}} \left(a_{31}a_{22} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 + a_{12} \right) \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 + a_{21} \right) \right) \\ e^{-i(\gamma_0 - \pi)} N_1(t) &= M_3(t) \bar{\varphi}_1 + M_1(t) \bar{\varphi}_2 \\ e^{i(\gamma_0 + \pi)} N_2(t) &= M_4(-t) \bar{\varphi}_1 + M_2(-t) \bar{\varphi}_2 \\ M_3(t) &= a_{33} - \frac{a_{22}}{a_{22}} \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 + a_{12} \right) \\ M_4(t) &= a_{14} - \frac{a_{22}}{a_{22}} \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 + a_{12} \right) \\ a_{11} &= \frac{h_2}{\Delta_1} (t^2 + 1) \sin 2\gamma_1 + \frac{1}{\Delta_2} (t^2 + 1) t \sin^2 \gamma_2 \\ a_{12} &= \frac{h_2}{\Delta_1} (\operatorname{ch} 2\gamma_1 + \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{2\Delta_2} (\operatorname{sh} 2\gamma_2 - t \sin 2\gamma_2) \\ a_{13} &= -\frac{1}{\Delta_1} (t^2 + 1) \operatorname{sh} t\gamma_2 \sin \gamma_2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$a_{14} = \frac{1}{\Delta_2} (t \operatorname{ch} t\gamma_2 \sin \gamma_2 - \operatorname{sh} t\gamma_2 \cos \gamma_2) \quad (1.13)$$

$$a_{22} = \frac{h_2}{\Delta_1} (\operatorname{ch} 2t\gamma_1 - \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{2\Delta_2} (\operatorname{sh} 2t\gamma_2 + t \sin 2\gamma_2)$$

$$a_{20} = \frac{h_2}{\Delta_1} \sin 2\gamma_1 + \frac{t}{\Delta_2} \sin^2 \gamma_2$$

$$a_{23} = -\frac{1}{\Delta_2} (t \operatorname{ch} t\gamma_2 \sin \gamma_2 + \operatorname{sh} t\gamma_2 \cos \gamma_2)$$

$$a_{24} = \frac{1}{\Delta_2} \operatorname{sh} t\gamma_2 \sin \gamma_2$$

$$G(t) = e^{2it}$$

$$h_1 = \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}, \quad h_2 = \frac{\mu(1-\nu_1)}{1-\nu_2} \quad (1.14)$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{\mu_1}, \quad \nu_1 \text{ и } \nu_2 - \text{коэффициенты Пуассона.}$$

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) в общем случае производится путем регуляризации, то есть приведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [4—8]. Этот процесс более подробно приведен в работе [4].

После преобразований и упрощений получаем следующую регулярную систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно $P_k(t)$ ($k = 1, 2$):

$$P_1(t) = \frac{\Delta_1(t) \Delta_2(t)}{(t^2 + 1) \Delta(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (H_{11}(t, \tau) P_1(\tau) + H_{12}(t, \tau) P_2(\tau)) d\tau + W_1(t) \right) \quad (1.15)$$

$$P_2(t) = \frac{\Delta_1(t) \Delta_2(t)}{(t^2 + 1) \Delta(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (H_{21}(t, \tau) P_1(\tau) + H_{22}(t, \tau) P_2(\tau)) d\tau + W_2(t) \right)$$

где

$$\begin{aligned} H_{11}(t, \tau) = & \frac{\operatorname{sh}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) (t-\tau)(a_{21}(\tau) - a_{12}(t)) - \right. \\ & \left. - a_{12}(t) a_{11}(\tau) - (t^2 + 1) a_{22}(t) a_{21}(\tau) \right) + \\ & + \frac{\operatorname{ch}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) ((t^2 + 1) a_{22}(t) - a_{11}(\tau)) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (t - \tau) (a_{12}(t) a_{21}(\tau) - \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right)^2) \\
H_{12}(t, \tau) = & \frac{\operatorname{sh}(t - \tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t - \tau) \pi} \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right)^2 + \right. \\
& + \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) (t - \tau) a_{21}(\tau) - a_{12}(t) a_{12}(\tau) - (t^2 + 1) a_{22}(t) a_{22}(\tau) \Big) + \\
& + \frac{\operatorname{ch}(t - \tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t - \tau) \pi} \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) (a_{12}(t) - a_{12}(\tau)) + (t - \tau) a_{12}(t) a_{22}(\tau) \right) \\
H_{21}(t, \tau) = & \frac{\operatorname{sh}(t - \tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t - \tau) \pi} \left(a_{11}(t) \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 + a_{11}(\tau) \right) - \right. \\
& - (t^2 + 1) \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right)^2 - a_{21}(\tau) \right) \Big) + \\
& + \frac{\operatorname{ch}(t - \tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t - \tau) \pi} \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) (t^2 + 1) (a_{21}(\tau) - a_{21}(t)) - \right. \\
& - (t - \tau) a_{11}(t) a_{21}(\tau) \Big) \\
H_{22}(t, \tau) = & \frac{\operatorname{sh}(t - \tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t - \tau) \pi} (a_{11}(t) a_{12}(\tau) - (t^2 + 1) a_{21}(t) a_{22}(\tau)) + \\
& + \frac{\operatorname{ch}(t - \tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t - \tau) \pi} \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) ((t^2 + 1) a_{22}(\tau) - a_{11}(t)) - \right. \\
& - (t - \tau) a_{11}(t) a_{22}(\tau) \Big)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
W_1(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh}(t - \tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t - \tau) \pi} \left(\left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) (t - \tau) - \right. \right. \right. \\
& - (t^2 + 1) a_{22}(t) \Big) (a_{23}(\tau) \bar{p}_1(\tau) + a_{24}(\tau) \bar{p}_2(\tau)) - \\
& - a_{12}(t) (a_{13}(\tau) \bar{p}_1(\tau) + a_{11}(\tau) \bar{p}_2(\tau)) \Big) + \\
& + \frac{\operatorname{ch}(t - \tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t - \tau) \pi} \left((t - \tau) a_{12}(t) (a_{23}(\tau) \bar{p}_1(\tau) - a_{24}(\tau) \bar{p}_2(\tau)) - \right. \\
& - \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) (a_{13}(\tau) \bar{p}_1(\tau) + a_{11}(\tau) \bar{p}_2(\tau)) \Big) \Big) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) (t^2 + 1) - t a_{11}(t) \right) (a_{23}(t) \bar{\varphi}_1(t) + a_{24}(t) \bar{\varphi}_2(t)) + \\
& + t a_{21}(t) (a_{13}(t) \bar{\varphi}_1(t) + a_{14}(t) \bar{\varphi}_2(t)) \\
W_2(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh}(t-\tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau) \pi} \left(- (t^2 + 1) a_{11}(\tau) (a_{23}(\tau) \bar{\varphi}_1(\tau) + a_{24}(\tau) \bar{\varphi}_2(\tau)) + \right. \right. \\
& + a_{11}(\tau) (a_{13}(\tau) \bar{\varphi}_1(\tau) + a_{14}(\tau) \bar{\varphi}_2(\tau)) \Big) + \\
& + \frac{\operatorname{ch}(t-\tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau) \pi} \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) (t^2 + 1) - \right. \\
& - (t-\tau) a_{11}(\tau) (a_{23}(\tau) \bar{\varphi}_1(\tau) + a_{24}(\tau) \bar{\varphi}_2(\tau)) \Big) d\tau + \\
& + \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) (t^2 + 1) (a_{13}(t) \bar{\varphi}_1(t) + a_{14}(t) \bar{\varphi}_2(t)) + \\
& + (t^2 + 1) \left((t a_{21}(t) - a_{11}(t)) + \right. \\
& + 2t \left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) \Big) (a_{23}(t) \bar{\varphi}_1(t) + a_{24}(t) \bar{\varphi}_2(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(t) = & h_2 (\operatorname{sh} 2t(\gamma_1 + \gamma_2) + t \sin 2(\gamma_1 + \gamma_2)) - h_1 h_2 (\operatorname{sh}^2 t \gamma_2 - t^2 \sin^2 \gamma_2) \operatorname{sh} 2t \gamma_1 - \\
& - (\operatorname{sh} 2t \gamma_1 + t \sin 2 \gamma_1) \left(\frac{h_1^2}{4} (\operatorname{sh}^2 t \gamma_2 - t^2 \sin^2 \gamma_2) - h_1 (\operatorname{sh}^2 t \gamma_2 + h_2 - 1) \right) \quad (1.17)
\end{aligned}$$

2. Рассмотрим поведение напряжений в окрестности края поверхности контакта.

Приведем формулы для напряжений, выраженных через функцию напряжений [2]

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha}^{(k)} = & \left((\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right) (g \Phi_k) \\
\sigma_{\beta}^{(k)} = & \left((\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \cos \beta \right) (g \Phi_k) \quad (2.1) \\
\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = & - (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2 (g \Phi_k)}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (k = 1, 2)
\end{aligned}$$

Учитывая найденные значения для контактных напряжений, из (2.1) имеем

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}|_{t=t_0} = (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0) \frac{i}{1/2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \Delta_k(t) \Delta_k(t)}{(t^2 + 1) \Delta(t)} P_2^*(t) e^{-it\alpha} dt \quad (2.2)$$

$$\sigma_{31}^{(1)}|_{z=0} = \frac{1}{1-2\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_1(t) \Delta_2(t)}{(t^2-1)\Delta(t)} ((-t^2(\operatorname{ch} 2 + \cos \beta_0) + i t \operatorname{sh} \alpha - \\ - \cos \beta_0) P_1(t) - \sin \beta_0 P_2(t)) e^{-it\alpha} dt$$

где

$$P_1^*(t) = \frac{(t^2+1)\Delta(t)}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)} P_1(t); \quad P_2^*(t) = \frac{(t^2-1)\Delta(t)}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)} P_2(t) \quad (2.3)$$

В общем случае любое из трех напряжений (3.1) выражается несобственными интегралами вида

$$\tau(y, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(y, x, t)}{\Delta(t)} \frac{(a-x)^{-1-it}}{(a-x)^{1-it}} dt \quad (2.4)$$

которые можно находить приближенно с помощью различных численных методов после определения $\tau(y, x, t)$.

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта $x = \pm a$ (то есть $\alpha = \pm \infty$) интеграл (2.4) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при $x < 0$ или $\alpha < 0$) или нижней (при $x > 0$ или $\alpha > 0$) полуокружности радиуса $R \rightarrow \infty$ с центром и началом координат.



Фиг. 2.

При увеличении радиуса полуокружности (фиг. 2) последовательность может быть подобрана так, чтобы интеграл (2.4) по полуокружности L_m стремился к нулю при $m \rightarrow \infty$.

Применяя теорему о вычетах, представим (2.4) в виде бесконечного ряда

$$\tau(y, x) = 2\pi i \left(\frac{\tau(y, x, t_1)}{\Delta^*(t_1)} \frac{(a+x)^{-1-it_1}}{(a-x)^{1-it_1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{выч} (f(y, x, t_k), t_k) \right) \quad (2.5)$$

Здесь $f(x, t)$ — подынтегральная функция (2.4), а $t_k = \xi_k - i\eta_k$ — корни уравнения

$$\Delta(t) = 0 \quad (2.6)$$

которые расположены в порядке возрастания положительных значений η_k .

Трансцендентное уравнение (2.6) зависит от четырех параметров — γ_1 , γ_2 и комбинации характеристик упругих материалов μ_1 и μ_2 .

Очевидно, характер напряженного состояния около края $x=a$ ($\alpha = \infty$) определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1 = \xi_1 - i\eta_1$ уравнения (2.6): если $\eta_1 > 1$, имеем нулевое напряженное состояние, если

$\eta_1 < 1$, имеет место явление сильной концентрации напряжений. В случае же $\eta_1 = 1$ напряжения на краях поверхности контакта конечны и в общем случае отличны от нуля. В табл. 1 приведены значения η_1 при $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$, $\gamma_1 = 0.2$ и $\gamma_2 = 0.3$.

Таблица 1

$\gamma_1 \backslash \gamma_2$	7.5°	15°	22.5°	30°	37.5°	45°	52.5°
0.0625	0.8062	0.8264	0.8784	0.9542	1.0580	1.2010	1.4047
0.125	0.8433	0.8453	0.8860	0.9527	1.0469	1.1771	1.3596
0.25	0.8905	0.8751	0.8992	0.9498	1.0257	1.1307	1.2700
0.5	0.9391	0.9155	0.9194	0.9444	0.9879	1.0475	1.1178
1	0.9798	0.9615	0.9462	0.9343	0.9264	0.9230	0.9243
2	1.0105	1.0097	0.9779	0.9139	0.8414	0.7796	0.7363
4	1.0391	1.5033	2.9770	0.8621	0.8691	0.6461	0.5823
8	8.3498	4.2264	2.8333	0.7316	0.7062	0.5307	0.4653
16	8.0267	4.0727	2.7568	0.5561	0.5619	0.4269	0.3746
32	7.8554	3.9914	2.4561	0.4048	0.4277	0.3311	0.2981
64	7.7685	3.3794	2.3237	0.2900	0.3149	0.2476	0.2303

Из уравнения (2.6) можно найти границу раздела областей конечных и бесконечных напряжений на краю поверхности контакта. Подобными вопросами занимались в работах [9, 10].

Упомянутую выше границу можно представить зависимостью

$$h_2 \sin 2(\gamma_1 + \gamma_2) - (h_1^2 \sin^2 \gamma_2 + h_2 - 1) \sin 2\gamma_1 = 0 \quad (2.7)$$

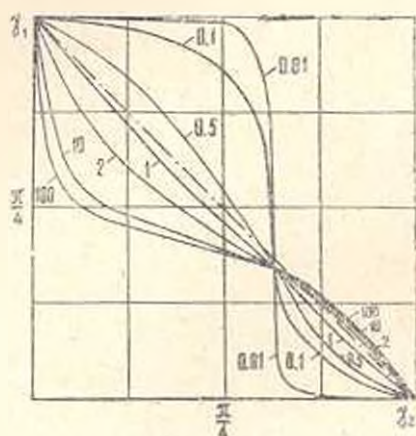
На плоскости геометрических параметров приведены границы раздела областей конечных и бесконечных напряжений на краю поверхности контакта при 1) $\gamma_1 = 0.2$, $\gamma_2 = 0.3$ (фиг. 3), 2) $\gamma_1 = 0.3$, $\gamma_2 = 0.3$ (фиг. 4) и 3) $\gamma_1 = 0.3$, $\gamma_2 = 0.2$ (фиг. 5). Цифрами указаны значения μ .

Область конечных напряжений на краю поверхности контакта лежит по одну сторону с началом координат от ближайшей к нему кривой, определяемой уравнением (2.7). При $\gamma_1 = \gamma_2$, $\mu = 1$ она обращается в прямую $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$, что совпадает с результатами для однородного материала, для которого концентрация напряжений отсутствует, если угол не больше развернутого.

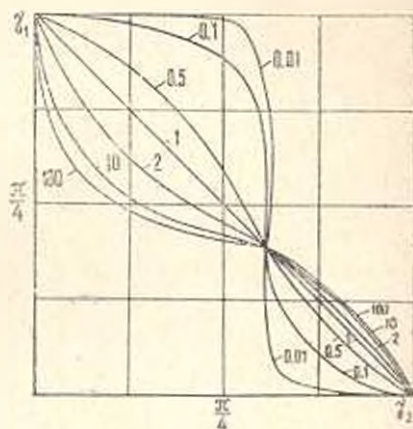
Анализ уравнения (2.7) показывает, что кривые, соответствующие различным значениям μ , пересекаются в одной точке с координатами

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \arccos(0.5 - \gamma_2) \sqrt{\frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2}} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2} \arccos(2\gamma_2 - 1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Кривые, соответствующие различным значениям ν_1 и ν_2 , не пересекаются в одной точке.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Найдем координаты точек пересечения кривых с прямой $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$. Эти точки пересечения определяются координатами

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2(\nu_2 - \mu\nu_1)}{1 - \mu} - 1 \right) \quad (2.9)$$

Следовательно, для рассматриваемого соединения различных материалов можно подобрать такие растворы углов γ_1 и γ_2 , что напряжения на краю поверхности контакта $x = \pm a$ ($\alpha = \pm \infty$) будут конечными, хотя $\gamma_1 + \gamma_2 > \frac{\pi}{2}$, в то время как для однородного материала угол при вершине должен быть не больше $\frac{\pi}{2}$.

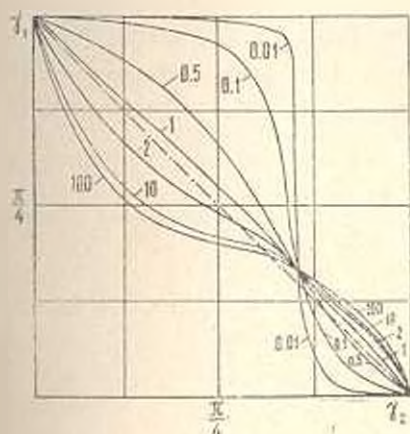
Концентрации напряжений не будет, когда угол более жесткого материала заключен в пределах

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2(\nu_2 - \mu\nu_1)}{1 - \mu} - 1 \right) < \gamma_2 < \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \mu > 1 \\ 0 < \gamma_2 < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2(\nu_2 - \mu\nu_1)}{1 - \mu} - 1 \right) \quad \text{при } \mu < 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

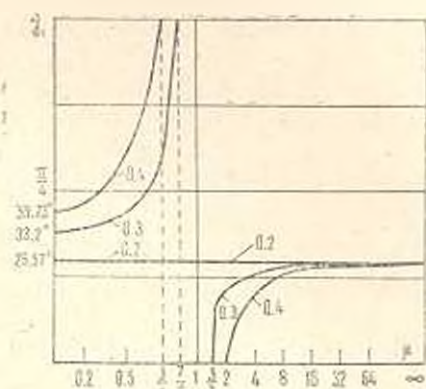
углы γ_1 и γ_2 не должны при этом выходить за граничную кривую.

Следует отметить, что при $\mu \rightarrow \infty$ граничные кривые стремятся к отрезку прямой $\gamma_2 = 0$, при $\mu \rightarrow 0$ стремятся к ломаной $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$ и $\gamma_2 = \frac{1}{2} \arccos (2\nu_2 - 1)$.

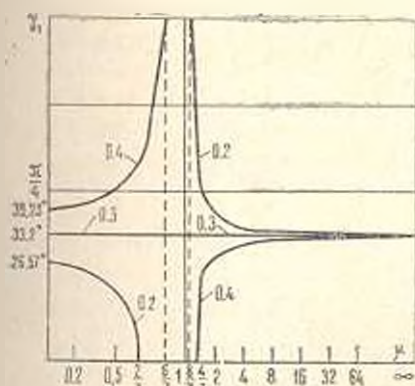
Представляет интерес рассмотреть случай $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$. На плоскости γ_1 и μ приведена граница раздела областей конечных и бесконечных напряжений при 1) $\nu_1 = 0.2$ (фиг. 6), 2) $\nu_1 = 0.3$ (фиг. 7) и 3) $\nu_1 = 0.4$ (фиг. 8) при различных значениях μ . Цифрами указаны значения γ_2 .



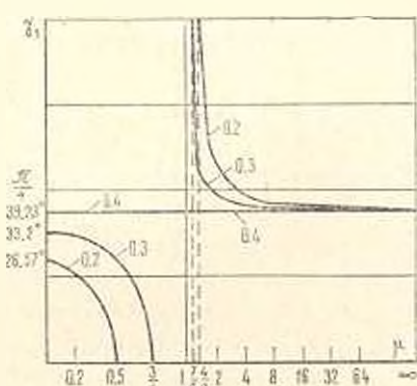
Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Разграничивающий угол γ_1 при

$$\begin{aligned} (1 - \nu_2)/(1 - \nu_1) < \mu < \nu_2/\nu_1 & \text{ при } \nu_2 \geq \nu_1 \\ \nu_2/\nu_1 < \mu < (1 - \nu_2)/(1 - \nu_1) & \text{ при } \nu_2 \leq \nu_1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

равен 0 или $\frac{\pi}{2}$, то есть составное тело работает как однородное.

Но при увеличении μ ($\mu \rightarrow \infty$) γ_1 стремится к пределу $\frac{1}{2} \arccos \cos(2\nu_1 - 1)$, при уменьшении μ ($\mu \rightarrow 0$) γ_1 стремится к пределу

$\frac{1}{2} \arccos(2v_2 - 1)$. В интервале $\frac{1}{2} \arccos(2v_2 - 1) < \gamma_1 < \frac{1}{2} \arccos(2v_1 - 1)$ при $v_2 > v_1$ и $\frac{1}{2} \arccos(2v_1 - 1) < \gamma_1 < \arccos(2v_1 - 1)$ при $v_2 < v_1$

уравнение (2.7), кроме тривиального $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$, никаких корней не имеет при любых значениях μ .

Если $v_2 < v_1$ в интервалах $0 < \mu < (1 - 2v_2)/(1 - 2v_1)$ и $v_2/v_1 < \mu < \infty$, угол γ_1 меньше угла γ_2 . Если $v_1 > v_2$ в интервалах $0 < \mu < v_2/v_1$ и $(1 - 2v_2)/(1 - 2v_1) < \mu < \infty$, угол γ_1 больше γ_2 . Для значения $\mu = (1 - 2v_2)/(1 - 2v_1)$ разграничивающие углы одинаковые $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\pi}{4}$.

Автор весьма признателен Б. Л. Абрамяну за обсуждение и ценные советы.

ВЦ АН Армянской ССР и
Ереванского государственного
университета

Поступила 10 I 1972

Լ. Ա. ՀԱՐՈՒՄՅԱՆՆԵԱՆ

ՔԱՂԱՔՐԱՅԱԼ ԱՆՈՎՁԳԱԿԱՆ ԼՈՒՄՆԱԿԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Վ. ՓԻՆՓԻՆԻՆ

Երկրենե կորդինատային սխեմանում դիտարկվում է շրջանային շորս աղեղներով սահմանափակված բազադրյալ մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը: Ինվարիանտ է, որ միջանկյալ նյութը սահմանափակող նյութերը ունեն միեւնոյն առաձգական հատկությունները և չափերը:

Խնդիրը լուծվում է լարումների ֆունկցիայի օգնությամբ:

Եզրային սլայմանները բավարարելուց հետո անհայտ գործակիցների որոշման համար առաջված է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սխեմա: Ավտոմորֆ ֆունկցիաների օգնությամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սխեմանը բերվում է Հիլբերտ-Ռիմանի եզրային խնդրին: Այնուհետև աչդ եզրային խնդիրը բերված է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների սխեմանի:

Նյութի միացման անկյուններից և առաձգական հատկություններից կախված ուսումնասիրված են աեկչունային կեանքում լարումների եզակիությունները:

THE PLANE PROBLEM IN THE THEORY OF ELASTICITY FOR A COMPOSITE BODY IN THE REGION CONSISTING OF THREE LUNES

L. A. HARUTIUNIAN

S u m m a r y

The problem in the theory of elasticity for a composite body restricted by arcs of crossing circles is considered in a bipolar coordinate system.

A full cohesion between the materials is effected along the contact line.

The problem is solved by the function of stresses and reduced to the solution of a characteristic system of singular integral equations. By theory of automorphic functions of SIE it is reduced to the Hilbert-Riemann boundary problem. The solution of the boundary problem for the general case is obtained by regularization i. e. by reduction to a solvable system of the Fredholm integral equations of the second kind.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М., ГТИИ, 1950.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. А., изд-во «Наука», 1968.
3. Еланин В. В. К плоской задаче теории упругости для круговой «луночки». Сб. науч. трудов ЕрПИ, 1959, № 20. Машиностроение, вып. 4.
4. Арутюниан А. А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. Изв. АН АрмССР, «Механика», 1976, т. XXIX, № 1.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., изд-во «Наука», 1968.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., изд-во «Наука», 1970.
7. Глад Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
8. Чибрикова А. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, т. 116, кн. 4.
9. Карамян К. О., Алексанян Р. К., Едоян В. А. Влияние угла наклона боковых граней облицовочных плит на прочность совместной их работы с бетоном при температурных воздействиях. Труды АрмНИИСА, 1976, «Строительная физика», вып. 26.
10. Ахсентян О. К., Арутик О. Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина. МТТ, № 5, 1978.