

Р. Н. ОВАКИМЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОАКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ОБОЛОЧЕК

В связи с разработкой конструкции нового вида кабелей для сверхпроводящих линий электропередач [1] практический интерес представляет исследование их механической устойчивости под действием возникающих электромагнитных нагрузок.

В принципе сверхпроводящий кабель представляет собой коаксиальную систему из двух круговых цилиндрических оболочек; тончайший слой сверхпроводящего сплава толщиной 20—40 мк покрывает внутреннюю оболочку только снаружи, а внешнюю оболочку — лишь изнутри. Низкая температура, необходимая для сохранения сверхпроводящих свойств стенок коаксиала, обеспечивается потоком криогенной жидкости, протекающей через кольцевой зазор коаксиала. В сверхпроводящем кабеле токопроводом, как правило, служит внутренняя оболочка (точнее — ее наружная поверхность), а внешняя оболочка является своего рода «магнитным экраном», препятствующим прониканию магнитного поля за пределы коаксиала, одновременно выполняя роль защитного кожуха, предохраняющего кабель от механических повреждений.

Основными внешними нагрузками в коаксиале являются: 1) гидродинамическое давление потока криогенной жидкости, обладающей всеми свойствами идеальной жидкости, и 2) электромагнитное давление, возникающее при взаимодействии протекаемого тока с собственным магнитным полем.

До настоящего времени системы сверхпроводящих коаксиалов, в основном, исследовались на устойчивость физического состояния сверхпроводимости материала оболочек (например, [1, 2]): механическая же устойчивость подобных систем почти не рассматривалась (в частности, такая попытка была сделана в [3], где исследовался одномерный случай).

Необходимость исследования механической прочности и устойчивости сверхпроводящих коаксиалов особенно возрастает в случае транспортирования токов в десятки и сотни тысяч ампер. Уже сегодня сверхпроводники III рода, например, Nb_3Sn [6], благодаря высокому значению критического магнитного поля $H_{cр,2} \approx 2 \cdot 10^7$ а/м позволяют пропускать огромные токи в несколько тысяч килоампер (технически это трудно осуществить, так как возникающие пондеромоторные усилия $q \approx 5 \cdot 10^3$ н/м², например, более, чем в полтора раза превышают предел прочности меди $\sigma_{\text{пр}} = 3.1 \cdot 10^8$ н/м²). Во всех случаях установление верхней границы допустимой силы тока, при которой сохраняется начальная форма токопровода, является одним из основных требований при проектировании сверхпроводящих кабелей большой мощности. В предлагаемой работе исследуются

устойчивость сверхпроводящего коаксиала под действием возмущающих электромагнитных нагрузок: влияние криогенной жидкости не учитывается.

В обозначениях [4] в цилиндрической системе координат x, φ, r (фиг. 1) рассмотрим внутреннюю оболочку радиуса срединной поверхности R_1 и толщины h , изготовленную из упругого изотропного материала с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Наружняя оболочка радиуса R_2 условно принимается абсолютно жесткой и недеформируемой, что не влияет на сущность рассматриваемого явления, но значительно облегчает вычисления.

Пусть по сверхпроводящей поверхности оболочки R_1 вдоль оси x транспортируется постоянный электрический ток силы J . В установившемся состоянии вектор линейной плотности тока

$$i_0 = \frac{J}{2\pi R_1} e_x = i_0 e_x \quad (1.1)$$

где $i_0 = \text{const}$ (согласно принятой в теории оболочек погрешности величиной $\frac{h}{2R_1}$ по сравнению с единицей пренебрегаем).

Магнитное поле, возникающее в окружающем пространстве от осевого тока (1.1), вследствие сверхпроводимости оболочек R_1 и R_2 , существует лишь в коаксиальном зазоре $R_2 \gg r \gg R_1$ и равно

$$H_0 = -i_0 \frac{R_1}{r} e_\varphi \quad (1.2)$$

причем на поверхностях оболочек R_1 и R_2

$$H_0^{(1)} = -i_0 e_\varphi \quad H_0^{(2)} = -i_0 \frac{R_1}{R_2} e_\varphi \quad (1.3)$$

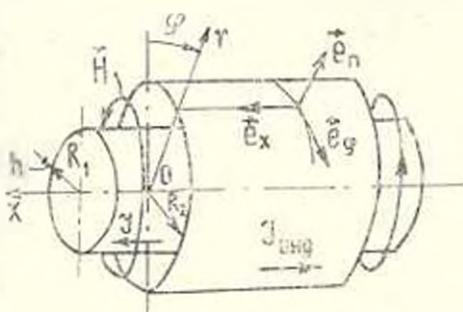
Здесь и в дальнейшем все физические величины с нижним индексом «0» характеризуют невозмущенное состояние оболочки; верхние индексы (1) и (2) относятся к оболочкам R_1 и R_2 соответственно.

Определим электромагнитные явления, возникающие в системе при наличии сверхпроводящей оболочки R_1 .

Как известно [5], в стационарном состоянии дифференциальные уравнения Максвелла в коаксиальном зазоре будут

$$\text{rot } H_0 = 0, \quad \text{div } B_0 = 0 \quad (1.4)$$

где $B_0 = \mu_0 H_0$ — магнитная индукция в системе СИ, μ — относительная магнитная проницаемость среды кольцевого зазора (напомним, что в сверх-



Фиг. 1.

проводниках $\mu = 0$). $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ лб/а² — магнитная проницаемость вакуума, H_0 — напряженность магнитного поля, определяемая по выражению (1.2).

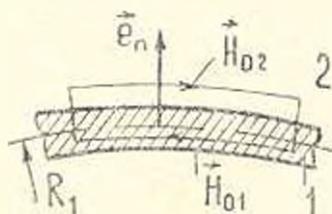
В общем случае граничные условия на поверхности раздела сред при наличии поверхностных токов типа (1.1) имеют следующий вид [5]:

$$e_n \times (H_{02} - H_{01}) = i \quad e_n \cdot (B_{02} - B_{01}) = 0 \quad (1.5)$$

Здесь H_{01} , H_{02} и B_{01} , B_{02} — напряженности индукции магнитного поля по обе стороны от поверхности раздела сред 1 и 2 (фиг. 2), e_n — нормаль к поверхности в положительном направлении r , i — линейная плотность тока.

Так как в области $r < R_1$, то есть внутри оболочки R_1 , магнитное поле отсутствует, то в (1.5) следует принять $H_{01}^{(1)} = 0$, а следовательно, и $B_{01}^{(1)} = 0$, и потому

$$e_n \times H_{02}^{(1)} = i_0 \quad e_n \cdot \mu_0 H_{02}^{(1)} = 0 \quad (1.6)$$



Фиг. 2.

Подстановкой значений $H_{02}^{(1)}$ (1.3) и i_0 (1.1) в граничные условия (1.6) убеждаемся в их тождественном выполнении, причем из второго условия (1.6) следует равенность магнитных силовых линий в сверхпроводящей поверхности оболочки R_1 .

Перейдем к граничным условиям на поверхности сверхпроводящей оболочки R_2 , памятуя, что по ней первоначально токи не транспортировались. Как показано в различных исследованиях явлений сверхпроводимости материала (укажем, например, [6]), согласно эффекту Мейснера на поверхности сверхпроводников I-го рода, а также сверхпроводников III-го рода (до достижения первой критической величины напряженности внешнего магнитного поля H_{cp1}), помещенных во внешнее магнитное поле, индуцируются поверхностные токи, которые создают магнитные поля, препятствующие прониканию внешних магнитных полей в толщу сверхпроводника (глубина проникновения не превышает 10^{-5} см).

Считая, что поверхности оболочек обладают свойствами сверхпроводников указанного рода, в граничных условиях (1.5) для оболочки R_2 следует принять $H_{02}^{(2)} = 0$ и $B_{02}^{(2)} = 0$, так что

$$e_n \times (-H_{01}^{(2)}) = i_{\text{инд}} \quad e_n \cdot (-\mu_0 H_{01}^{(2)}) = 0 \quad (1.7)$$

Используя значение $H_{01}^{(2)}$ (1.3) при $r = R_2$, из первого уравнения условий (1.7) получим плотность индуцируемого поверхностного тока экранировки

$$i_{\text{инд}} = -i_0 \frac{R_1}{R_2} e_n \quad (1.8)$$

равного по величине, но противоположного по направлению току силы I в оболочке R_1 .

Таким образом, при транспортировании электрического тока вдоль z по поверхности оболочки R_1 на внутренней сверхпроводящей поверхности оболочки R_2 индуцируется такой же силы электрический ток, но противоположного направления, вследствие чего магнитное поле оказывается заключенным в сверхпроводящем коаксиале оболочек R_1 и R_2 .

Электромагнитные силы, возникающие при взаимодействии протекающего поверхностного тока с собственным магнитным полем, определяются векторным произведением

$$q = i \times B, \quad (1.9)$$

где q — поверхностная нагрузка, $[N/m^2]$, B — магнитная индукция на токонесущей поверхности тела.

Так для оболочки R_1 после подстановки в (1.9) выражений (1.1) и (1.3) имеем

$$q_0^{(1)} = -\mu_0 J_0^2 e_n = -q_0 e_n \quad (1.10)$$

Как следует из (1.10), возникающая электромагнитная нагрузка сжимает оболочку в радиальном направлении с силой, прямо пропорциональной квадрату линейной плотности тока J_0^2 .

На наружную оболочку R_2 действует, наоборот, распирающая нагрузка, которая согласно (1.3) и (1.8) будет равна

$$q_0^{(2)} = q_0 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 e_n \quad (1.11)$$

Эта сила повышает устойчивость оболочки R_1 и в дальнейшем не будет учитываться, тем более, что оболочка R_2 была принята абсолютно недеформируемой.

Исследуем устойчивость оболочки R_1 , находящейся под действием равномерного давления $q_0^{(1)}$ (1.10), и определим критическую величину этой нагрузки, а, следовательно, и плотности тока J_{cr} , при которой оболочка теряет свою начальную круговую форму.

Используем метод малых возмущений, налагаемых на оболочку R_1 по всем трем направлениям e_r , e_φ , e_n в зависимости от координат x , φ и времени t . В частности, радиальные возмущения (вдоль e_n) будут

$$\xi = \xi_0 \exp i(kx + n\varphi - \omega t) \quad (1.12)$$

где ξ_0 — амплитуда возмущения, $k = \frac{2\pi}{l}$ — волновое число, l — длина волны в продольном направлении, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ — целое число волн, укладываемых в окружном направлении φ , $\omega = \omega_R + i\omega_I$ — круговая частота колебаний, в общем случае комплексная величина (ω_R — вещественная, ω_I — мнимая части).

Возмущение поверхности влечет за собой изменение поверхностной плотности тока как по величине, так и по направлению, что в свою очередь изменяет напряженность магнитного поля в коаксиале. Препятствуя про-

никанию возмущений магнитного поля в сверхпроводник, на поверхностях оболочек R_1 и R_2 индуцируются новые токи, так называемые экранирующие токи, которые создают магнитные поля, равные по величине, но противоположные по направлению возмущениям магнитных полей. Практически в сверхпроводниках рассматриваемого рода отсутствуют явления отражения и преломления электромагнитных волн, обычно наблюдаемых в материалах конечной проводимости. Для определения указанных взаимосвязанных изменений электромагнитного поля необходимо решение дифференциальных уравнений Максвелла в нестационарном виде. Но, как показано в [5], в случае ограниченной частоты колебаний $\lesssim 10^9$ гц при отсутствии посторонних источников тока и в непосредственной близости от токопроводящих тел с большой точностью можно использовать квазистационарные уравнения Максвелла.

В нашем случае при большой силе тока, обычно пропускаемого по сверхпроводящему кабелю, частота колебаний не превышает 10^9 гц, а характерный размер оболочки намного меньше длины электромагнитной волны $\frac{c}{\omega} \ll c$ (c — скорость света), что позволяет использовать квазистационарные уравнения Максвелла. По внешнему виду эти уравнения совпадают со стационарными уравнениями (1.4), где теперь вместо H_0 следует писать $H_0 + h$ (h — возмущение магнитного поля).

Согласно принципу суперпозиции полей из (1.4) имеем

$$\operatorname{rot} h = 0, \quad \operatorname{div} h = 0 \quad (1.13)$$

где во втором уравнении отброшена постоянная μ_0 .

Векторным уравнениям (1.13) удовлетворяет потенциальная функция

$$h = -\operatorname{grad} \psi \quad (1.14)$$

которая совместно со вторым уравнением (1.13) сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Функцию ψ ищем соответственно ξ (1.12) в виде

$$\psi = f(r) \exp i(kx - n\varphi - \omega t) \quad (1.15)$$

Подставляя (1.15) в уравнение Лапласа, после соответствующего дифференцирования по координатам x , φ , t получим уравнение Бесселя

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - (n^2 + k^2 r^2) f(r) = 0 \quad (1.16)$$

Решение уравнения (1.16) выражается через функции Бесселя чисто мнимого аргумента

$$f(r) = C_1 I_n(kr) + C_2 K_n(kr) \quad (1.17)$$

где произвольные постоянные C_1 , C_2 определяются из граничных условий электромагнитного поля в возмущенном состоянии. Выпишем эти условия.

На возмущенной поверхности внутренней оболочки $r = R_1 + \zeta$

$$e_n^* \times (H_{02}^{(1)} + h^{(1)}) = i^{(1)}, \quad e_n^* (H_{02}^{(1)} + h^{(1)}) = 0 \quad (1.18)$$

и на недеформируемой поверхности оболочки R_2

$$e_n \times (-H_{01}^{(2)} - h^{(2)}) = i^{(2)}, \quad e_n (-H_{01}^{(2)} - h^{(2)}) = 0 \quad (1.19)$$

Заметим, что в новом положении токонесущей поверхности $r = R_1 + \zeta$ выраженность магнитного поля в невозмущенном состоянии согласно формуле (1.2) будет равна

$$H_{02}^{(1)} = -i_0 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1}\right) e_z \quad (1.20)$$

Нормаль к возмущенной поверхности оболочки R_1 определяется соотношением [4]

$$e_n^* = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} e_x - \frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi} e_\varphi + e_n \quad (1.21)$$

Рассмотрев совместно выражения (1.14), (1.15) и (1.17), а также соотношения (1.20) и (1.21), после дифференцирования и отбрасывания одинакового для всех экспоненциального множителя $\exp(i \dots)$ из вторых уравнений граничных условий (1.18), (1.19) получим систему линейных уравнений

$$C_1 I_n'(kR_1) + C_2 K_n'(kR_1) = ii_0 \frac{n}{R_1} \zeta_0 \quad (1.22)$$

$$C_1 I_n'(kR_2) + C_2 K_n'(kR_2) = 0$$

Здесь обозначены выражения $I_n(kR_1) = \frac{\partial}{\partial r} I_n(kr)|_{R_1}$ и т. д. Решая систему уравнений (1.22) относительно C_1 и C_2 , получим

$$C_1 = ii_0 \frac{n}{R_1} \frac{K_n(kR_2)}{\Delta}, \quad C_2 = -ii_0 \frac{n}{R_1} \frac{I_n(kR_2)}{\Delta}$$

где для сокращения записи через Δ обозначена положительная величина

$$\Delta = I_n(kR_2) K_n'(kR_1) - I_n'(kR_2) K_n(kR_1) \quad (1.23)$$

После подстановки значений C_1 , C_2 в (1.17), а затем в (1.15), с учетом выражения (1.12) получим

$$\psi = i_0 \frac{K_n(kR_2) I_n(kr) - I_n(kR_2) K_n(kr)}{\Delta} \frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi} \quad (1.24)$$

Из вида функции ψ (1.24) следует, что возмущение магнитного поля $h = -\text{grad} \psi$ (1.14) возникает только при наличии деформации оболочки в окружном направлении $\frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi}$

Используя (1.24), выпишем значения h (1.14) на поверхностях оболочек R_1 и R_2 :

$$h^{(1)} = i_0 \left[\frac{\Delta_1}{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial x \partial \varphi^2} e_x + \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} e_z \right) - \frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi} e_n \right] \quad (1.25)$$

$$h^{(2)} = i_0 \frac{1}{R_2 \Delta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_2^2 \partial x \partial \varphi^2} e_x + \frac{\partial^2 \zeta}{R_2^2 \partial \varphi^2} e_z \right) \quad (1.26)$$

где через Δ , обозначена положительная величина

$$\Delta_1 = I_n(kR_2) K_n(kR_1) - K_n(kR_2) I_n(kR_1) \quad (1.27)$$

и используется известное соотношение $I_n(x) K_n(x) - K_n(x) I_n(x) = \frac{1}{x}$.

Определив возмущения магнитного поля (1.25), (1.26), из первых уравнений граничных условий (1.18), (1.19) получим выражения линейных плотностей токов на поверхностях оболочек R_1 и R_2 :

$$i^{(1)} = i_0 \left[\left(1 - \frac{\zeta}{R_1} - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) e_x + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial x \partial \varphi^2} e_z + \frac{\partial \zeta}{\partial x} e_n \right] \quad (1.28)$$

$$i^{(2)} = i_0 \frac{R_1}{R_2} \left[\left(1 - \frac{1}{R_2 \Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) e_x + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial x \partial \varphi^2} e_z \right] \quad (1.29)$$

Токи $i^{(1)}$ (1.28) и $i^{(2)}$ (1.29) можно представить в виде суммы двух токов — транспортного и вихревого.

Для оболочки R_1 выражение транспортного тока будет

$$i_{\text{тп}}^{(1)} = i_0 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) e_{x1} \quad (1.30)$$

где $i_0 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right)$ — величина линейной плотности тока, протекающего через поперечное сечение оболочки в осевом направлении

$$e_{x1} = e_x + \frac{\partial \zeta}{\partial x} e_n \quad (1.31)$$

Заметим, что направление тока e_{x1} (1.31) в общем случае деформации не совпадает с направлением деформируемого продольного волокна оболочки [4]

$$e_x^* = e_x + \frac{\partial v}{\partial x} e_z + \frac{\partial \zeta}{\partial x} e_n \quad (1.32)$$

где v — перемещение элемента оболочки в тангенциальном направлении φ . Это объясняется природой электрического тока, состоящего из потока свободных электронов, когда на их начальное направление вдоль x не может влиять деформация кристаллической (ионной) решетки по φ .

Вторая составляющая тока $i^{(1)}$ (1.28) — индуцируемый вихревой ток экранировки

$$i_n^{(1)} = -i_0 \frac{\Delta}{\delta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial z^2} e_x - \frac{\partial^2 \zeta}{R_2 \partial x \partial z} e_z \right) \quad (1.33)$$

представляет замкнутую линию и не влияет на силу тока J , протекающего через поперечное сечение оболочки в направлении оси x . Этот ток так же, как и возмущение магнитного поля h , возникает лишь при наличии окружающей деформации $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$.

Для оболочки R_2 ток $i^{(2)}$ (1.29) является по своей природе индуцируемым током экранировки, но также может быть условно разделен на транспортный (1.8) и вихревой

$$i_n^{(2)} = i_0 \frac{1}{R_1 \Delta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial z^2} e_x - \frac{\partial^2 \zeta}{R_2 \partial x \partial z} e_z \right) \quad (1.34)$$

который противоположен направлению тока $i_n^{(1)}$ (1.33) в оболочке R_1 . Вихревой характер токов (1.33) и (1.34) следует из равенства нулю дивергенции этих векторов ($\text{div } i_n = 0$).

Перейдем к определению поверхностной нагрузки, действующей на токонесущую оболочку R_1 в возмущенном состоянии.

Согласно формуле (1.9), с учетом выражений напряженности магнитного поля в возмущенном состоянии (1.20) и (1.25) и линейной плотности тока (1.28) имеем

$$q^{(1)} = -\mu_0 (i^{(1)})^2 e_n^* \quad (1.35)$$

Из соотношения (1.35) следует, что поверхностная нагрузка $q^{(1)}$ электромагнитного происхождения всегда направлена по нормали e_n^* (1.21) к деформируемой поверхности оболочки R_1 , то есть носит следящий характер.

В работе [3], где рассматривался одномерный случай ($\partial_z \zeta = 0$), вихревые токи экранировки не возникали и выражение нагрузки имело более простой вид

$$q^{(1)} = -q_0 \left(1 - 2 \frac{\zeta}{R_1} \right) e_n^* \quad (1.35a)$$

где в данном случае

$$e_n^* = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} e_x + e_n$$

Для оболочки R_2 , используя уравнения (1.19), получим

$$q^{(2)} = q_0 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{R_2 \Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial z^2} \right) e_n \quad (1.36)$$

из которого следует, что нагрузка $q^{(2)}$ в отличие от $q^{(1)}$ (1.35), играет стабилизирующую роль, то есть повышает устойчивость оболочки R_2 .

Возмущение электромагнитной нагрузки, необходимое при расчете устойчивости оболочки R_1 , определяется из разности векторов сил в возмущенном (1.35) и исходном (1.10) состояниях. В линейном приближении

$$\delta q = q^{(1)} - q_0^{(1)} = q_0 \left[\frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{R_1 \partial \varphi} e_\varphi - 2 \left(\frac{z}{R_1} + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) e_z \right] \quad (1.37)$$

Перейдем к составлению уравнений устойчивости оболочки.

В предварительно-напряженном состоянии оболочка R_1 находится под действием нагрузки $q_0^{(1)}$ (1.10) и сохраняет начальную круговую форму, так что основным внутренним усилием является окружное усилие $T_\varphi^0 = -q_0 R_1$. (Начальное состояние оболочки в подобных задачах устойчивости обычно считается безмоментным).

Выпишем уточненные уравнения устойчивости оболочки, являющиеся разностью уравнений равновесия в возмущенном и предварительно-напряженном состояниях в проекциях на e_x, e_φ, e_z .

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{x\varphi}}{R_1 \partial \varphi} + T_z^0 \left(\frac{\partial^2 u}{R_1^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 w}{R_1 \partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial T_\varphi}{R_1 \partial \varphi} + \frac{\partial T_{x\varphi}}{\partial x} + T_z^0 \frac{\partial^2 u}{R_1 \partial x \partial \varphi} + \frac{N_x}{R_1} &= 0 \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_\varphi}{R_1 \partial \varphi} - \frac{T_z^0}{R_1} + T_z^0 \left(\frac{w}{R_1} + \frac{\partial^2 w}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) + 2q_n - \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Здесь u, v, w — возмущения элемента оболочки соответственно в направлениях e_x, e_φ, e_z , δq — нормальная составляющая возмущения усилия δq (1.37), $-\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ — инерционный член, а выражения усилий, моментов и перерезывающих сил N_x, N_φ с сохранением малых членов порядка $\lambda = \frac{h^2}{12R_1}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{w}{R_1} + \frac{\partial v}{R_1 \partial \varphi} \right) - \lambda R_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ T_\varphi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{w}{R_1} + \frac{\partial v}{R_1 \partial \varphi} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial^2 w}{R_1 \partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{R_1 \partial \varphi} \right) \right] \\ T_{x\varphi} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} - \lambda \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ T_{\varphi x} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} \right) \right] \\ M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{R_1^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial u}{R_1 \partial x} - \nu \frac{\partial v}{R_1 \partial \varphi} \right) \\ M_\varphi &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{R_1^2 \partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$M_{xz} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{R_1 \partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v}{R_1 \partial x} \right)$$

$$M_{\varphi z} = -D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{R_1 \partial x \partial z} - \frac{1}{2R_1} \left(\frac{\partial u}{R_1 \partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$N_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{R_1 \partial z} \quad N_z = \frac{\partial M_z}{R_1 \partial z} + \frac{\partial M_{\varphi z}}{\partial x}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки.

Рассматривая оболочку с шарнирным закреплением краев, представим u, v, w в виде гармонических колебаний типа (1.12) с соответствующими малыми амплитудами ξ_0, η_0 и ζ_0 . Подставив эти выражения в соотношения (1.39), уравнения устойчивости (1.38) сведем к системе алгебраических уравнений относительно амплитуд ξ_0, η_0, ζ_0

$$\begin{aligned} & - \left[N^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 + \left(\alpha \frac{1-\nu}{2} - p_0 \right) n^2 \right] \xi_0 - \frac{1+\nu}{2} n N \eta_0 + \\ & + i \left[\nu + \alpha \left(N^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) + p_0 \right] N \zeta_0 = 0 \\ & - \left(\frac{1+\nu}{2} - p_0 \right) n N \xi_0 - \left[n^2 + \frac{1-\nu}{2} N^2 + \alpha \left(3 \frac{1-\nu}{2} N^2 - n^2 \right) \right] \eta_0 + \\ & + i \left[1 + \alpha \left(\frac{3-\nu}{2} N^2 - 1 \right) \right] n \zeta_0 = 0 \quad (1.40) \\ & - i \left[\nu + \alpha \left(N^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \right] N \xi_0 - i \left[1 + \alpha \left(\frac{3-\nu}{2} N^2 - 1 \right) \right] n \eta_0 - \\ & - \left[1 + \alpha (n^2 + N^2) - 2\alpha n^2 - p_0 (n^2 - 1 + \beta) - \frac{R_1^2}{c_1^2} \omega^2 \right] \zeta_0 = 0 \end{aligned}$$

где для сокращения записи обозначены $p_0 = q_0 R_1 \frac{1-\nu^2}{Eh}$, $c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$ — квадрат продольной скорости звука в тонких телах, $N = kR_1$ и $\beta = 2 \left(1 - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{n^2}{R_1} \right)$ — коэффициент возмущения следящей нагрузки по (1.37).

Приравнявая определитель системы уравнений (1.40) нулю, в приближении величинами высшего порядка малости, пропорциональными $\alpha^2, \alpha^3, p_0^2$, получим характеристическое уравнение относительно частоты ω

$$\begin{aligned} & \frac{R_1^2}{c_1^2} \omega^2 - \frac{1-\nu^2}{(n^2 + N^2)^2} N^4 + \alpha \left[(n^2 + N^2 - 1)^2 - \right. \\ & \left. - 2(1-\nu) N^2 \frac{n^2(n^2 - 1) - N^4}{(n^2 + N^2)^2} \right] - p_0 \left[(n^2 - 1 + \beta) - N^2 \frac{n^2 - \nu N^2}{(n^2 + N^2)^2} \right] \quad (1.41) \end{aligned}$$

Как показали расчеты на ЭВМ, в широком диапазоне значений $\frac{h}{R_1}$ и $\frac{R_1}{l}$ [7] с большой точностью $\sim (10^{-3} - 10^{-2})\%$ можно пренебречь вторыми слагаемыми в квадратных скобках (1.41) и представить искомое соотношение в виде

$$\omega^2 = \Omega_1^2 - m \frac{q_0}{\varphi R_1 h} \quad (1.42)$$

В правой части (1.42) первое слагаемое есть квадрат частоты собственных колебаний оболочки, которое с учетом значений N и c , сводится к следующему виду:

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{\varphi h R_1} \left[E h \frac{k^4 R_1^4}{(n^2 + k^2 R_1^2)^2} + \frac{D}{R_1} (n^2 + k^2 R_1^2 - 1)^2 \right] \quad (1.43)$$

Полученный коэффициент $(n^2 + k^2 R_1^2 - 1)^2$ полностью соответствует физике колебаний оболочки, хотя и несколько отличается от общепринятого $(n^2 + k^2 R_1^2)^2$. Покажем это на примере свободно подвешенной оболочки: при $k = 0$ и $n = 1$, что соответствует смещению оболочки в сторону как жесткого тела, колебания отсутствуют, что также следует из формулы (1.43) ($\Omega_1 = 0$). Следует отметить, что с принятой в теории оболочек погрешностью при $n \geq 4$ единицей можно пренебречь и принять $(n^2 + k^2 R_1^2)^2$.

Второе слагаемое в правой части соотношения (1.42) характеризует внешнюю нагрузку, причем коэффициент

$$m = n^2 - 1 + \beta \quad (1.44)$$

определяет вид радиальной нагрузки. Для консервативной нагрузки, вследствие отсутствия возмущений нагрузки ($\delta q = 0$), $\beta = 0$ и $m = n^2 - 1$.

Таким образом, для рассматриваемого случая нагружения

$$\omega^2 = \Omega_1^2 - \left(n^2 - 1 - 2 \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{n^2}{R_1} \right) \frac{q_0}{\varphi R_1 h} \quad (1.45)$$

Оболочка R_1 будет устойчива при положительном значении правой части уравнения (1.42), что будет соответствовать отсутствию мнимой части ω_i в выражении частоты ω ; критический момент наступит при $\omega = 0$, когда

$$q_{кр} = \varphi R_1 h \frac{\Omega_1^2}{n^2 - 1 - 2 \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{n^2}{R_1}} \quad (1.46)$$

Согласно выражению q_0 (1.10) можно получить также критическую величину линейной плотности тока

$$i_{кр} = \Omega_1 \sqrt{\frac{\varphi R_1 h}{\mu_0 \left(n^2 - 1 - 2 \frac{\Delta_1}{R_1} \frac{n^2}{\Delta} \right)}} \quad (1.47)$$

и, следовательно, и критическую силу тока $J_{кр}$ (1.1). Значение $q_{кр}$ (1.46) вычисляется в каждом конкретном случае при заданных величинах $\frac{h}{R_1}$, $\frac{R_1}{l}$, $\frac{R_2}{R_1}$, а также E , ν , в зависимости от волновых чисел n , k .

В качестве примера рассмотрена коаксиальная система сверхпроводящих оболочек длины l с отношением радиусов $\frac{R_2}{R_1} = 0.8$. Материалом оболочек выбрана медь с $\nu = 0.34$. Вследствие шарнирного закрепления краев оболочек в продольном направлении происходит прогиб оболочки R_1 по одной полуволе, так что $kR_1 = \frac{\pi R_1}{l}$. На ЭВМ „Найри-2“ в широком диапазоне значений $\frac{h}{R_1}$ и $\frac{\pi R_1}{l}$ получены безразмерные величины критической нагрузки $q^* = q_{кр} \cdot \frac{10^9}{E}$ (строка 1 в табл. 1); в скобках даны числа волн n , по которым минимизируются значения $q_{кр}$. Для сравнения в строке 2 приведены значения q^* , вычисленные ранее в [7] для отдельно взятой оболочки.

Таблица 1

$\frac{h}{R_1} \backslash \frac{\pi R_1}{l}$		$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$
0.018	1	0.288 (4)	1.333 (4)	4.50 (4)	10.66 (4)	35.99 (4)	287.9 (4)
	2	0.0747 (2)	0.326 (2)	1.08 (2)	2.542 (2)	8.539 (2)	68.12 (2)
0.24	1	0.334 (4)	1.418 (4)	4.649 (4)	10.9 (4)	36.53 (4)	291.0 (4)
	2	0.219 (4)	0.898 (3)	2.403 (3)	5.176 (3)	16.21 (3)	106.2 (2)
0.43	1	0.438 (6)	1.704 (5)	5.37 (5)	12.41 (5)	40.23 (4)	301.5 (4)
	2	0.38 (5)	1.451 (5)	4.128 (4)	8.63 (4)	26.35 (4)	155.05 (3)
1.2	1	0.849 (8)	3.213 (7)	9.392 (7)	19.86 (6)	59.21 (6)	336.3 (5)
	2	0.834 (8)	3.107 (7)	9.031 (7)	18.59 (6)	55.43 (6)	335.6 (5)
2.4	1	1.602 (11)	5.938 (10)	16.96 (9)	36.22 (8)	104.9 (8)	660.6 (6)
	2	1.598 (11)	5.911 (10)	16.82 (9)	35.71 (8)	103.4 (8)	629.9 (6)

Сравнивая значения q^* , полученные в обоих случаях, можно заметить, что в коаксиальной системе оболочка оказывается в более устойчивом состоянии, чем в свободном положении. С укорочением длины оболочки разницы в значениях $q_{кр}$ уменьшается и при $\frac{\pi R_1}{l} = 2.4$ сходится почти к нулю; потеря устойчивости оболочки в коаксиале происходит как минимум при $n=4$ против $n=2$ в свободном состоянии.

Для сверхпроводящего кабеля, предназначенного для работы в условиях сверхнизкой температуры, основным материалом толщи оболочки наиболее часто выбираются медь и ее сплавы, вследствие значительного улучшения всех механических свойств с понижением температуры. В част-

ности, при слабом изменении ударной вязкости и пластичности существенно возрастают предел прочности и твердость [8]; для модуля упругости меди принимается новое значение $E = 1.2 \cdot 10^{11}$ н/м² против $E = 1.1 \cdot 10^{11}$ н/м² при 15°С.

В качестве числового примера рассмотрим конструкцию сверхпроводящего коаксиального кабеля [6] при диаметре внутренней оболочки 67 мм, толщине стенки 0.32 мм ($\frac{h}{R_1} = \frac{1}{100}$) и диаметре наружной оболочки 84 мм ($\frac{R_1}{R_2} = 0.8$). Для отдельного узла длиной $l = 2.2$ м ($kR_1 = 0.048$) из табл. 1 получим $q^* = q_{cr} \cdot 10^9 E \approx 36$, откуда следует $q_{cr} = 4.3 \cdot 10^6$ н/м², что почти на два порядка меньше предела пропорциональности меди $\sigma_n \approx 2 \cdot 10^8$ н/м². По формуле (1.10) $q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q^*}{kR_1}$ приняв $\mu = 1$, вычислим критическую величину линейной плотности тока $i_{cr} = 1.85 \cdot 10^6$ а/м. Таким образом, допускаемая сила тока, транспортируемая по оболочке диаметром 67 мм, будет $I_{cr} = 390$ ка (по проекту предусматривается $I = 67$ ка). Следует заметить, что в наших расчетах не учитывалось влияние криогенной жидкости, что, по-видимому, привело к высокому значению критического тока. Совместное рассмотрение истока жидкого гелия и электромагнитных усилий является темой другой работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 II 1973

Ռ. Ն. ՕՎԱԿԻՄՅԱՆ

ՓԵՐՀԱՂՈՐԻԹ ՔԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ՀԱՄԱՌԱՆՑՔ ՄԻՍՏԵՄԻ
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Փոքր գրգռումների մեթոդով բվադիստացիոնար վիճակի համար Մաքսվելի հավասարումների լուծմամբ ստացված են հոսանքի գծային խտության և մազնիսական զաշտի լարվածության արտահայտությունները:

Արտածվել է հոսանքատար թաղանթների սխեմիի լայնական էլեկտրամագնիսական ուժով բևոնավորիլու ղեղքի համար դիսպերսիոն հավասարումը:

էշՄ օգնությամբ հաշվված են էլեկտրամագնիսական բևոի կրիտիկական արժեքները՝ ներքին թաղանթի տարրեր շափերի դիսպրամ: Ցույց է տրված, որ հոսանքատար թաղանթի համառոնցք սխեմեում ալելի կալուն է, բան ազատ վիճակում:

ON STABILITY OF A SYSTEM OF COAXIAL SUPERCONDUCTING SHELLS

R. N. OVAKIMIAN

Summary

The electromagnetic load arising in a system of current-carrying shells is investigated. A proper dispersion equation is derived. The critical load values are computerised for different shells. In the coaxial state the current-carrying shell is shown to be more stable than in the free one.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Сверхпроводящие линии электропередач. Со. трудов, вып. 39, М., ЭНИН, 1975.
- 2 Киселев М. И. О волнах конечной амплитуды в токонесущей сверхпроводящей коаксиальной линии. ЖТФ, 1975, т. XLV, вып. 2(382).
- 3 Овакимян Р. Н. Об устойчивости коаксиальных токонесущих оболочек. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, т. XXIII, № 2.
- 4 Наважилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромииздат, 1962.
- 5 Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., изд. «Наука», 1976.
- 6 Бухалец В. Сверхпроводимость. М., изд. «Мир», 1975.
- 7 Овакимян Р. Н. Об устойчивости цилиндрической оболочки при следящей электромагнитной нагрузке. Тезисы докладов XI Всес. конф. по теории оболочек и плазмы. Харьков. М., 1977.
- 8 Шестовский В. Г., Петровский Ю. В., Ровинский А. Е. Криогенная техника. М., изд. «Энергия», 1967.