

Е. В. КОВАЛЕНКО

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ
 ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ
 С ТОНКИМ УСИЛИВАЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ

Рассмотрено интегральное уравнение второго рода на конечном интервале с ядром, зависящим от разности аргументов. К уравнению такого типа приводится ряд плоских контактных задач для линейно-деформируемых оснований, поверхность которых усилена тонким упругим покрытием.

В данной работе установлена разрешимость указанного уравнения в функциональных пространствах, важных в приложениях, и построено решение в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра.

В качестве примера рассмотрена контактная задача теории упругости о вдавлении штампа в упругую полосу, покрытую «винклеровскими» пружинами и лежащую без трения на жестком основании. Результаты работы могут также найти применение в плоских контактных задачах при наличии абразивного износа [1].

1. Пусть поверхность линейно-деформируемого основания усилена по всей длине $|x| < \infty$ тонким упругим слоем, работающим по типу основания Фусса-Винклера. Допустим теперь, что такое слоистое основание нагружено некоторой распределенной нормальной нагрузкой $q(x)$ на участке $|x| \leq a$. Под действием ее граничные точки основания получают перемещение $v(x)$, которое складывается из перемещения $v_1(x)$, возникающего благодаря деформации линейно-деформируемого основания, и перемещения $v_2(x)$, возникающего благодаря чисто местным деформациям покрытия.

Известно, что для линейно-деформируемого основания [2, 3] функция $v_1(x)$ имеет вид

$$v_1(x) = -\frac{1}{\pi \beta_1} \int_{-a}^a q(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \frac{L_1(u)}{u} \cos\left(u \frac{\xi - x}{\mu}\right) du$$

где β_1 — величина, характеризующая физико-механические свойства линейно-деформируемого основания, μ — характерный геометрический параметр.

Функция $v_2(x)$ в общем случае может быть представлена в форме

$$v_2(x) = -kq(x) - \frac{1}{\pi \beta_2} \int_{-a}^a q(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \frac{L_2(u)}{u} \cos\left(u \frac{\xi - x}{\mu}\right) du$$

Здесь величины k , β_2 характеризуют упругие свойства покрытия.

Таким образом, функция $v(x)$, характеризующая перемещения граничных точек всего основания будет иметь вид

$$v(x) = -kq(x) - \frac{1}{\pi a_1} \int_{-a}^a q(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos\left(u \frac{\xi-x}{\lambda}\right) du \quad (1.1)$$

$$L(u) = L_1(u) - iL_2(u), \quad l = \frac{0,5}{\nu} \quad (1.2)$$

Для ряда практически важных случаев $L(u)/u$ в (1.2) удовлетворяет следующим условиям:

- 1) функция $L(u)/u$ непрерывна, вещественна и четна на оси $|u| < \infty$.
- 2) функция

$$\frac{L(u)}{u} \geq 0 \quad (|u| < \infty) \quad (1.3)$$

- 3) функция

$$L(u) = Au + O(u^2) \quad (u \rightarrow 0), \quad \frac{L(u)}{u} = C^2 u^{-2} [1 + O(u^{-1})] \quad (u \rightarrow \infty) \quad (1.4)$$

$$0 < \gamma < 1$$

A, C, γ, δ — постоянные, причем $\delta > \gamma$ при $\gamma > 0.5$, $\delta > 1 - \gamma$ при $\gamma < 0.5$.

Полагая, что в (1.1) $v(x) = g(x)$ — известная функция (задача о штампе), с учетом обозначений $a = k b_1 = p$, $x = a x'$, $\xi = a \xi'$, $i = \mu/a$, $q(x) = \varphi(x')$, $f(x) = a^2 g(x)$ (штрихи в дальнейшем будем опускать), получим интегральное уравнение контактной задачи в безразмерных переменных

$$p g(x) + \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \quad (|x| < 1) \quad (1.5)$$

$$K(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du \quad \left(t = \frac{\xi-x}{\lambda}\right)$$

Исследуем далее структуру решения интегрального уравнения (1.5).

2. Введем некоторые определения для необходимых в дальнейшем пространств.

1. Обозначим через H_γ множество функций $h(x)$ таких

$$\|h\|_{H_\gamma} = \int_{-1}^1 \frac{L(u)}{u} |H(u)|^2 du < \infty, \quad H(u) = \int_{-1}^1 h(x) e^{iux} dx \quad (2.1)$$

Очевидно [4], элементы из H_γ принадлежат некоторой шкале гильбертовых пространств.

2. $L_r(a, b)$ — пространство абсолютно суммируемых на $[a, b]$ со степенью $r \geq 1$ функций с обычной нормой.

3. $C(a, b)$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций.

4. l_r — пространство абсолютно суммируемых со степенью r числовых последовательностей. В работе В. А. Бабешко [4] доказаны следующие:

Лемма 2.1. Любое пространство L_r , $(\gamma + 0.5)^{-1} < r < \infty$, $\gamma \leq 0.5$ и $1 < r < \infty$, $0.5 < \gamma$ вложено в H_γ .

Для исследования структуры решения уравнения (1.5) изучим свойства функции $K(t)$.

Лемма 2.2. Справедливы при $t \rightarrow 0$ оценки

$$K(t) = O(t^{\gamma-1}), \quad \gamma < 0.5; \quad K(t) = O(|\ln |t||), \quad \gamma = 0.5 \\ K(t) = O(1), \quad \gamma > 0.5$$

При $|t| > \varepsilon > 0$ функция $K(t)$ непрерывна.

На основании леммы 2.2 доказывается теорема [4].

Теорема 2.1. Оператор

$$K\varphi = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (2.2)$$

действует из L_r в $C(-T, T)$ вполне непрерывно. Здесь $(2\gamma)^{-1} < r < \infty$, $\gamma \leq 0.5$; $1 < r < \infty$, $0.5 < \gamma$; $T < \infty$.

Теорема 2.2. В пространстве $L_\gamma(-1, 1)$ ($0.25 < \gamma < 1$) решение уравнения (1.5) существует и единственно при любом значении параметров ρ , $\lambda \in (0, \infty)$, если $f(x) \in L_2(-1, 1)$.

Для доказательства умножим (1.5) на $\varphi(x) \in L_2(-1, 1)$ и проинтегрируем по всей оси. Получим

$$\rho \int_{-1}^1 \varphi(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 f(x) \varphi(x) dx \quad (2.3)$$

Здесь нужно учесть, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 1$.

В силу теоремы 2.1 и леммы 2.1 соотношение (2.3) корректно. Из теоремы 2.1 следует, что к уравнению (1.5) применима теория Фредгольма [5], а в силу (2.3) имеем: если $f(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$, то $\varphi(x) = 0$, $|x| < \infty$. Теорема доказана. Далее ограничимся изучением лишь четного случая, то есть предположим, что функции $f(x)$, а следовательно, и $\varphi(\xi)$ в (1.5) — четные. Рассмотрение нечетного случая можно провести аналогичным образом.

3. Будем искать функцию $\varphi(\xi)$ в (1.5) в виде следующего ряда по нормированным полиномам Лежандра [6]:

$$\varphi(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_{2m}^*(\xi), \quad P_n^*(\xi) = \sqrt{\frac{2m+1}{2}} P_n(\xi) \quad (3.1)$$

Известно [5], что они составляют базис в пространстве $L_2(-1, 1)$. В силу теоремы 2.2 ряд (3.1) сходится по норме пространства $L_2(-1, 1)$, а соответствующая последовательность $\{a_i\} \in l_2$ ввиду равенства Парсеваля [5]. Функции $K(t)$ и $f(x)$ разложим соответственно в двойной и одинарный ряды по указанной системе полиномов. Будем иметь

$$K(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(t) P_{2i}^*(\xi) P_{2j}^*(x) \quad (3.2)$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m P_{2m}^*(x) \quad (3.3)$$

В силу леммы 2.2 и ограничений, наложенных на функцию $f(x)$ в теореме 2.2, ряды (3.2), (3.3) сходятся по норме пространства $L_2(-1, 1)$.

Воспользовавшись известным [6] свойством ортогональности полиномов Лежандра, получим

$$c_{ij}(i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) P_{2i}^*(\xi) P_{2j}^*(x) d\xi dx \quad (3.4)$$

$$b_m = \int_{-1}^1 f(x) P_{2m}^*(x) dx \quad (3.5)$$

Подставив в (3.4) $K(t)$ в форме второго равенства (1.5) и используя интеграл [6]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2n}(x) \cos ax dx = \frac{(-1)^n \pi \Gamma(2n+1)}{(2n)! \Gamma(1/2) \cdot 2a} J_{1/2+2n}(a)$$

представим коэффициенты $c_{ij}(\lambda)$ в виде

$$c_{ij}(\lambda) = (-1)^{i+j} \sqrt{4i+1} \sqrt{4j+1} (\pi \lambda) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L(u)}{u^2} J_{1/2+2i}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{1/2+2j}\left(\frac{u}{\lambda}\right) du \quad (3.6)$$

Лемма 3.1. Если функция $f(x) \in L_2(-1, 1)$, то любому решению $\varphi(x)$ из класса $L_2(-1, 1)$ уравнения (1.5) соответствует последовательность чисел $\{a_i\}$ из класса l_2 , удовлетворяющая бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_n = -\frac{1}{p} \sum_{m=0}^{\infty} c_{mn}(\lambda) a_m + \frac{n}{p} b_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

Наоборот, если функция $f(x) \in L_2(-1, 1)$, то любому решению $\{a_n\}$ из класса l_p системы (3.7) соответствует решение $\varphi(x) \in L_2(-1, 1)$ уравнения (1.5) вида (3.1).

Для доказательства, с учетом теоремы 2.2. подставим в интегральное уравнение (1.5) функции $\varphi(\xi)$, $f(x)$, $K(t)$ в виде (3.1)—(3.3) и вычислим интегралы, используя свойство ортогональности полиномов Лежандра [6]. Получим соотношение, в левой и правой частях которого стоят ряды по четным полиномам Лежандра. Приравнявая коэффициенты обеих частей при полиномах одинакового номера, получим бесконечную систему (3.7). Легко производятся и обратные преобразования с учетом соотношения $\|1\|_{L_2(-1,1)} = \|1\|_{l_2}$.

Теорема 3.1. Если функция $f(x) \in L_2(-1, 1)$, то оператор, стоящий в правой части (3.7), действует в пространстве l_2 и является в нем вполне непрерывным [5] при всех $p, \lambda \in (0, \infty)$.

Учитывая поведение ядра интегрального уравнения (1.5) (лемма 2.2) и равенство Парсеваля [5] $\|1\|_{L_2(-1,1)} = \|1\|_{l_2}$, нетрудно показать, что при

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^2(\lambda) < \infty, \quad \{f_k\} \in l_2 \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что оператор, стоящий в правой части (3.7), действует в пространстве последовательностей l_2 и является там вполне непрерывным при $p, \lambda \in (0, \infty)$. Поэтому к системе применима альтернатива Гильберта [7] о разрешимости бесконечных систем. Поскольку соответствующее системе (3.7) решение интегрального уравнения (1.5) существует и единственно в пространстве $L_2(-1, 1)$, то в силу леммы 3.1 существует единственное нетривиальное решение бесконечной алгебраической системы (3.7), принадлежащее пространству l_2 , которое можно найти с любой степенью точности методом последовательных приближений или методом редукции.

Решив систему (3.7), найдем затем по формулам (3.1) решение интегрального уравнения (1.5). При этом обобщенная сила вычисляется по формуле

$$P = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (3.9)$$

4. В качестве примера рассмотрена плоская контактная задача о вдавливания штампа с плоским прямолинейным основанием ширины $2a$ в упругую полосу толщины h , покрытую «винклеровскими» пружинками [8, 9], с упругими характеристиками ν (коэффициент Пуассона) и G (модуль сдвига), лежащую без трения на жестком основании. При этом

$$L_1(u) = L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}, \quad L_2(u) = 0$$

$\lambda = h\alpha^{-1}$, $A = 0.5$, $\beta_1 = G(1 - \nu)^{-1}$, k — коэффициент постели основания Фюсса-Винклера.

Решение задачи может быть получено методом, изложенным в п. 3. При этом значение коэффициента ρ в (1.5) бралось равным единице. Коэффициенты разложения $c_{mn}(\lambda)$ подсчитывались с четырьмя точными знаками после запятой при различных значениях λ и занесены в таблицу 1.

Таблица 1

mn	$\lambda=2$	$\lambda=1$	$\lambda=1/2$	mn	$\lambda=2$	$\lambda=1$	$\lambda=1/2$
00	2.4544	1.4159	0.7477	22	0.4497	0.4481	0.4177
01	-0.3073	-0.1960	-0.0742	03			-0.0100
02	-0.0343	-0.0390	-0.0395	13			-0.0330
11	0.8262	0.7714	0.5805	23			-0.1122
12	-0.1863	-0.1799	-0.1312	33			0.3049

В табл. 2 занесены значения $\varphi(0)$ при различных λ и величины обобщенных P . Отметим, что погрешность приведенных в табл. 2 результатов не превосходит 1.5%.

Таблица 2

$\varphi(0)$			P		
$\lambda=2$	$\lambda=1$	$\lambda=1/2$	$\lambda=2$	$\lambda=1$	$\lambda=1/2$
0.860	1.258	1.774	2.253	3.037	3.949

При этом в урезанной системе (3.7) достаточно было взять не более четырех уравнений.

Автор благодарит В. М. Александрова за ценные советы и помощь.

НИИ механики и прикладной математики
Ростовского государственного
университета

Поступила 23 VI 1978

б. в. 40446640

ՔԱՐԱԿ ՈՒՅԵՎԱՑՆՈՂ ՄԱՍԿՈՒՅՅՈՂ ԳՄԱՅԻՆ ԴԵՅՈՐՄԱՑՎՈՂ
ՀԻՄՔԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՑԻՆ ԽԵԴԻՐՆԵՐԻ
ԼՈՒՄԱՆ ԷՅԵԿՏԻՎ ՄԵՏՈՒԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ռ մ

Գրադրվում է վերջավոր ինտերվալի վրա փաթեթի ախախտի արկարդ սեպի
բնագրու հավասարումների հատուկ դաս, որոնց կորիզները պարունակում են
6 Известия АН Армянской ССР, Механика, № 2

երկրաչափական կամ ֆիզիկական $\lambda \in (0, \infty)$ պարամետր: Այսպիսի համապարտմաների են բերվում բարակ առաձգական ծածկույթներով ուժեղացված մակերևույթներով զծային զեֆորմացիոզ հիմքերի համար, մի շարք նարթ կոնտակտային խնդիրներ:

Կիրառությունների համար կարևոր ֆունկցիաների սարածություններում շուրջ λ տրված ինտեգրալ համապարտմաների լուծելիությունը և կառուցված λ կենկախի լուծում λ անշափ պարամետրի կամայական արժեքների համար:

ON THE EFFECTIVE METHOD OF SOLVING CONTACT PROBLEMS FOR A LINEAR-STRAINED BASIS WITH A THIN REINFORCING COAT

E. V. KOVALENKO

S u m m a r y

Investigated is the special class of integral equations of the second kind of a convolution type on the finite interval whose kernels involve some geometric or physical parameter $\lambda \in (0, \infty)$. To such equations is reduced a series of plane contact problems for linear-strained bases whose surface is reinforced with a thin elastic coat.

The solvability of the integral equations in spaces of functions, significant in supplements, is proved and the solution, effective for any value of the dimensionless parameter λ , is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин А. А. Контактные задачи теории упругости при наличии явнуса. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
2. Воровин Н. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
3. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
4. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. Люстерник А. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1963.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959.
8. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.
9. Попов Г. Я. Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммиционными ядрами. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.