ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 3, 1979 Механика

В. С. ТОНОЯН, А. Ф. МИНАСЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Исследованию плоской смешанной и контактной задачи теории упругости для составных плоскостей, полуплоскостей и полос посвящено много работ [1—8]. В этих работах принималось, что линии раздела различных материалов параллельны граничной линии, а свойства упругого материала в направлениях, параллельных границе, не изменяются.

В работе [9] рассматривалась задача о давлении жесткого штампа, приложенного на части границы упругой составной полуплоскости, когда полуплоскость состоит из двух квадрантов одинакового материала и полуполосы между ними из другого материала, линии раздела которых перпендикулярны границе полуплоскости. Смешанные задачи для составной плоскости и полосы с трещиной и первая основная задача для составной полуплоскости рассмотрены в работах [10—13].

1. В настоящей работе получено решение задачи о давлении жесткого штампа с основанием произвольной формы, приложенного на части горизонтальной границы упругой составной полуплоскости.

Полуплоскость состоит из двух однородных и изотропных квадрантов с различными упругими свойствами, линии раздела которых перпендикулярны границе полуплоскости. На границе полуплоскости приложен жесткий штамп с гладким основанием так, что штамп находится одновременно на обоих материалах и расположен несимметрично относительно линии ($x = 0$) (фиг. 1). Предполагается, что трение между штампом и материалами отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий. После решения задачи при принятых допущениях устраняются особенности напряжений и получаются уравнения, определяющие длины зон контакта. В частном случае, если материалы квадрантов одинаковы, то получается решение контактной задачи теории упругости для однородной полуплоскости, совпадающее с решением, полученным М. А. Садовским [14].

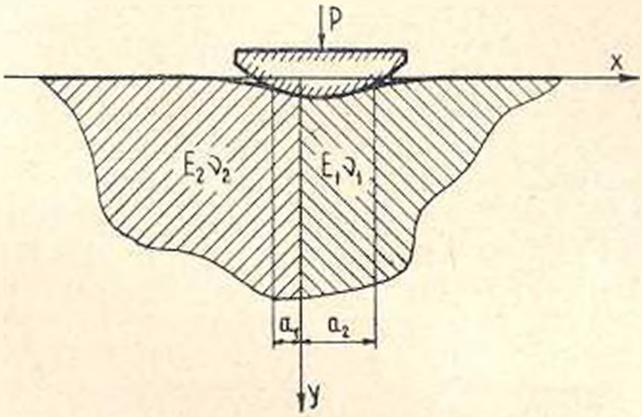
Поставленная задача сводится к определению бигармонической функции $\Phi_1(x, y)$ в области правого квадранта и $\Phi_2(x, y)$ — в области левого квадранта. Ищем функции $\Phi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ в виде

$$\Phi_i(x, y) = \int_0^\infty [A_i(\alpha) + (-1)^{i+1} \alpha x B_i(\alpha)] \exp[(-1)^i \alpha x] \cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+(-1)^{i+1}\int_0^\infty [C_i(\beta)+\beta y D_i(\beta)]\exp[-\beta y]\sin(\beta x)\,d\beta \tag{1.1}$$

($i=1,\ 2;\ 0\leqslant y<\infty,\ \ 0\leqslant x<\infty$ при $i=1$, $-\infty<x\leqslant 0$ при $i=2$)

Здесь $A_i(\alpha)$, $B_i(\alpha)$, $C_i(\beta)$, $D_i(\beta)$ ($i=1,\ 2$) — неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий и условий контакта.



Фиг. 1.

Используя обычные формулы для определения напряжений и перемещений [15], будем иметь

$$\sigma_x^{(1)}=-\int_0^\infty \alpha^2[A_1(\alpha)+\alpha x B_1(\alpha)]e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)\,d\alpha+$$

$$+\int_0^\infty \beta^2[C_1(\beta)-2D_1(\beta)+\beta y D_1(\beta)]e^{-\beta y}\sin(\beta x)\,d\beta$$

$$\sigma_y^{(1)}=\int_0^\infty \alpha^2[A_1(\alpha)-2B_1(\alpha)+\alpha x B_1(\alpha)]e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)\,d\alpha-$$

$$-\int_0^\infty \beta^2[C_1(\beta)+\beta y D_1(\beta)]e^{-\beta y}\sin(\beta x)\,d\beta$$

$$\tau_{xy}^{(1)}=\int_0^\infty \alpha^2[A_1(\alpha)-B_1(\alpha)+\alpha x B_1(\alpha)]e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)\,d\alpha+$$

$$+\int_0^\infty \beta^2[C_1(\beta)-D_1(\beta)+\beta y D_1(\beta)]e^{-\beta y}\cos(\beta x)\,d\beta$$

$$U_1 = \frac{1}{E_1}\left\{\int_0^\infty \alpha\left[A_1(\alpha)(1+\nu_1) + B_1(\alpha)(1-\nu_1) + \right.\right.$$

$$\left. + \alpha x B_1(\alpha)(1+\nu_1)\right] e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$\left. - \int_0^\infty \beta\left[C_1(\beta)(1+\nu_1) - 2D_1(\beta) + \beta y D_1(\beta)(1+\nu_1)\right] e^{-\beta y}\cos(\beta x)\, d\beta\right\}$$

$$V_1 = \frac{1}{E_1}\left\{\int_0^\infty \alpha\left[A_1(\alpha)(1+\nu_1) - 2B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)(1+\nu_1)\right] e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)\, d\alpha + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \beta\left[C_1(\beta)(1+\nu_1) + D_1(\beta)(1-\nu_1) + \beta y D_1(\beta)(1+\nu_1)\right] e^{-\beta y}\sin(\beta x)\, d\beta\right\}$$

$$\sigma_x^{(2)} = -\int_0^\infty \alpha^2\left[A_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)\right] e^{\alpha x}\cos(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta^2\left[C_2(\beta) - 2D_2(\beta) + \beta y D_2(\beta)\right] e^{-\beta y}\sin(\beta x)\, d\beta$$

$$\sigma_y^{(2)} = \int_0^\infty \alpha^2\left[A_2(\alpha) - 2B_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)\right] e^{\alpha x}\cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2\left[C_2(\beta) + \beta y D_2(\beta)\right] e^{-\beta y}\sin(\beta x)\, d\beta \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = \int_0^\infty \alpha^2\left[A_2(\alpha) - B_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)\right] e^{\alpha x}\sin(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2\left[D_2(\beta) - C_2(\beta) - \beta y D_2(\beta)\right] e^{-\beta y}\cos(\beta x)\, d\beta$$

$$U_2 = \frac{1}{E_2}\left\{-\int_0^\infty \alpha\left[A_2(\alpha)(1+\nu_2) + B_2(\alpha)(1-\nu_2) - \right.\right.$$

$$\left. - \alpha x B_2(\alpha)(1+\nu_2)\right] e^{\alpha x}\cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta\left[C_2(\beta)(1+\nu_2) - 2D_2(\beta) + \right.$$

$$\left.\left. + \beta y D_2(\beta)(1+\nu_2)\right] e^{-\beta y}\cos(\beta x)\, d\beta\right\}$$

$$V_2 = \frac{1}{E_2}\left\{\int_0^\infty \alpha\left[A_2(\alpha)(1+\nu_2) - 2B_2(\alpha) - \right.\right.$$

$$\left. - \alpha x B_2(\alpha)(1+\nu_2)\right] e^{\alpha x}\sin(\alpha y)\,d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta\left[C_2(\beta)(1+\nu_2) + D_2(\beta)(1-\nu_2) + \right.$$

$$\left.\left. + \beta y D_2(\beta)(1+\nu_2)\right] e^{-\beta y}\sin(\beta x)\,d\beta\right\}$$

где E_i и ν_i $(i = 1, 2)$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно, U_1, V_1, $\tau_{xy}^{(1)}$ и $\sigma_y^{(1)}$ — перемещения и напряжения точек правого квадранта, а U_2, V_2, $\tau_{xy}^{(2)}$ и $\sigma_y^{(2)}$ — перемещения и напряжения точек левого квадранта.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} &V_1(x, 0) = f_1(x) && (0 \leqslant x \leqslant a_1) \\ &\sigma_y^{(1)}(x, 0) = 0 && (a_1 < x < \infty) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &V_2(x, 0) = f_2(x) && (-a_2 \leqslant x \leqslant 0) \\ &\sigma_y^{(2)}(x, 0) = 0 && (-\infty < x < -a_2) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0 \qquad (0 < x < \infty) \tag{1.5}$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0 \qquad (-\infty < x < 0) \tag{1.6}$$

а условия контакта или жесткого соединения квадрантов выразятся равенствами

$$\begin{aligned} &U_1(0, y) = U_2(0, y) && V_1(0, y) = V_2(0, y) \\ &\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) && \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Удовлетворяя условиям (1.5) и (1.6), получим

$$C_i(\beta) = D_i(\beta) \qquad (i = 1, 2) \tag{1.8}$$

Используя граничные условия (1.3) и (1.4), получаем следующую систему «парных» интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \beta D_1(\beta)\sin(\beta x)\,d\beta = \frac{E_1}{2} f_1(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant a_1 \\ &\int_0^\infty \beta^2 D_1(\beta)\sin(\beta x)\,d\beta = \int_0^\infty \alpha^2\left[A_1(\alpha) - 2B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)\right] e^{-\alpha x}\,d\alpha \\ &\qquad\qquad a_1 < x < \infty \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\int_0^\infty \beta D_2(\beta)\sin(\beta x)\,d\beta = -\frac{E_2}{2}f_2(x) \qquad -a_2 \leqslant x \leqslant 0$$

$$\int_0^\infty \beta^2 D_2(\beta)\sin(\beta x)\,d\beta = -\int_0^\infty \alpha^2[A_2(\alpha)-2B_2(\alpha)-\alpha x B_2(\alpha)]e^{\alpha x}d\alpha \tag{1.10}$$

$$-\infty < x < -a_2$$

Удовлетворив условиям контакта двух материалов (1.7) и пользуясь при этом формулами обращения для преобразования Фурье, получим следующие соотношения:

$$A_1(\alpha) = A_2(\alpha)$$

$$\alpha B_2(\alpha) = 2\alpha A_1(\alpha) - \alpha B_1(\alpha) - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta^3 D_1(\beta)\,d\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta^3 D_2(\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\beta$$

$$\alpha A_1(\alpha)\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)-\frac{2}{E_1}\alpha B_1(\alpha)+\frac{2}{E_2}\alpha B_2(\alpha) = 0 \tag{1.11}$$

$$\alpha A_1(\alpha)\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}+\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)+\alpha B_1(\alpha)\frac{1-\nu_1}{E_1}+\alpha B_2(\alpha)\frac{1-\nu_2}{E_2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[\frac{\nu_1-1}{E_1}\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]D_1(\beta)\,d\beta +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[\frac{\nu_2-1}{E_2}\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1+\nu_2}{E_2}\frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]D_2(\beta)\,d\beta$$

Из системы уравнений (1.11), выразив $\alpha A_1(\alpha) = \alpha A_2(\alpha)$, $\alpha B_1(\alpha)$ и $\alpha B_2(\alpha)$ через функции $D_1(\beta)$ и $D_2(\beta)$, получим:

$$\alpha A_1(\alpha) = \alpha A_2(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[n_1\mu_1\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\mu_1\frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\mu_2\frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]D_1(\beta)\,d\beta+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[n_2\mu_3\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\mu_3\frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\mu_4\frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]D_2(\beta)\,d\beta \tag{1.12}$$

$$\alpha B_1(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[n_1\mu_4 \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \mu_1 \frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - \mu_3 \frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right] D_1(\beta)\,d\beta +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[n_2 \frac{\mu_5}{2} \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\mu_3}{2} \frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - \mu_2 \frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right] D_2(\beta)\,d\beta \quad (1.13)$$

$$\alpha B_2(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[n_1\mu_6 \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \mu_6 \frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - 2\mu_6 \frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right] D_1(\beta)\,d\beta +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[n_2\mu_7 \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \mu_7 \frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - 2\mu_6 \frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right] D_2(\beta)\,d\beta \quad (1.14)$$

где введены обозначения:

$$\mu_1 = 2\,\frac{(\nu_1+1)(m+1)}{\nu_1+1+(3-\nu_2)m}\,\frac{1}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_2 = 4\,\frac{(2-\nu_1-\nu_2)}{1+\nu_1+(3-\nu_2)m}\,\frac{m}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_3 = 2\,\frac{(\nu_2+1)(m+1)}{1+\nu_1+(3-\nu_2)m}\,\frac{m}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_4 = \frac{1+\nu_1}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}; \qquad \mu_5 = 2\,\frac{(1+\nu_2)m}{(3-\nu_1)+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_6 = \frac{1+\nu_1}{(3-\nu_2)m+1+\nu_1}; \qquad \mu_7 = \frac{(\nu_2+1)m}{(3-\nu_2)m+1+\nu_1}$$

$$m = \frac{E_1}{E_2}; \qquad n_1 = \frac{\nu_1-1}{\nu_1+1}; \qquad n_2 = \frac{\nu_2-1}{\nu_2+1} \quad (1.15)$$

Используя результаты работы [9], выразим функции $\beta D_1(\beta)$ и $\beta D_2(\beta)$ из парных интегральных уравнений (1.9) и (1.10) через функции $A_1(\alpha)$, $B_1(\alpha)$ и $B_2(\alpha)$

$$\beta D_1(\beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{a_1} \Psi_1(t)\,J_0(\beta t)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{a_1}^\infty F_1(t)\,J_0(\beta t)\,dt \quad (1.16)$$

$$\beta D_2(\beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{a_2} \Psi_2(t)\,J_0(\beta t)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{a_2}^\infty F_2(t)\,J_0(\beta t)\,dt \quad (1.17)$$

$$\Psi_1(t) = \frac{d}{dt}\,\frac{E_1}{2}\int_0^t \frac{x f_1(x)\,dx}{\sqrt{t^2-x^2}} \quad (1.18)$$

$$F_1(t) = t\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\, K_0(\alpha t)\, d\alpha - 2t\int_0^\infty \alpha^2 B_1(\alpha)\, K_0(\alpha t)\, d\alpha +$$

$$+ t^2\int_0^\infty \alpha^3 B_1(\alpha)\, K_1(\alpha t)\, d\alpha \tag{1.19}$$

$$\Psi_2(\tau) = \frac{d}{d\tau}\,\frac{E_2}{2}\int_0^\tau \frac{x f_2(x)\, dx}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} \tag{1.20}$$

$$F_2(\tau) = \tau\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\, K_0(\alpha\tau)\, d\alpha - 2\tau\int_0^\infty \alpha^2 B_2(\alpha)\, K_0(\alpha\tau)\, d\alpha +$$

$$+ \tau^2\int_0^\infty \alpha^3 B_2(\alpha)\, K_1(\alpha\tau)\, d\alpha \tag{1.21}$$

$J_i(x)$ – функции Бесселя первого рода с действительным аргументом, а $K_i(x)$ – функции Макдональда. После подстановки значений функций $\beta D_1(\beta)$ и $\beta D_2(\beta)$ из (1.16) и (1.17) в соотношения (1.12), (1.13) и (1.14) выразим $\alpha A_2(\alpha)$; $\alpha B_1(\alpha)$ и $\alpha B_2(\alpha)$ через $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$

$$\alpha A_1(\alpha) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{a_1} \Psi_1(t)\Big\{\left[(n_1+1)\mu_1 + \mu_2\right] K_0(\alpha t) -$$

$$-\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\Big\}\, dt + \frac{4}{\pi^2}\int_{a_1}^\infty F_1(t)\Big\{\left[(n_1+1)\mu_1 + \mu_2\right] K_0(\alpha t) -$$

$$-\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\Big\}\, dt + \frac{4}{\pi^2}\int_0^{a_2} \Psi_2(\tau)\Big\{\left[(n_2+1)\mu_3 + \mu_2\right] K_0(\alpha\tau) -$$

$$-\left(\mu_3 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\Big\}\, d\tau + \frac{4}{\pi^2}\int_{a_2}^\infty F_2(\tau)\Big\{\left[(n_2+1)\mu_3 + \mu_2\right] K_0(\alpha\tau) -$$

$$-\left(\mu_3 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\Big\}\, d\tau \tag{1.22}$$

$$\alpha B_1(\alpha) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{a_1} \Psi_1(t)\Big\{\left[(n_1+1)\mu_4 - \mu_5\right] K_0(\alpha t) -$$

$$
-\left(\mu_4-\frac{\mu_5}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\Big\}\, dt+\frac{4}{\pi^2}\int_{a_1}^{\infty} F_1(t)\Big\{\left[(n_1+1)\mu_4-\mu_5\right] K_0(\alpha t)-
$$

$$
-\left(\mu_4-\frac{\mu_5}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\Big\}\, dt+\frac{2}{\pi^2}(n_2-1)\mu_3\int_0^{a_2}\Psi_2(\tau) K_0(\alpha\tau)\, d\tau+
$$

$$
+\frac{2}{\pi^2}(n_2-1)\mu_3\int_{a_2}^{\infty} F_2(\tau) K_0(\alpha\tau)\, d\tau \tag{1.23}
$$

$$
\alpha B_2(\alpha)=\frac{4}{\pi^2}(n_1-1)\mu_6\int_0^{a_1}\Psi_1(t) K_0(\alpha t)\, dt+
$$

$$
+\frac{4}{\pi^2}(n_1-1)\mu_6\int_{a_1}^{\infty} F_1(t) K_0(\alpha t)\, dt+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{a_2}\Psi_2(\tau)\Big\{\left[(n_2+1)\mu_7-2\mu_6\right] K_0(\alpha\tau)-
$$

$$
-(\mu_7-\mu_6)\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\Big\}\, d\tau+\frac{4}{\pi^2}\int_{a_2}^{\infty} F_2(\tau)\Big\{\left[(n_2+1)\mu_7-2\mu_6\right] K_0(\alpha\tau)-
$$

$$
-(\mu_7-\mu_6)\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\Big\}\, d\tau \tag{1.24}
$$

При получении формул (1.22), (1.23) и (1.24) были использованы значения интегралов, приведенные в работе [9].

Подставляя значения функций $\alpha A_1(\alpha)$, $\alpha B_1(\alpha)$ и $\alpha B_2(\alpha)$ из (1.22), (1.23) и (1.24) в (1.19) и (1.21), для определения $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$ получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая после некоторых преобразований [9] примет вид:

$$
\begin{aligned}
F_1(z)&=\Omega_1(z)+\int_{a_1}^{\infty} F_1(t) K_1(z,t)\, dt+\int_{a_2}^{\infty} F_2(\tau) K_2(z,\tau)\, d\tau\\
F_2(z)&=\Omega_2(z)+\int_{a_1}^{\infty} F_1(t) K_3(z,t)\, dt+\int_{a_2}^{\infty} F_2(\tau) K_4(z,\tau)\, d\tau
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

где

$$
\Omega_1(z)=\frac{4}{\pi^2}z\int_0^{a_1}\Psi_1(t)\left[(\omega_1-2\omega_2)\frac{\ln t/z}{t^2-z^2}+\omega_3\frac{z^4-t^4+4t^2z^2\ln t/z}{(t^2-z^2)^3}\right] dt+
$$

$$+\frac{4}{\pi^2} z \int_0^{a_2} \Psi_2(\tau)\left[m(\omega_4+2\omega_5)\frac{\ln \tau/z}{\tau^2-z^2} -\right.$$

$$\left.- m(\omega_6-\omega_5)\frac{\tau^2-z^2-2\tau^2\ln \tau/z}{(\tau^2-z^2)^2}\right] d\tau \tag{1.26}$$

$$\Omega_2(z)=\frac{4}{\pi^2} z \int_0^{a_1} \Psi_1(t)\left[(\omega_4+2\omega_6)\frac{\ln t/z}{t^2-z^2}+\right.$$

$$\left.+(\omega_6-\omega_5)\frac{t^2-z^2-2t^2\ln t/z}{(t^2-z^2)^2}\right] dt +$$

$$+\frac{4}{\pi^2} z \int_0^{a_2} \Psi_2(\tau)\left[(\omega_7+2\omega_8)\frac{\ln \tau/z}{\tau^2-z^2}+\omega_9\frac{z^4-\tau^4+4\tau^2z^2\ln \tau/z}{(\tau^2-z^2)^3}\right] d\tau$$

$$K_1(z,t)=\frac{4}{\pi^2} z\left[(\omega_1-2\omega_2)\frac{\ln t/z}{t^2-z^2}+\omega_3\frac{z^4-t^4+4t^2z^2\ln t/z}{(t^2-z^2)^3}\right]$$

$$K_2(z,\tau)=\frac{4}{\pi^2} z\left[m(\omega_4+2\omega_5)\frac{\ln \tau/z}{\tau^2-z^2}-m(\omega_6-\omega_5)\frac{\tau^2-z^2-2\tau^2\ln \tau/z}{(\tau^2-z^2)^2}\right]$$

$$\tag{1.27}$$

$$K_3(z,t)=\frac{4}{\pi^2} z\left[(\omega_4+2\omega_6)\frac{\ln t/z}{t^2-z^2}+(\omega_6-\omega_5)\frac{t^2-z^2-2t^2\ln t/z}{(t^2-z^2)^2}\right]$$

$$K_4(z,\tau)=\frac{4}{\pi^2} z\left[(\omega_7+2\omega_8)\frac{\ln \tau/z}{\tau^2-z^2}+\omega_9\frac{z^4-\tau^4+4\tau^2z^2\ln \tau/z}{(\tau^2-z^2)^3}\right]$$

$$\omega_1=(n_1+1)\mu_1+\mu_2-2(n_1+1)\mu_4+2\mu_5;\quad \omega_2=\mu_1+\frac{\mu_2}{2}-2\mu_4+\mu_5$$

$$\omega_3=\mu_5-2\mu_4;\quad \omega_4=(n_1+1)\mu_1+\mu_2-2(n_1-1)\mu_6;\quad \omega_5=-\mu_3-\frac{\mu_2}{2}$$

$$\tag{1.28}$$

$$\omega_6=(n_1-1)\mu_6;\quad \omega_7=\mu_2+(n_2+1)\mu_3-2(n_2+1)\mu_7+4\mu_8$$

$$\omega_8=(n_2+1)\mu_7-2\mu_8;\quad \omega_9=2(\mu_8-\mu_7)$$

Для решения системы уравнений (1.25) сперва покажем, что

$$\int_{a_1}^{\infty}|K_1(z,t)|\,dt+\int_{a_2}^{\infty}|K_2(z,\tau)|\,d\tau<1$$

$$\int_{a_1}^{\infty}|K_3(z,t)|\,dt+\int_{a_2}^{\infty}|K_4(z,\tau)|\,d\tau<1 \tag{1.29}$$

Действительно, каждое ядро $K_i(z, t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ имеет вид, аналогичный, приведенному в работе [9]. Используя результаты оценок, приведенных в работе [9], доказывается, что

$$\int_{a_1}^{\infty} |K_1(z, t)|\,dt + \int_{a_2}^{\infty} |K_2(z, \tau)|\,d\tau <$$

$$< \frac{4[\nu_1 + (2-\nu_2)m + m(m+1)] + [1+\nu_1-(1+\nu_2)m][1+\nu_2+(3-\nu_2)m]}{[1+\nu_1+(3-\nu_2)m][3-\nu_1+(1+\nu_2)m]} \tag{1.30}$$

$$\int_{a_1}^{\infty} |K_3(z, t)|\,dt + \int_{a_2}^{\infty} |K_4(z, \tau)|\,d\tau <$$

$$< \frac{4[m+1+m(\nu_2 m+2-\nu_1)] + [(1+\nu_2)m-(1+\nu_1)][3-\nu_1+(1+\nu_2)m]}{[1+\nu_1+(3-\nu_2)m][3-\nu_1+(1+\nu_2)m]}$$

Когда $0 \leqslant \nu_1, \nu_2 \leqslant 1/2$, при любом $m > 0$ правые части (1.30) меньше единицы, тем самым доказывается справедливость утверждения (1.29). Очевидно, что функции $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ ограничены сверху и стремятся к нулю, когда $t \to \infty$.

Решая систему интегральных уравнений (1.26) методом последовательных приближений, получим выражения функций $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$. Далее, по формулам (1.16), (1.17), (1.22), (1.23), (1.24) последовательно можно определить все искомые функции, а следовательно, и напряжения, и перемещения в любой точке составной полуплоскости.

Нормальные напряжения под штампом и перемещения вне штампа на линии $y = 0$, выраженные через функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$, имеют вид

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \frac{2}{\pi}\frac{x}{a_1}\frac{F_1(a_1) - \Psi_1(a_1)}{\sqrt{a_1^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi}x\int_x^{a_1}\frac{t\Psi_1'(t) - \Psi_1(t)}{t^2\sqrt{t^2 - x^2}}\,dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi}x\int_{a_1}^{\infty}\frac{tF_1'(t) - F_1(t)}{t^2\sqrt{t^2 - x^2}}\,dt + W_1(x) \qquad 0 \leqslant x < a_1$$

$$\sigma_y^{(2)}(-x, 0) = \frac{2}{\pi}\frac{x}{a_2}\frac{\Psi(a_2) - F_2(a_2)}{\sqrt{a_2^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi}x\int_x^{a_2}\frac{\tau\Psi_2'(\tau) - \Psi_2(\tau)}{\tau^2\sqrt{\tau^2 - x^2}}\,d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\pi}x\int_{a_2}^{\infty}\frac{\tau F_2'(\tau) - F_2(\tau)}{\tau^2\sqrt{\tau^2 - x^2}}\,d\tau + W_2(x) \qquad 0 < x \leqslant a_2 \tag{1.31}$$

$$V_1(x,\,0) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_1}\int_0^{a_1}\frac{\Psi_1(t)\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}} + \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_1}\int_{a_1}^{x}\frac{F_1(t)\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \qquad a_1 \leqslant x < \infty$$

$$\tag{1.32}$$

$$V_2(-x,\,0) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_2}\int_0^{a_2}\frac{\Psi_2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{x^2-\tau^2}} + \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_2}\int_{a_1}^{x}\frac{F_2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{x^2-\tau^2}} \qquad a_2 \leqslant x < \infty$$

где

$$W_1(x) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^x \Psi_1(z)\left\{\left[\omega_1\frac{2x}{(x^2-t^2)^2} - \omega_2\frac{10xt^2+6x^3}{(x^2-t^2)^3} - \right.\right.$$

$$\left. - \omega_2\frac{8xt^2(5x^2+t^2)}{(x^2-t^2)^4}\right]\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right) +$$

$$+ \omega_2\frac{7x^2+3t^2}{(x^2-t^2)^2\sqrt{x^2-t^2}} - \omega_1\frac{1}{(x^2-t^2)\sqrt{x^2-t^2}} +$$

$$\left. + \omega_3\frac{6x^4+27x^2t^2}{(x^2-t^2)^{7/2}}\right\}dt + \frac{4}{\pi^2}\int_x^{a_1}\Psi_1(t)\left\{(\omega_1-2\omega_2)\frac{1}{(t^2-x^2)} - \right.$$

$$- \omega_3\frac{13x^2t^2-2x^4}{(t^2-x^2)^3} + \left[-(\omega_1-2\omega_2)\frac{x}{(t^2-x^2)^{3/2}} + \right.$$

$$\left.\left. + \omega_3\frac{3xt^4+12x^3t^2}{(t^2-x^2)^{7/2}}\right]\arccos\frac{x}{t}\right\}dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int_{a_1}^{\infty}F_1(t)\left\{(\omega_1-2\omega_2)\frac{1}{t^2-x^2} - \omega_3\frac{13x^2t^2-2x^4}{(t^2-x^2)^3} + \right.$$

$$\left. + \left[-(\omega_1-2\omega_2)\frac{x}{(t^2-x^2)^{3/2}} + \omega_3\frac{3xt^4+12x^3t^2}{(t^2-x^2)^{7/2}}\right]\arccos\frac{x}{t}\right\}dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int_0^x \Psi_2(\tau)\left\{\left[m\omega_4\frac{2x}{x^2-\tau^2} + m\omega_6\frac{8x\tau^2}{(x^2-\tau^2)^3} - \right.\right.$$

$$\left. - 2m\omega_5 x\frac{\tau^2+3x^2}{(x^2-\tau^2)^3}\right]\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right) +$$

$$\left. + \left[-m\omega_4\frac{1}{(x^2-\tau^2)^{3/2}} - m\omega_6\frac{2x^2+3\tau^2}{(x^2-\tau^2)^{5/2}} + m\omega_5\frac{5x^2}{(x^2-\tau^2)^{5/2}}\right]\right\}d\tau +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int_x^{a_2}\Psi_2(\tau)\left\{m\omega_4\frac{1}{\tau^2-x^2} - m\omega_6\frac{2\tau^2+x^2}{(\tau^2-x^2)^2} - m\omega_5\frac{3x^2}{(\tau^2-x^2)^2} + \right.$$

$$
+\left[-m\omega_4\frac{x}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}+m\omega_6\frac{3x\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}+\right.
$$

$$
\left.+m\omega_5\frac{2x^3+x\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}\right]\arccos\frac{x}{\tau}\Bigg\}d\tau+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_1}^{\infty}F_2(\tau)\left\{\left[m\omega_4\frac{1}{\tau^2-x^2}-\right.\right.
$$

$$
\left.-m\omega_6\frac{2\tau^2+x^2}{(\tau^2-x^2)^2}-m\omega_5\frac{3x^2}{(\tau^2-x^2)^2}\right]+\left[-m\omega_4\frac{x}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}+\right.
$$

$$
\left.\left.+m\omega_6\frac{3x\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}+m\omega_5\frac{2x^3+x\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}\right]\arccos\frac{x}{\tau}\right\}d\tau
$$

$$
W_2(x)=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{x}\Psi_1(t)\left\{\left[\frac{2x}{(x^2-t^2)}\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)-\right.\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{(x^2-t^2)^{3/2}}\right]\omega_4+\left[\frac{2x^2+3t^2}{(x^2-t^2)^{5/2}}-\frac{8xt^2}{(x^2-t^2)^3}\times\right.
$$

$$
\left.\times\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)\right]\omega_5+\omega_6\left[\frac{5x^2}{(x^2-t^2)^{5/2}}-2x\frac{t^2+3x^2}{(x^2-t^2)^3}\times\right.
$$

$$
\left.\left.\times\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)\right]\right\}dt+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_x^{a_1}\Psi_1(t)\left\{\omega_4\left[\frac{1}{t^2-x^2}-\right.\right.
$$

$$
\left.-\frac{x}{(t^2-x^2)^{3/2}}\arccos\frac{x}{t}\right]+\omega_5\left[\frac{2t^2+x^2}{(t^2-x^2)^2}-\frac{3xt^2}{(t^2-x^2)^{5/2}}\arccos\frac{x}{t}\right]+
$$

$$
\left.+\omega_6\left[\frac{2x^3+xt^2}{(t^2-x^2)^{5/2}}\arccos\frac{x}{t}-\frac{3x^2}{(t^2-x^2)^2}\right]\right\}dt+
$$

$$
+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{x}\Psi_2(\tau)\left\{\omega_4\left[\frac{2x}{(x^2-\tau^2)^2}\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right)-\frac{1}{(x^2-\tau^2)^{3/2}}\right]+\right.
$$

$$
+\omega_5\left[\frac{7x^2+3\tau^2}{(x^2-\tau^2)^{5/2}}-\frac{10x\tau^2+6x^3}{(x^2-\tau^2)^3}\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right)\right]+
$$

$$
\left.+\omega_6\left[\frac{6x^4+27x^2\tau^2}{(x^2-\tau^2)^{7/2}}-\frac{40x^3\tau^2+8x\tau^4}{(x^2-\tau^2)^4}\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right)\right]\right\}d\tau+
$$

$$
+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)\left\{\omega_4\left[\frac{1}{t^2-x^2}-\frac{x}{(t^2-x^2)^{3/2}}\arccos\frac{x}{t}\right]+\right.
$$

$$
+\omega_5\left[\frac{2t^2+x^2}{(t^2-x^2)^2}-\frac{3xt^2}{(t^2-x^2)^{5/2}}\arccos\frac{x}{t}\right]+
$$

$$+\omega_8\left[\frac{2x^3+xt^2}{(t^2-x^2)^{5/2}}\arccos\frac{x}{t}-\frac{3x^2}{(t^2-x^2)^2}\right]\Bigg\}dt+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int_x^{a_2}\Psi_2(\tau)\left\{\frac{(\omega_7+2\omega_8)}{(\tau^2-x^2)}-\omega_7\frac{x}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}\arccos\frac{x}{\tau}+\right.$$

$$+2\omega_8\frac{x}{(\tau^2-x^2)\sqrt{\tau^2-x^2}}+\omega_9\left[\frac{3x\tau^4+12x^3t^2}{(\tau^2-x^2)^{7/2}}\arccos\frac{x}{\tau}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{13x^2\tau^2-2x^4}{(\tau^2-x^2)^3}\right]\right\}d\tau+\frac{4}{\pi^2}\int_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\left\{\frac{\omega_7+2\omega_8}{\tau^2-x^2}-\right.$$

$$-\omega_7\frac{x}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}\arccos\frac{x}{\tau}+2\omega_8\frac{x}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}+$$

$$\left.+\omega_9\left[\frac{3x\tau^4+12x^3\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{7/2}}\arccos\frac{x}{\tau}-\frac{13x^2\tau^2-2x^4}{(\tau^2-x^2)^3}\right]\right\}d\tau$$

Формулы (1.31) и (1.32) определяют напряжения и перемещения для заданных величин контакта a_1, a_2.

Если эти величины не заданы, то их можно определить из условия непрерывности нормальных напряжений, что выражается трансцендентными уравнениями

$$\Psi_1(a_1)-F_1(a_1)=0,\quad \Psi_2(a_2)-F_2(a_2)=0 \tag{1.33}$$

В частном случае, когда $E_1=E_2$, $\nu_1=\nu_2$, $a_1=a_2$, получим решение задачи о вдавливании жесткого штампа симметричного очертания на упругую однородную полуплоскость, совпадающее с решением, полученным М. А. Садовским [14].

2. В качестве примера рассмотрим задачу определения зоны контакта, когда основание штампа имеет форму

$$f_1(x)=\delta(1-x)\quad 0\leqslant x\leqslant a_1;\quad f_2(x)=\delta(1-x)\quad -a_2\leqslant x\leqslant 0$$

Тогда из (1.18) и (1.20) имеем

$$\Psi_1(t)=\frac{E_1\delta}{2}\left(1-\frac{\pi t}{2}\right);\quad \Psi_2(t)=\frac{E_2\delta}{2}\left(1-\frac{\pi t}{2}\right) \tag{2.1}$$

Решая систему уравнений (1.25) совместно с первым уравнением соотношений (1.33) с учетом (2.1) при $\nu_1=\nu_2=\frac{1}{3}$ в зависимости от отношения $m=E_1/E_2=1, 2, 3, 5$ получим соответственно следующие размеры зоны контакта: a_1, $0.96a_1$, $0.82a_1$, $0.80a_1$.

Институт механики АН АрмССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 24 X 1978

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Հ. Ֆ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է կամայական տեսքի հիմք ունեցող կոշտ դրոշմի ճնշման խնդիրը՝ կիրառված առաձգական բաղադրյալ կիսահարթության հորիզոնական եզրի մի մասի վրա։ Երկու քառորդ հարթությունները, որոնք պատրաստված են իզոտրոպ, բայց տարբեր նյութերից իրար միացված են այնպես, որ կազմում են մի կիսահարթություն։ Կիսահարթության հորիզոնական եզրի վրա կիրառված է ողորկ հիմքով կոշտ դրոշմ այնպես, որ դրոշմը գտնվում է երկու նյութերի վրա միաժամանակ և նրա դիրքը նյութերի կոնտակտի գծի նկատմամբ սիմետրիկ չէ։ Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով։

Ինտեգրման գործակիցների որոշումը հանգել է երկու զույգ ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի լուծմանը, ընդ որում զույգ ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծումը բերվել է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծմանը։ Ստացված են կոնտակտի չափը որոշող երկու տրանսցենդենտ հավասարումներ։ Մասնավոր դեպքում, երբ դրոշմը սիմետրիկ է կոնտակտի գծի նկատմամբ և $E_1=E_2$, $\nu_1=\nu_2$, $\alpha_1=\alpha_2$, ստացվում է համասեռ կիսահարթության եզրի վրա կոշտ դրոշմի ճնշման հայտնի խնդիրը։

Կոնտակտի չափի որոշման համար բերված է թվային օրինակ։

A CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC COMPOUND SEMI-PLANE

V. S. TONOYAN, H. F. MINASIAN

Summary

The present paper considers the problem of pressing a rigid punch into a part of the boundary of an elastic compound semi-plane. The semi-plane consists of two quadrants made of different materials. On the horizontal edge of the semi-plane the rigid punch with a smooth base is pressed in such a wayth at the punch is located asymmetrically on the two materials simultaneously. The problem is solved by the Fourier method.

The determination of integration coefficients is reduced to the solution of a system of two dual integral equations. The solution of the latter is reduced to the system of Fredholm's integral equations of the second kind. Two transcendent equations are derived to define the dimensions of the contact zones.

A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1962, № 1.
2. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача для линейно-деформируемого основания при наличии сил сцепления. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
3. *Валков Н. М.* Плоская контактная задача для двухслойного основания при действии симметричной нагрузки на жесткий штамп. Изв. АН СССР, механика и машиностроение, 1963, № 4.
4. *Приварников А. К., Шевляков Ю. А.* Контактная задача для многослойного основания. Прик. мех., 1962, т. 8, вып. 5.
5. *Ильмин В. М., Приварников А. К.* Действие системы штампов на упругое многослойное основание. Прикл. мех., 1971, т. 7, вып. 6.
6. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Задачи теории упругости для многослойных сред. М., Изд-во «Наука», 1973.
7. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* О контактных задачах для упругих многослойных сред. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, том 1, Тбилиси, изд-во «Мецниереба», 1973.
8. *Knauss W. G.* Fracture mechanics and the time dependent strength of Adhesive Joints. J. Composite materials, 1971, Vol. 5, April, p.p. 176 - 192.
9. *Тоноян В. С.* О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением. Изв. АН АрмССР, механика, 1968, т. 21, № 3.
10. *Ашбаух Н. Е.* Развитие конечной трещины, перпендикулярной поверхности раздела двух материалов. Прикл. мех., 1973, т. 40, № 2, изд-во «Мир».
11. *Ашбаух Н. Е.* Напряжение в слоистых композитах, содержащих разорванный слой. Прикл. мех., 1973, т. 40, № 2, изд-во «Мир».
12. *Bogy D. B.* The plane elastostatic solution for a symmetrically loaded crack in a strip composite. Int. J. Engng. sci., 1973, Vol. 11, No. 9.
13. *Боджи Д. Б.* Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по граням. Прикл. мех. ,1973, т. 40, № 2, изд-во «Мир».
14. *Sadowski M. A.* Zweidimensinale probleme der elastitatstheorie. Ztschr. für angew. Math. und Mech., 1928, Bd8.
15. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд. «Наука», 1966.