ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 2, 1979 Механика

И. И. КУДИШ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НАКЛАДКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ, С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

Предполагается, что скорость деформации накладки в продольном направлении является достаточно произвольной нелинейной функцией нормального напряжения, действующего в ее поперечном сечении. Решение задачи строится с помощью асимптотических методов. В частности, для относительно жесткой накладки решение представлено в виде регулярного асимптотического ряда, а в случае накладки относительно малой жесткости для построения решения используются методы сращиваемых асимптотических разложений [1, 2]. Частный случай данной задачи (степенная нелинейность) рассмотрен в работе [3], в которой предложен метод решения эффективный лишь для относительно жестких накладок.

1. Выведем уравнения рассматриваемой задачи. Предположим, что скорость деформации накладки в продольном направлении $\dot{\varepsilon}_x$ связана с нормальным напряжением σ_x, действующим в ее поперечном сечении, зависимостью

$$\dot{\varepsilon}_x = F\left(\frac{\sigma_x}{E_n}\right) \tag{1.1}$$

При достаточно большом времени t (режим установившейся ползучести) зависимость (1.1) можно представить в виде

$$\varepsilon_x = tF\left(\frac{\sigma_x}{E_n}\right) \tag{1.2}$$

Учитывая, что для элемента накладки при обычных предположениях [4, 5, 6] имеет место соотношение

$$\sigma_x = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{x}[\tau(s) - t(s)]\,ds \tag{1.3}$$

и подставляя (1.3) в (1.2), получим основное уравнение, описывающее процесс деформации накладки в условиях установившейся нелинейной ползучести

$$\frac{du^{(1)}}{dx} = tF\left(\frac{1}{hE_n}\int_{-\infty}^{x}[\tau(s) - t(s)]\,ds\right) \tag{1.4}$$

Здесь $E_н$ — постоянная, характеризующая ползучесть накладки; h и a — соответственно толщина и полудлина накладки; $\tau(x)$ — контактное касательное напряжение, действующее на накладку; $t(x)$ — касательное напряжение, создаваемое внешней пригрузкой; $u^{(1)}(x)$ — продольное перемещение точек накладки.

Как известно [7], перемещения граничных точек полуплоскости $u^{(2)}(x)$ имеют вид

$$u^{(2)}(x) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_0}\int_{-a}^{a}\tau(s)\ln\frac{1}{|x-s|}\,ds + \text{const} \tag{1.5}$$

где E_0 — модуль упругости полуплоскости, ν — коэффициент Пуассона.

На участке $[-a, a]$ контакта накладки с полуплоскостью имеет место условие

$$\frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{du^{(2)}}{dx}, \quad x \in [-a, a] \tag{1.6}$$

Теперь с помощью (1.4), (1.5) и (1.6) получим уравнение для определения $\tau(x)$

$$\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_0}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi'(\xi)\,d\xi}{\xi - x} = tF\left(\frac{\varphi(x)-\psi(x)}{hE_н}\right) \tag{1.7}$$

которое будем рассматривать при граничных условиях

$$\varphi(-a) = P_1, \quad \varphi(a) = \psi(a) + P_2 \tag{1.8}$$

При этом

$$\varphi(x) = P_1 + \int_{-a}^{x}\tau(\xi)\,d\xi, \qquad \psi(x) = \int_{-a}^{x} t(\xi)\,d\xi \tag{1.9}$$

Здесь P_1, P_2 — сосредоточенные силы, приложенные к концам накладки.

Введем безразмерные переменные

$$x' = x/a, \quad t'(x) = t(x)/\tau_0, \quad P_i' = P_i/\tau_0 a, \quad \varphi' = \varphi/\tau_0 a, \quad \psi' = \psi/\tau_0 a$$

Здесь τ_0 — характерная величина касательного напряжения. Введя безразмерные величины в уравнения (1.7)—(1.9) и опустив штрихи, после простых преобразований получим

$$\varphi(x) = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-1}^{1}F[\varphi(t)-\psi(t)]\ln\frac{1-tx+\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1-tx-\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}\,dt +$$

$$+\frac{\psi(1)+P_2-P_1}{\pi}\arcsin x + \frac{\psi(1)+P_1+P_2}{2} \tag{1.10}$$

$$\varphi(x) = P_1 + \int_{-1}^{x} \tau(\xi)\, d\xi, \quad \psi(x) = \int_{-1}^{x} t(\xi)\, d\xi \tag{1.11}$$

Здесь λ — параметр, характеризующий относительную жесткость накладки. В частности, при степенной зависимости $F(\sigma_x) = |\sigma_x|^{\alpha-1} \sigma_x$ (α — показатель ползучести, $\alpha \geqslant 1$) для λ имеем

$$\lambda = l \frac{E_0}{2\tau_0 (1 - \nu^2)} \left(\frac{\tau_0 \alpha}{h E_*} \right)^{\alpha} \tag{1.12}$$

В дальнейшем будем предполагать, что функция F и обратная к ней функция Φ являются достаточно гладкими функциями своих аргументов, а также обладают следующими свойствами:

$$F(-\sigma_x) = -F(\sigma_x), \quad F(\sigma_x) \sim 1 \text{ при } \sigma_x \sim 1 \tag{1.13}$$

$$\Phi(\varepsilon_x) = |\varepsilon_x|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \varepsilon_x + o\left(|\varepsilon_x|^{\frac{1}{\alpha}}\right), \quad \varepsilon_x \ll 1; \quad \Phi(\varepsilon_x) \sim 1, \quad \varepsilon_x \sim 1 \tag{1.14}$$

Воспользовавшись существованием функции Φ, обратной к функции F, уравнения (1.7) и (1.8) в безразмерных переменных можно представить также в виде

$$\varphi(x) = \psi(x) + \Phi \left[\frac{\lambda^{-1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(t)\, dt}{t - x} \right] \tag{1.15}$$

$$\varphi(-1) = P_1, \quad \varphi(1) = \psi(1) + P_2 \tag{1.16}$$

С помощью (1.13) легко видеть, что при $P_1 = P_2 = 0$, $t(x) = \frac{t_0}{\sqrt{1 - x^2}}$ для любого $\lambda > 0$ вне зависимости от конкретного вида функции F решением уравнения (1.10), или что то же (1.15), (1.16), является

$$\varphi(x) = t_0 \left[\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right], \quad \tau(x) = \varphi'(x) = t(x) \tag{1.17}$$

Физически это решение означает, что накладка ведет себя как абсолютно жесткое тело.

2. *Схема регулярных возмущений.*

Рассмотрим случай $\lambda \ll 1$. Функцию $t(x)$ будем предполагать интегрируемой на отрезке $[-1, 1]$, а также P_1, P_2, $\psi(1) \sim 1$ при $\lambda \ll 1$. Решение уравнения (1.10) будем искать в виде равномерно пригодного на $[-1, 1]$ асимптотического разложения [1]

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x) \tag{2.1}$$

Решение (1.10) представимо в виде (2.1), если функция $F(\sigma_x)$ представима в виде ряда по степеням λ при $\sigma_x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k \sigma_{x,k}$*. Будем считать, что это предположение выполнено.

Подставив (2.1) в уравнение (1.10) и приравняв коэффициенты при λ^k, получим уравнения для $\varphi_k(x)$

$$\varphi_0(x) = \frac{\psi(1) + P_2 - P_1}{\pi} \arcsin x + \frac{\psi(1) + P_1 + P_2}{2} \tag{2.2}$$

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} F[\varphi_0(t) - \psi(t)] \ln \frac{1 - tx + \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1 - tx - \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}\, dt$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} F'[\varphi_0(t) - \psi(t)]\, \varphi_1(t) \ln \frac{1 - tx + \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1 - tx - \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}\, dt$$

и т. д. Здесь $F'(z) = \dfrac{dF}{dz}$.

Из (1.11) с помощью равенств (2.2) получим трехчленное равномерно пригодное асимптотическое разложение для касательного напряжения

$$\tau(x) = \frac{\psi(1) + P_2 - P_1}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{\lambda}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{F[\varphi_0(t) - \psi(t)]\sqrt{1-t^2}\, dt}{t - x} -$$

$$- \frac{\lambda^2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{F'[\varphi_0(t) - \psi(t)]\, \varphi_1(t)\sqrt{1-t^2}\, dt}{t - x} \tag{2.3}$$

Легко видеть, что развитая выше процедура регулярных асимптотических разложений справедлива при любой интегрируемой функции $l(x)$.

Интересно отметить, что при $\lambda \ll 1$ локальные свойства пригрузки $f(z)$ начинают сказываться на напряжении $\tau(x)$, лишь начиная с первого приближения посредством интегрального члена. Это поведение $\tau(x)$ становится очевидным, если учесть тот факт, что случай $\lambda \ll 1$ соответствует относительно жесткой накладке (см., напр., (1.12)).

3. *Схема сингулярных возмущений*

Рассмотрим случай накладки с относительно малой жесткостью, то есть $\lambda \gg 1$. В этом случае при исследовании оказывается удобным пользоваться уравнениями задачи в виде (1.15), (1.16). Решение задачи при $\lambda \gg 1$ будем строить методом сращиваемых асимптотических разложений [1]. В дальнейшем, если не оговорено противное, ограничимся исследованием главных членов асимптотик функций $\varphi(x)$ и $\tau(x)$.

* Аналогично может быть рассмотрен случай, когда $F(\sigma_x)$ представляется в виде асимптотического ряда по иным функциям параметра λ.

Будем предполагать, что

$$t(x) \underset{x\to-1}{\simeq} t_m(1+x)^{\chi_m}, \quad t(x) \underset{x\to1}{\simeq} t_p(1-x)^{\chi_p}; \quad \chi_m, \ \chi_p > -1 \tag{3.1}$$

$$\underset{x\pm1\sim1}{t(x)} \sim 1, \quad t_m, \ t_p \sim 1 \text{ при } \lambda \gg 1$$

$t(x)$ удовлетворяет условию Гельдера при $x \pm 1 \sim 1$.

При $\lambda \gg 1$ область контакта естественным образом распадается на три подобласти. В малых окрестностях точек $x = \pm 1$ (внутренние области) напряжение $\tau(x)$, действующее на накладку, формируется в результате сложного взаимодействия накладки и основания, в то время как вне этих окрестностей (внешняя область) напряжение $\tau(x)$ в главном определяется внешней пригрузкой $t(x)$, приложенной к верхней поверхности накладки.

Рассмотрим сначала случай

$$t(x) \neq 0, \quad -1 < \chi_m < 0, \quad -1 < \chi_p < 0 \tag{3.2}$$

Предположим также, что P_1, $P_2 \neq 0$ и P_1, $P_2 \sim 1$ при $\lambda \gg 1$. Введем в упомянутых выше внутренних областях новые независимые переменные $r = \dfrac{x+1}{\varepsilon_m}$ и $s = \dfrac{x-1}{\varepsilon_p}$, где ε_m и ε_p — характерные размеры соответствующих внутренних областей. Решение задачи (1.15), (1.16) во внешней области будем искать в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + o(1), \quad x \pm 1 \sim 1 \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (1.3) следует, что $\psi(x) \neq 0$, $x \in [-1, 1]$, поэтому считая $x \pm 1 \sim 1$, то есть рассмотрев внешнюю область с помощью (3.3), из уравнений (1.5) и (1.14) получим

$$\varphi_0(x) = \psi(x), \quad \tau(x) = t(x), \quad x \pm 1 \sim 1 \tag{3.4}$$

Соотношения (3.3), (3.4), очевидно, становятся непригодными в качестве решения задачи (1.15), (1.16) во внутренних областях $r \sim 1$ и $s \sim 1$, так как с помощью (3.3), (3.4) невозможно удовлетворить граничным условиям (1.9) на $\varphi(x)$ в точках $x = \pm 1$. Поэтому решение во внутренних областях будем искать в виде

$$\varphi(x) = \varphi_m(r) + o(1), \quad \varphi_m(r) \sim 1 \text{ при } r \sim 1 \tag{3.5}$$

$$\varphi(x) = \varphi_p(s) + o(1), \quad \varphi_p(s) \sim 1 \text{ при } s \sim 1 \tag{3.6}$$

С помощью соотношения (3.1) легко получить асимптотики функции $\psi(x)$ при $x \to \pm 1$, а поэтому, использовав равенство (3.4), получим одночленное внутреннее разложение одночленного внешнего разложения в виде [1]

$$\varphi_0(x) = \varepsilon_m^{1+\varkappa_m} \frac{l_m r^{1+\varkappa_m}}{1+\varkappa_m} + o(\varepsilon_m^{1+\varkappa_m}), \quad r \sim 1$$
$$\varphi_0(x) = \psi(1) - \varepsilon_p^{1+\varkappa_p} \frac{l_p(-s)^{1+\varkappa_p}}{1+\varkappa_p} + o(\varepsilon_p^{1+\varkappa_p}), \quad s \sim 1 \tag{3.7}$$

Рассмотрев поочередно внутренние области, примыкающие к точкам $x = \pm 1$, с помощью (3.5)—(3.7) и (1.14)—(1.16) соответственно получим уравнения [1]

$$\varphi_m(r) = \Phi\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi_m'(t)\,dt}{t-r}\right], \qquad \varphi_m(0) = P_1, \quad \varphi_m(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.8}$$

$$\varphi_p(s) = \psi(1) + \Phi\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi_p'(t)\,dt}{t-s}\right] \tag{3.9}$$

$$\varphi_p(0) = P_2 + \psi(1), \quad \varphi_p(s) \underset{s\to-\infty}{\longrightarrow} \psi(1)$$

и соотношения, определяющие ε_m и ε_p

$$\varepsilon_m = \varepsilon_p = \lambda^{-1} \tag{3.10}$$

Обратим внимание на то, что размеры внутренних областей ε_m и ε_p при $P_1, P_2 \neq 0$ не зависят ни от поведения $t(x)$ при $x \to \pm 1$, ни от вида функции Φ, в то время как касательные напряжения $\tau(x) = \lambda\varphi_m'(r) + \cdots$ и $\tau(x) = \lambda\varphi_p'(s) + \cdots$ во внутренних областях определяются видом функции Φ.

В случае, когда $\Phi(\varepsilon_*) = |\varepsilon_*|^{\frac{1-\nu}{\nu}}\varepsilon_*$, решение задачи (3.8) ((3.9)) зависит от двух (трех) параметров, однако, существенной является зависимость лишь от ν. Действительно, если положить $\varphi_m(r) = P_1 q_m(r|P_1|^{\nu-1})$, то задачу (3.8) легко привести к виду

$$q_m(R) = \frac{1}{\pi^{1/\nu}}\left|\int_0^\infty \frac{q_m'(t)\,dt}{t-R}\right|^{\frac{1-\nu}{\nu}} \int_0^\infty \frac{q_m'(t)\,dt}{t-R} \tag{3.11}$$

$$q_m(0) = 1, \quad q_m(R) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Аналогичное преобразование имеет место для задачи (3.9).

Из приведенного анализа следует, что в главном решения задачи (1.15), (1.16) во внутренних областях независимы. Поэтому в дальнейшем, как правило, будем рассматривать лишь одну из внутренних областей, например, область, в которой $r \sim 1$.

Исследуем теперь случай $P_1 = 0$, по-прежнему предполагая выполненными соотношения (3.1). Как и ранее, во внешней области решение будем искать в виде (3.3); очевидно, оно определится равенством (3.4). Асимптотиками внешнего решения являются равенства (3.7). Во внутренней области, примыкающей к точке $x = -1$, решение в случае $P_1 = 0$ будем искать в виде

$$\varphi(x) = \varepsilon_m^{1+\varkappa_m} \varphi_m(r) + o(\varepsilon_m^{1+\varkappa_m}), \quad \varphi_m(r) \sim 1 \text{ при } r \sim 1 \tag{3.12}$$

Подставив представление $\varphi(x)$ в виде (3.12) в уравнения (1.15), (1.16), во внутренней области получим [1] с помощью (1.14)

$$\varphi_m(r) = \frac{t_m r^{1+\varkappa_m}}{1+\varkappa_m} + \frac{1}{\pi^{1/\alpha}} \left| \int_0^\infty \frac{\varphi_m'(t)\,dt}{t-r} \right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \int_0^\infty \frac{\varphi_m'(t)\,dt}{t-r}$$

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m(r) \underset{r\to\infty}{\to} \frac{t_m r^{1+\varkappa_m}}{1+\varkappa_m} \tag{3.13}$$

а для характерного размера ε_m получим

$$\varepsilon_m = \lambda^{-p_m}, \quad p_m = \frac{1}{\alpha(1+\varkappa_m) - \varkappa_m} \tag{3.14}$$

Очевидно, что $p_m > 0$ при $\alpha \geqslant 1$ и $\varkappa_m > -1$.

Обратим внимание на то, что при $\varkappa_m = -1/2$ решением задачи (3.13) является $\varphi_m(r) = 2t_m r^{1/2}$, что согласуется с точным решением задачи (1.17) при $t(x) = \dfrac{t_m\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

Интересно отметить, что протяженность пограничного слоя, расположенного в окрестности точки $x = -1$ и касательное напряжение $\tau(x) = \lambda^{-\varkappa_m p_m} \varphi_m'(r) + \cdots$ при $P_1 = 0$ в отличие от случая $P_1 \neq 0$ определяются как показателем ползучести α, так и поведением $t(x)$ при $x \to -1$.

Рассмотрим теперь случай

$$t(x) \not\equiv 0; \quad \varkappa_m,\ \varkappa_p > 0 \tag{3.15}$$

Тогда решение задачи во внешней области будем искать в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda^{-1/\alpha} \varphi_1(x) + o(\lambda^{-1/\alpha}); \quad \varphi_0(x),\ \varphi_1(x) \sim 1 \text{ при } x \pm 1 \sim 1 \tag{3.16}$$

Подставив это представление $\varphi(x)$ в уравнение (1.15) и приравняв члены при одинаковых степенях λ, получим с помощью (1.14)

$$\varphi_0(x) = \psi(x), \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\pi^{1/\alpha}} \left| \int_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\,d\xi}{\xi - x} \right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \int_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\,d\xi}{\xi - x} \tag{3.17}$$

Из (3.16) и (3.17) во внешней области получим двучленное асимптотическое разложение

$$\varphi(x) = \psi(x) + \frac{\lambda^{-1/\alpha}}{\pi^{1/\alpha}} \left| \int_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x} \right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \int_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x}, \quad \varepsilon(x) = \varphi'(x) \qquad (3.18)$$

Отметим, что при наличии сосредоточенных сил, то есть $P_1, P_2 \neq 0$ асимптотический анализ во внутренних областях полностью совпадает с анализом, проведенным для случая $-1 < \varkappa_m, \varkappa_p < 0$.

Поэтому остановимся подробнее на случае отсутствия сосредоточенных сил, то есть положим, что $P_1 = P_2 = 0$. Исследуем окрестность точки $x = -1$. Положим

$$N_m = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi + 1} \qquad (3.19)$$

Очевидно, что при $\varkappa_n > 0$ интеграл (3.19) сходится.

Введем новую функцию

$$\theta(x) = \varphi(x) - \psi(x) \qquad (3.20)$$

тогда уравнение (1.15) примет вид

$$\theta(x) = \Phi\left\{ \frac{\lambda^{-1}}{\pi} \left[\int_{-1}^{1} \frac{\theta'(t)\, dt}{t - x} + \int_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x} \right] \right\} \qquad (3.21)$$

Если $t(x)$ таково, что $N_m \neq 0$, то воспользовавшись соотношениями (3.18)—(3.20), получим одночленное внутреннее разложение одночленного внешнего разложения функции $\theta(x)$ в виде

$$\theta(x) \simeq \lambda^{-1/\alpha} |N_m|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} N_m, \quad r \sim 1 \qquad (3.22)$$

Поэтому, в силу принципа сращивания, решение во внутренней области будем искать в виде

$$\theta(x) = \lambda^{-1/\alpha} \varphi_m(r) + o(\lambda^{-1/\alpha}), \quad \varphi_m(r) \sim 1 \text{ при } r \sim 1 \qquad (3.23)$$

В аналогичном виде следует искать решение и в другой внутренней области.

Подставив (3.23) в уравнение (3.21), рассматриваемое во внутренней области, с помощью асимптотики (1.14) и равенства (3.19) получим уравнение

$$\varphi_m(r) = \frac{1}{\pi^{1/\alpha}} \left| \pi N_m + \int_0^{\infty} \frac{\varphi_m'(t)\, dt}{t - r} \right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left\{ \pi N_m + \int_0^{\infty} \frac{\varphi_m'(t)\, dt}{t - r} \right\} \qquad (3.24)$$

и граничные условия

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m(r) \underset{r \to \infty}{\to} |N_m|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} N_m \qquad (3.25)$$

При выводе граничных условий были использованы равенства (1.16), (3.20) и $P_1 = P_2 = 0$. В процессе изложенного выше асимптотического анализа, кроме того, получим

$$\varepsilon_m = \lambda^{-1/\alpha} \tag{3.26}$$

Отметим, что с помощью замены

$$\varphi_m(r) = |N_m|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} N_m q_m\left(|N_m|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} r\right) \tag{3.27}$$

уравнения (3.24) и (3.25) могут быть приведены к виду

$$q_m(R) = \frac{1}{\pi^{1/\alpha}} \left| \pi + \int\limits_0^\infty \frac{q_m'(t)\,dt}{t-R} \right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left\{ \pi + \int\limits_0^\infty \frac{q_m'(t)\,dt}{t-R} \right\} \tag{3.28}$$

$$q_m(0) = 0, \quad q_m(R) \xrightarrow[R \to \infty]{} 1$$

Исследуем теперь случай $N_m = 0$. Тогда предположим, что [8]

$$\varphi_2(x) = \varepsilon^n |K_m|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} K_m r^n + o(\varepsilon^n), \quad K_m \sim 1, \quad 0 < n < \frac{\nu_m}{\alpha}, \quad r \sim 1 \tag{3.29}$$

Из (3.17), (3.20) и (3.29) получим внешнее решение, переразложенное во внутренних переменных

$$\psi(x) \sim \lambda^{-1/\alpha} \varepsilon_m^n |K_m|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} K_m r^n \tag{3.30}$$

Поэтому решение уравнения (3.21) в области $r \sim 1$ следует искать в виде

$$\theta(x) = \lambda^{-1/\alpha} \varepsilon_m^n \varphi_m(r) + o(\lambda^{-1/\alpha} \varepsilon_m^n), \quad \varphi_m(r) \sim 1 \quad \text{при} \quad r \sim 1 \tag{3.31}$$

Подставив (3.31) в (3.21) и воспользовавшись равенствами (1.16) и (3.20), с помощью (1.14) для $\varphi_m(r)$ получим уравнения, совпадающие с (3.24), (3.25). Разница состоит лишь в том, что в (3.24) и (3.25) нужно постоянную N_m заменить на K_m из (3.29).

Характерная величина внутренней области ε_m определяется из соотношений

$$\varepsilon_m = \lambda^{-p_m}, \quad p_m = \{\alpha[n(\alpha-1)+1]\}^{-1} > 0 \quad \text{при} \quad \alpha > 1 \tag{3.32}$$

Исследование, приведенное для случая $N_m = 0$, справедливо при $\frac{\nu_m}{\alpha} < 1$. Подобное исследование в случае $\frac{\nu_m}{\alpha} = i$ (i — натуральное число) сопряжено с существенными трудностями, а случай $i \neq \frac{\nu_m}{\alpha} > 1$ по существу сводится к одному из рассмотренных случаев при $P_1 = P_2 = 0$, если вместо $\psi(x)$ в (3.20) подставить внешнее разложение решения максимального порядка, которое допускается функцией $l(x)$. После указанной замены методика определения новой искомой функции $\theta(x)$ аналогична методике для случая $\frac{\varkappa_m}{\alpha} < 1$.

В рассмотренном случае (3.15) следует обратить внимание на то, что напряжение $\tau(x)$ во внутренних областях в главном определяется поведением пригрузки $l(x)$, а также показателем ползучести α.

Из независимости друг от друга в главном решений задачи во внутренних областях следует, что смешанные случаи такие как $\varkappa_m < 0$, $\varkappa_p > 0$, $P_1 = P_2 = 0$; $\varkappa_m > 0$, $\varkappa_p > 0$, $P_1 = 0$, $P_2 \neq 0$, и тому подобные могут быть рассмотрены совершенно аналогично с помощью предложенных выше подходов в комплексе.

В случае $l(x) \equiv 0$, $\varkappa_m = P_1 = 0$ и $\varkappa_p > -1$, $P_2 \sim 1$ возникают определенные затруднения при выводе уравнения для главного члена асимптотики $\varphi(x)$ во внутренней области $t \sim 1$. В связи с этим данный случай рассматриваться не будет.

Рассмотрим теперь случай

$$l(x) \equiv 0, \quad x \in [-1, 1] \tag{3.33}$$

Будем предполагать ниже, что функция $\Phi(\varepsilon_x) = |\varepsilon_x|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \varepsilon_x$, $\alpha > 1$ при любых значениях ε_x.

Из (1.11) и (3.33) следует, что $\psi(x) \equiv 0$. Отметим, что решение задачи во внешней области в главном есть $\varphi(x) = 0$, а при P_1, $P_2 \neq 0$ исследование внутренних областей полностью совпадает со случаем (3.2) при P_1, $P_2 \neq 0$. Поэтому рассмотрим случай

$$P_1 = 0, \quad P_2 \neq 0, \quad P_2 \sim 1 \tag{3.34}$$

Тогда во внутренней области $x \sim 1$ для главного члена асимптотики (3.6) получим задачу (3.9), в которой следует положить $\psi(1) = 0$. При этом t_p определится соотношением (3.10).

Для определения ненулевого решения во внешней области необходимо рассмотреть, так называемый, характерный предел [2], а именно: положим

$$\varphi(x) = \mu(\lambda)\varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) \sim 1 \text{ при } \lambda \gg 1 \tag{3.35}$$

Здесь $\mu(\lambda)$ — неизвестная пока функция большого параметра λ.

Подставим (3.35) в (1.15) при $\psi(x) = 0$. Тогда из сравнения порядка членов в (1.15) получим соотношение

$$\mu = \lambda^{\frac{1}{1-\alpha}} \ll 1, \quad \alpha > 1 \text{ при } \lambda \gg 1 \tag{3.36}$$

Одновременно получим уравнение

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/\alpha}} \left| \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_0(t)\,dt}{t-x} \right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_0'(t)\,dt}{t-x} \tag{3.37}$$

и граничное условие

$$\varphi_0(-1) = 0 \tag{3.38}$$

Недостающим граничным условием является условие сращивания внешнего решения с внутренним

$$\varphi_0(x)\Big|_{x=1-0} = \lambda^{\frac{1}{n+1}}\varphi_p(\lambda(x-1)) \tag{3.39}$$

Здесь $\varphi_p(s)$ есть решение задачи (3.9) при $\psi(1)=0$.

В рассмотренном случае, в отличие от всех предыдущих случаев, сначала определяется внутреннее решение $\varphi_p(s)$, а затем с помощью сращивания — внешнее решение $\varphi_0(x)$.

4. *О поведении решений в малых окрестностях концов накладки*

Исследуем поведение решения задачи (1.15), (1.16) при $x \to -1$. Из граничного условия (1.16) следует, что $\varphi(x)$ — ограниченная функция при $x \to -1$. Предположим, что асимптотика $\varphi(x)$ при $x \to -1$ имеет вид

$$\varphi(x) \simeq P_1 + \varphi_0(1+x)^{1+\gamma}, \quad \gamma > -1 \tag{4.1}$$

Тогда из (4.1) получим

$$\tau(x) = \varphi'(x) \simeq \varphi_0(1+\gamma)(1+x)^{\gamma} \tag{4.2}$$

Предположим, кроме того, что $\tau(x)$ имеет интегрируемую особенность при $x \to -1$, то есть

$$-1 < \gamma \leqslant 0 \tag{4.3}$$

Использовав известный факт о том, что при условиях (4.2), (4.3) [7]

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-x} = -\pi\varphi_0(\gamma+1)\operatorname{ctg}\pi\gamma\,(1+x)^{\gamma} + G(x) \tag{4.4}$$

($G(x)$ — регулярная на отрезке $[-1, b]$ $(0<b<1)$ функция) и учтя ограниченность $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $x \to -1$, из уравнения (1.15) получим, что первый член в правой части (4.4) должен обратиться в нуль [9], то есть

$$\varphi_0(\gamma+1)\operatorname{ctg}\pi\gamma = 0 \tag{4.5}$$

Учитывая то, что $\varphi_0 \neq 0$, получим уравнение $\operatorname{ctg}\pi\gamma = 0$, решением которого, удовлетворяющим (4.3), является

$$\gamma = -\frac{1}{2} \tag{4.6}$$

Аналогичный анализ при $x \to 1$ также приводит к равенству (4.6).

Из (4.2) и (4.6) следует, что в сделанных предположениях касательное напряжение $\tau(x)$ представимо в виде

$$\tau(x) = \frac{\tau_*(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.7}$$

где $\tau_*(x)$ — регулярная на всем отрезке $[-1, 1]$ функция.

Отметим, что результат (4.7) согласуется с поведением решения задачи (1.10), полученным при $\lambda \ll 1$ в § 2.

5. Обобщение на пространственную задачу

Изложенный в §§ 2, 3 асимптотический метод исследования задачи (1.10) (или (1.15), (1.16)) легко распространяется на случай пространственной задачи для накладки прямоугольного сечения [9], находящейся в условиях установившейся нелинейной ползучести. Уравнения, описывающие эту задачу, имеют вид

$$\varphi(x) = \psi(x) + \Phi\left\{\frac{\lambda^{-1}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{t-x} + V(x-t)\right]\varphi'(t)\,dt\right\} \tag{5.1}$$

$$\varphi(-1) = P_1, \quad \varphi(1) = \psi(1) + P_2$$

или иначе

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\left\{\int\limits_{-1}^{1} V(s-t)\,\varphi'(t)\,dt - \lambda\pi F[\varphi(s) - \psi(s)]\right\}\times$$

$$\times \ln\frac{1 - sx + \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}{1 - sx - \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}\,ds +$$

$$+ \frac{\psi(1) + P_2 - P_1}{\pi}\arcsin x + \frac{\psi(1) + P_1 + P_2}{2} \tag{5.2}$$

$$\varphi(-1) = P_1, \quad \varphi(1) = \psi(1) + P_2$$

Здесь $V(x)$ — ограниченная непрерывная функция.

В случае, если $F(\sigma_x)$ представима в виде степенного по λ асимптотического ряда (§ 2), решение задачи (5.2) при $\lambda \ll 1$ следует искать в виде (2.1). При этом уравнения для первых членов разложения имеют вид

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} V(s-t)\,\varphi_0'(t)\ln\frac{1 - sx + \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}{1 - sx - \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}\,ds\,dt +$$

$$+ \frac{\psi(1) + P_2 - P_1}{\pi}\arcsin x + \frac{\psi(1) + P_1 + P_2}{2} \tag{5.3}$$

$$\varphi_0(-1) = P_1, \quad \varphi_0(1) = \psi(1) + P_2$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1}^{1} V(s-t)\,\varphi_1'(t)\,dt - \lambda\pi F[\varphi_0(s) - \psi(s)] \right\} \times$$

$$\times \ln \frac{1 - sx + \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}{1 - sx - \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}\,ds\,dt, \quad \varphi_1(\pm 1) = 0$$

и т. д.

Уравнения для $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... интегрированием по частям с учетом граничных условий приводятся к уравнениям Фредгольма второго рода, которые затем могут быть решены одним из известных методов.

При $\lambda \gg 1$ и $|x \pm 1| \sim 1$ из (5.1) следует, что в главном выполняются равенства (3.3), (3.4), а при $x \to \pm 1$ решение не приближается соотношениями (3.3), (3.4). В возникающих внутренних областях для главных членов асимптотики $\varphi(x)$ при выполненных условиях (1.13), (1.14) и (3.1) получаются уравнения, совпадающие с соответствующими уравнениями для $\varphi_0(r)$ и $\varphi_1(s)$ § 3. Исключение составляют случаи $\varkappa_0, \varkappa_1 > 0$, для которых следует лишь заменить величины N_0, N_1 соответственно на

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{s+1} + V(-s-1) \right] \tau(s)\,ds$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{s-1} + V(1-s) \right] \tau(s)\,ds$$

Протяженность внутренних областей совпадает с протяженностью этих областей для плоской задачи.

6. *Численные результаты*

В качестве примера рассмотрим задачу для накладки, скорость деформации которой является степенной функцией напряжения $F(\sigma_x) = |\sigma_x|^{\alpha-1}\sigma_x$. При этом λ определяется соотношением (1.12).

Проиллюстрируем полученные результаты в случае линейной накладки ($\alpha = 1$) на примере следующих режимов:

1) $P_1 = P_2 = 1$, $\psi(x) = 0$; 2) $P_1 = -1$, $P_2 = 1$, $\psi(x) = 0$

3) $P_1 = P_2 = 0$, $\psi(x) = x + 1$; 4) $P_1 = P_2 = 0$, $\psi(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$

при $\lambda = 0.5$. В табл. 1 приведены значения коэффициента при особенности $A = \lim\limits_{x \to 1} \tau(x)\sqrt{1 - x^2}$. При этом в первой строке приведены результаты, любезно предоставленные для указанных режимов Е. В. Коваленко, а во второй строке — результаты, полученные с помощью двучленного разложения $\tau(x)$, (см. (2.3)).

Таблица 1

№ режима	1	2	3	4
A (Коваленко)	0.387	0.822	0.595	0.08496
A	0.341	0.841	0.592	0.0674

Трехчленное разложение $\tau(x)$ для режимов 1) и 4) при $\lambda=0.5$ дает соответственно $A=0.408$ и $A=0.0961$.

В случае нелинейной накладки $(F(\sigma_x)=|\sigma_x|^{\alpha-1}\sigma_x)$ приведем результаты вычислений $\tau(x)$ в точках $x=-0.8,\ 0,\ 0.8$ с помощью двучленного разложения для следующих режимов:

$$5)\ \alpha=1.5,\ \lambda=0.50293; \qquad 6)\ \alpha=1.75,\ \lambda=0.31279$$

при $P_1=0$, $P_2=1$ и $t(x)=0$. В табл. 2 приведены указанные значения $\tau(x)$, причем в скобках даны значения $\tau(x)$, полученные в [3].

Таблица 2

№ режима	5	6
$\tau(-0.8)$	0.4043 (0.5083)	0.5086 (0.5190)
$\tau(0)$	0.2509 (0.3081)	0.2968 (0.3120)
$\tau(0.8)$	0.7592 (0.5651)	0.5823 (0.5480)

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна и В. М. Александрова за полезное обсуждение при постановке задачи и ее решении.

Всесоюзный научно-исследовательский
конструкторско-технологический институт
подшипниковой промышленности

Поступила 9 IX 1978

Ի. Ի. ԿՈՒԴԻՇ

ԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՎԵՐԱԴԻՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է կայունացած սողքի վիճակում գտնվող վերջավոր երկարությամբ վերադիրով ուժեղացված կիսահարթության համար կոնտակտային խնդիր։

Խնդրի լուծումը կառուցվում է ռեգուլյար և սինգուլյար ասիմպտոտական վերլուծությունների օգնությամբ։ Մի քանի դեպքերի համար բերվում են թվային օրինակներ։

INTERACTION OF A STIFFENER, IN A NON-LINEAR STEADY-STATE CREEP, WITH AN ELASTIC SEMI-PLANE

I. I. KUDISH

Summary

A contact problem for a semi-plane reinforced with a stiffener of finite length, in a non-linear steady-state creep, is considered.

The solution of the problem is obtained with the use of regular and singular asymptotic expansions.

A numerical analysis of the problem for several cases is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., изд. «Мир», 1967.
2. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., изд. «Мир», 1972.
3. *Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян Л. О.* Передача нагрузки от степенно упрочняющейся накладки к деформируемому основанию. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 5.
4. ***Melan E.*** Ing.-Archiv, 1932, Bd. 3, № 2.
5. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
6. *Александров В. М., Соловьев А. С.* Некоторые смешанные плоские задачи теории упругости и их приложение к расчету погрешностей тензоизмерений. МТТ, 1970, № 1.
7. *Галин Л. А.* Контактная задача теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962.
9. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.