ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 2, 1979 Механика

В. Д. КУЛИЕВ, А. Э. САДЫХОВ

ПРОБЛЕМА РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ПАР ФУНКЦИЙ И ОДНО ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

При решении некоторых краевых задач математической физики методом интегральных преобразований в плоскости комплексного параметра получается краевая задача Римана для двух пар функций. В отличие от случая одной пары функций эта задача в общем случае не имеет замкнутого решения в интегралах. В настоящей работе дается обзор всех тех частных случаев, в которых решение краевой задачи Римана для двух пар функций находится в замкнутом виде в интегралах. Указаны также некоторые новые случаи точных замкнутых решений. Рассмотрена плоская задача теории упругости для бесконечной плоскости с прямолинейным полубесконечным разрезом, имеющим одно конечное прямолинейное ответвление, наклоненное под некоторым произвольным углом к бесконечному разрезу. Дано точное решение однородной сингулярной задачи, не имеющееся в литературе. Указанная задача сводится к одному интегрируемому случаю задачи Римана для двух пар функций. Полученное точное решение привлекается для построения нового варианта теории криволинейных трещин, который сравнивается с другими известными вариантами.

§ 1. *Введение. Задача Римана для двух пар функций*

Пусть L — гладкий замкнутый контур в плоскости Z, где $z=x+iy$. Область, лежащую внутри контура L, обозначим через D^+, а остальную часть плоскости — через D^-. Положительным направлением обхода границы L считается такое, при котором область D^+ остается все время слева. Предполагается, что начало координат принадлежит области D^+.

Краевая задача Римана для системы n пар функций формулируется следующим образом [1]: найти кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ с линией скачков L, имеющей конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + F(t) \qquad t\in L$$
$$G(t) = \|g_{ij}(t)\|, \quad F(t) = (F_1, F_2, \ldots, F_n) \tag{1.1}$$
$$(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$$

где $g_{ij}(t)$, $F_i(t)$ — некоторые функции, удовлетворяющие условию Гельдера.

Краевая задача (1.1) впервые была сформулирована в 1857 г. Б. Риманом [2] в связи с задачей отыскания дифференциального уравнения, интегралы которого при обходе особых точек претерпевают заданную линейную подстановку (уравнение с заданной группой монодромии).

Краевая задача (1.1) сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма, ядро которых зависит от коэффициентов краевого условия [3, 4]. При $n = 1$ замкнутое решение задачи получено в 1937 г. Ф. Д. Гаховым [5]. При $n > 1$ замкнутое решение этой задачи не найдено.

Построим каноническое решение однородного уравнения

$$X^{+}(t)[X^{-}(t)]^{-1} = G(t) \tag{1.2}$$

при дополнительном условии

$$X^{+}(t)[X^{-}(t)]^{-1} = [X^{-}(t)]^{-1}X^{+}(t) \tag{1.3}$$

Если задача (1.2), (1.3) будет решена, то решение соответствующей неоднородной задачи (1.1) не представляет труда [3, 4].

При $n = 1$ условие (1.3) всегда выполняется тождественно. Кусочно-голоморфное решение задачи (1.2) при нулевом индексе будет таким [5]:

$$X(z) = \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\ln G(t)}{t-z}\,dt \tag{1.4}$$

Представляет интерес вопрос о том, в каких случаях решение однородной задачи при $n > 1$ дается той же формулой (1.4). Этот вопрос был поставлен Ф. Д. Гаховым [1]. Ответ на него был дан Г. Н. Чеботаревым [6]. Оказалось, что решение однородной задачи (1.2) имеет вид (1.4), если матрица $G(t)$ принадлежит, например, к следующим классам:

А) функционально-коммутативные матрицы

$$G(t_1)\,G(t_2) = G(t_2)\,G(t_1)$$

Класс функционально-коммутативных матриц был выделен Ф. Д. Гаховым [1] (см. также [6]) и исследован с алгебраической точки зрения В. В. Морозовым [7]. Теорема Морозова сводит изучение функционально-коммутативных матриц к изучению семейства постоянных попарно коммутативных матриц. Это семейство матриц образует коммутативную алгебру Ли.

Б) матрицы, коммутирующие со своим сингулярным интегралом Коши,

$$g(t)\,h(t) = h(t)\,g(t)$$

где

$$g(t) = \ln G(t), \qquad h(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{g(t)}{t-\tau}\,dt$$

Заметим, что условие А является достаточным для выполнения условия Б.

Теорема I (А. А. Храпков [8]). Пусть матрица $G(t)$ обладает следующими свойствами:

1. $$G(t) = b(t)I + c(t)\begin{Vmatrix} l(t) & m(t) \\ n(t) & -l(t) \end{Vmatrix}$$

где $b(t)$, $c(t)$ — произвольные функции, $l(t)$, $m(t)$ и $n(t)$ — полиномы.

2. $$\det G(t) \neq 0 \qquad \text{на } L$$

3. $$f(t) = l^2(t) + m(t)\,n(t) \qquad \text{на } L$$

4. $$\varkappa_1 = \frac{1}{4\pi i}\ln\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)}\Big|_L = L$$

где $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ — характеристические функции матрицы, то есть корни уравнения

$$\det[G(t) - \lambda I] = 0$$

5. $$\int_L t^{k-1}\frac{\ln[\lambda_1(t)/\lambda_2(t)]}{\sqrt{f(t)}}\,dt = 0 \tag{1.5}$$

$$k = 1, 2, \ldots, m_1$$

где m_1 — наибольшее из целых чисел таких, что величина $2m_1 + 1$ не превосходит степени полинома $f(z)$ на бесконечности.

Тогда каноническое решение однородной задачи (1.2)—(1.3) имеет вид

$$X(z) = F(z)\,\{I\,\mathrm{ch}[\sqrt{f(z)}\,\beta(z)] + Q(z)\,\mathrm{sh}[\sqrt{f(z)}\,\beta(z)]\} \tag{1.6}$$

Здесь

$$\Delta(z) = \det G(z), \quad f(z) = l^2(z) + m(z)\,n(z)$$

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{2}\ln[\lambda_1(z)/\lambda_2(z)]$$

$$F(z) = (z-a)^{-\varkappa_2}\exp\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\ln\Delta(t)}{t-z}\,dt$$

$$\beta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{f(t)}}\,\frac{dt}{t-z}$$

$$\varkappa_2 = \frac{1}{2\pi i}\ln[\lambda_1(t)\,\lambda_2(t)]\Big|_L$$

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{f(z)}}\begin{Vmatrix} l(z) & m(z) \\ n(z) & -l(z) \end{Vmatrix}$$

Подставляя матрицу (1.6) в краевое условие (1.2), непосредственно убеждаемся в том, что оно тождественно выполняется при любых $X(z)$, определяемых формулой (1.6). Анализируя поведение на бесконечности матричной функции $X(z)$, нетрудно заметить, что если выполняются условия (1.5), оно будет иметь конечный порядок на бесконечности (то есть будет вести себя при $z \to \infty$ как некоторый полином).

Теорему можно обобщить, допуская любое конечное число нулей функций $\Delta(t)$ и $f(t)$ на контуре L (в отличие от условий 2 и 3 теоремы). Это обобщение производится аналогично случаю одной пары функций [9].

Рассмотрим следующую задачу. Пусть матрица $G(t)$ имеет вид

$$G(t) = b(t)I + c(t)\begin{Vmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & -\varphi_{22}(t) \end{Vmatrix} \tag{1.7}$$

Здесь $b(t)$, $c(t)$, $\varphi_{ij}(t)$ — некоторые функции. Построим каноническое решение однородной задачи (1.1), (1.2).

В этом случае для решения однородной задачи теорема 1 не применима и возможность точного построения этого решения в интегралах весьма трудна. Поэтому для нахождения решения однородной задачи может быть использован приближенный метод, аналогичный методу для одной пары функций [10].

Теорема 2. Пусть $\varphi_{ij}(i, j = 1,2)$ близка к рациональной функции

$$\psi_{ij}(t) = \varphi^{*}_{ij}(t) + \varepsilon q^{*}_{ij}(t) \quad t \in L \tag{1.8}$$

Пусть, кроме того, матрица

$$G_{*}(t) = b(t)I + c(t)\|\psi^{*}_{ij}(t)\| \quad t \in L \tag{1.9}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда каноническое решение однородной задачи с матричным коэффициентом (1.9) дается формулой (1.6) и это же каноническое решение является приближенным* решением исходной однородной задачи с матричным коэффициентом (1.7). Здесь ε — малый параметр, $q^{*}_{ij}(t)$ — ограниченная непрерывная функция.

Доказательство. Поскольку матрица $G_{*}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то, согласно этой теореме, решение однородной задачи дается формулой (1.6).

Согласно условию (1.8), матричные функции $G(t)$ и $G_{*}(t)$ приближенно равны на контуре L. Следовательно, окончательные решения будут также приближенно равны, так как нет необходимости в том, чтобы функции $G(t)$ и $G_{*}(t)$ вели себя одинаковым образом в комплексной плоскости вне линии L. Теорема доказана.

Заметим, что факторизации некоторых классов матриц-функций, встречающихся в теории упругости, посвящены многие работы (см., например, Г. П. Черепанов [11], В. А. Бабешко [12, 13]).

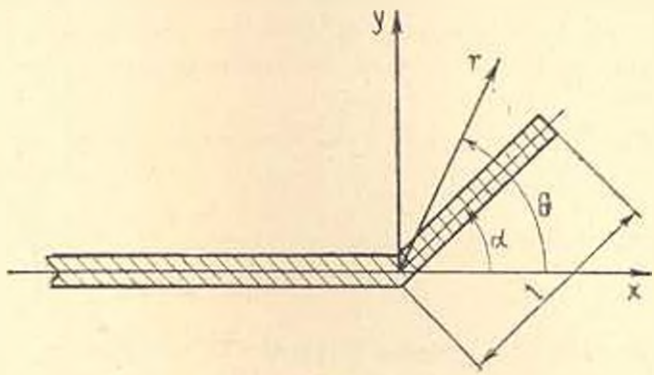
---

* Точность решения зависит от точности аппроксимации матриц-функций в виде рациональной функции.

При решении некоторых краевых задач математической физики методом интегральных преобразований приходят к системе функциональных уравнений типа Винера-Хопфа, которые являются частными случаями рассмотренной краевой задачи Римана для нескольких пар функций. Один такой пример из теории упругости рассмотрен ниже.

§ 2. *Полубесконечная щель с ответвлением*

В работе А. А. Храпкова [8] рассмотрено равновесие клина с несимметричным радиальным надрезом в вершине клина под действием внешних нагрузок, приложенных к разрезу. В том случае, когда угол раствора клина φ больше π, в этой задаче появляется сингулярное однородное решение [14], которое представляет наибольший интерес для приложений. В работе А. А. Храпкова это решение упущено из виду. Ниже построим это решение для интересующего нас случая $\varphi = 2\pi$ и проанализируем его применительно к механике разрушения.



Фиг. 1

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости — полубесконечную прямолинейную щель с прямолинейным ответвлением (фиг. 1). Берега разрезов свободны от внешних нагрузок (однородная задача). Прямолинейная декартова система координат x, y указана на фиг. 1. Длину отростка без ограничения общности можно считать равной единице, так как в рассматриваемой задаче нет другого характерного линейного размера. Будем пользоваться также полярной системой координат r, θ (фиг. 1).

Граничные условия имеют вид

при

$$\theta = \pm\pi \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \tag{2.1}$$

при

$$\theta = \alpha \begin{cases} r < 1 \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 & (2.2) \\ r > 1 \quad [\sigma_\theta] = [\sigma_r] = [\tau_{r\theta}] = 0 & (2.3) \end{cases}$$

при

$$\theta=\alpha,\quad r\to 1+0,\quad \sigma_\theta(r,\alpha)=k_{\rm I}/\sqrt{2\pi(r-1)} \tag{2.4}$$

$$\tau_{r\theta}(r,\alpha)=k_{\rm II}/\sqrt{2\pi(r-1)}$$

при

$$\theta=0,\quad r\to\infty\quad \sigma_\theta=K_{\rm I}/\sqrt{2\pi r} \tag{2.5}$$

$$\tau_{r\theta}=K_{\rm II}/\sqrt{2\pi r}$$

где σ_θ, $\tau_{r\theta}$, σ_r — компоненты тензора напряжений, $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$ — коэффициенты интенсивности напряжений для нормального разрыва и поперечного сдвига (в данной постановке они считаются заданными [14]), $k_{\rm I}$, $k_{\rm II}$ — коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины $\theta=\alpha$, $r=1$. Под знаком $[F]$ понимается скачок величины F.

Применим преобразование Меллина

$$\overline{f(p)}=\int_0^\infty f(r)\,r^p\,dr$$

(p — комплексный параметр)

к уравнениям равновесия и условию совместности; в результате для функции $\bar\sigma_\theta(p,\theta)$ получим следующее дифференциальное уравнение четвертого порядка [15]:

$$\frac{d^4\bar\sigma_\theta}{d\theta^4}+[(p+1)^2+(p-1)^2]\frac{d^2\bar\sigma_\theta}{d\theta^2}+(p+1)^2(p-1)^2\bar\sigma_\theta=0 \tag{2.6}$$

Функции $\bar\tau_{r\theta}$ и $\bar\sigma_r$ выражаются через $\bar\sigma_\theta$ так:

$$\bar\tau_{r\theta}=\frac{1}{p-1}\frac{d\bar\sigma_\theta}{d\theta},\qquad p\bar\sigma_r=\frac{d\bar\tau_{r\theta}}{d\theta}-\bar\sigma_\theta \tag{2.7}$$

Общий интеграл уравнений (2.6) имеет вид

при $\alpha<\theta<\pi$

$$\bar\sigma_\theta(p,\theta)=A\cos(p+1)\theta+B\cos(p-1)\theta+$$
$$+A_0\sin(p+1)\theta+B_0\sin(p-1)\theta \tag{2.8}$$

при $-\pi<\theta<\alpha$

$$\bar\sigma_\theta(p,\theta)=C\cos(p+1)\theta+D\cos(p-1)\theta+$$
$$+C_0\sin(p+1)\theta+D_0\sin(p-1)\theta \tag{2.9}$$

Здесь A, B, C, D, A_0, B_0, C_0, D_0 — неизвестные функции комплексного параметра p.

Используя обычную процедуру Б. Нобла [10], при помощи (2.1)—(2.3), (2.7)—(2.9) приходим к следующей однородной системе уравнений Винера-Хопфа для неизвестных трансформант разрывов производных смещений на самом надрезе и напряжений на его продолжении:

$$
\begin{aligned}
V^-(p, \alpha) &= f_{11}(p, \alpha)\,\Phi^+(p, \alpha) + f_{12}(p, \alpha)\,\Psi^+(p, \alpha) \\
U^-(p, \alpha) &= f_{21}(p, \alpha)\,\Phi^+(p, \alpha) + f_{22}(p, \alpha)\,\Psi^+(p, \alpha)
\end{aligned}
\qquad (2.10)
$$

Здесь

$$V^-(p, \alpha) = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right]\Bigg|_{\theta=\alpha} r^p dr$$

$$U^-(p, \alpha) = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\right]\Bigg|_{\theta=\alpha} r^p dr$$

$$f_{21}(p, \alpha) = \frac{\sin 2p\pi}{2\delta\delta_0}\, p(p+1)\sin^2\alpha \sin 2p\alpha$$

$$f_{22}(p, \alpha) = \frac{\sin 2p\pi}{2\delta\delta_0} [\sin p(\pi+\alpha)\sin(\pi-\alpha)p -$$

$$- p^2\sin^2\alpha\cos 2p\alpha + p\sin\alpha\cos\alpha\sin 2p\alpha]$$

$$\delta_0 = \sin^2 p(\pi-\alpha) - p^2\sin^2\alpha$$

$$\delta = \sin^2 p(\pi+\alpha) - p^2\sin^2\alpha$$

$$\Phi^+(p, \alpha) = \int\limits_1^\infty \sigma_\theta(r, \alpha)\, r^p dr$$

$$\Psi^+(p, \alpha) = \int\limits_1^\infty \tau_{r\theta}(r, \alpha)\, r^p dr$$

Решение системы уравнений (2.10), согласно (2.4), имеет вид

$$\varphi^+(p) = \frac{p}{p+1/2}\,\frac{M}{K^+(p)\,X^+(p)} \qquad (2.11)$$

$$\varphi^-(p) = \frac{K^-(p)}{X^-(p)}\, M \qquad (2.12)$$

Здесь

$$X^\pm(p) = F^\pm(p)\{I\,\mathrm{ch}[\sqrt{f(p)}\,\beta^\pm(p)] + Q(p)\,\mathrm{sh}[\sqrt{f(p)}\,\beta^\pm(p)]\}$$

$$\exp\left[\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\ln\Delta(t)}{t-p}\,dt\right] = \begin{cases} F^{+}(p), & (p\in D^{+}) \\ F^{-}(p), & (p\in D^{-}) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{f(t)}}\frac{dt}{t-p} = \begin{cases} \beta^{+}(p) & (p\in D^{+}) \\ \beta^{-}(p) & (p\in D^{-}) \end{cases}$$

$$K^{+}(p) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1/2-p)}, \qquad K^{-}(p) = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(3/2+p)}$$

$$\varphi^{+}(p) = \{\Phi^{+}(p),\ \Psi^{+}(p)\}, \qquad \varphi^{-}(p) = \{V^{-}(p),\ U^{-}(p)\}$$

$$b(p) = \frac{\sin^2 p\pi}{\delta(p)\delta_0(p)}\left[\sin p(\pi+\alpha)\sin p(\pi-\alpha) + p^2\sin^2\alpha\cos 2p\alpha\right]$$

$$c(p) = -\frac{\sin^2 p\pi}{\delta(p)\delta_0(p)}\,p\sin\alpha\sin 2p\alpha$$

$$l(p) = \cos\alpha, \quad m(p) = (1-p)\sin\alpha$$

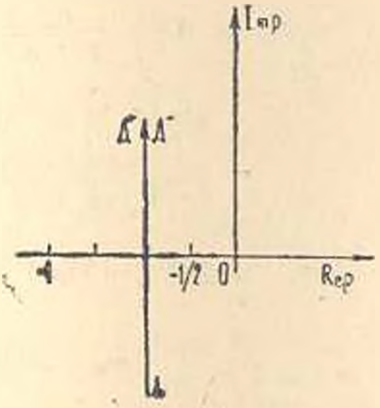
$$n(p) = (1+p)\sin\alpha$$

$$M = \{M_1,\ M_2\}$$

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(k_{\rm I}\cos q + k_{\rm II}\sin q)$$

$$M_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(k_{\rm I}\sin q - k_{\rm II}\cos q)$$

$$q = \frac{\sin\alpha}{2\pi i}\int_L \frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{f(t)}}\,dt$$



Фиг. 2.

Контур интегрирования L показана на фиг. 2.

§ 3. *Анализ решения*

Определим зависимость коэффициентов интенсивности напряжений $k_{\rm I}$ и $k_{\rm II}$ в окрестности вершины трещины $\theta=\alpha$, $r=1$ от коэффициентов интенсивности напряжений на бесконечности $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$ и угла α.

Согласно формулам (2.11) .(2.5) находим

$$k_{\rm I} = \frac{F^{+}(-1/2)}{2}\{K_{\rm I}[m_{11}M_{22}(-1/2,\ \alpha) - m_{21}M_{12}(-1/2,\ \alpha)] + \\ + K_{\rm II}[m_{22}M_{12}(-1/2,\ \alpha) - m_{12}M_{22}(-1/2,\ \alpha)]\} \tag{3.1}$$

$$k_{\rm II} = \frac{F^{+}(-1/2)}{2}\{K_{\rm I}[m_{21}M_{11}(-1/2,\ \alpha) - m_{11}M_{21}(-1/2,\ \alpha)] + \\ + K_{\rm II}[m_{12}M_{21}(-1/2,\ \alpha) - m_{22}M_{11}(-1/2,\ \alpha)]\}$$

Здесь

$$M_{11} = A_{11}(-1/2, \alpha)\cos q - A_{12}(-1/2, \alpha)\sin q$$

$$M_{12} = A_{11}(-1/2, \alpha)\sin q + A_{12}(-1/2, \alpha)\cos q$$

$$M_{21} = A_{21}(-1/2, \alpha)\cos q - A_{22}(-1/2, \alpha)\sin q$$

$$M_{22} = A_{21}(-1/2, \alpha)\sin q + A_{22}(-1/2, \alpha)\cos q$$

$$A_{11}(p, \alpha) = \operatorname{ch}[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{+}(p, \alpha)] -$$

$$-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{f(p, \alpha)}}\operatorname{sh}[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{+}(p, \alpha)]$$

$$A_{12}(p, \alpha) = \frac{p-1}{\sqrt{f(p, \alpha)}}\sin\alpha\operatorname{sh}[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{-}(p, \alpha)]$$

$$A_{21}(p, \alpha) = -\frac{p+1}{\sqrt{f(p, \alpha)}}\sin\alpha\operatorname{sh}[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{+}(p, \alpha)]$$

$$A_{22}(p, \alpha) = \operatorname{ch}[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{+}(p, \alpha)] +$$

$$+\frac{\cos\alpha}{\sqrt{f(p, \alpha)}}\operatorname{sh}[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{-}(p, \alpha)]$$

$$m_{11} = 2\cos^3\frac{\alpha}{2}, \quad m_{12} = 3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}, \quad m_{21} = \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$m_{22} = 2\cos\frac{\alpha}{2}(3\sin^2\alpha/2 - 1)$$

В частности, при $\alpha = 0$ имеем $k_{\rm I} = K_{\rm I}$, $k_{\rm II} = K_{\rm II}$.

§ 4. *Теория криволинейных трещин*

Ответвление можно рассматривать в рамках теории возмущений бесконечно-малым и происходящим под действием внешних несимметричных нагрузок, характеризуемых коэффициентами $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$. Будем предполагать, что ответвление представляет собой трещину нормального разрыва, то есть

$$k_{\rm II}(\alpha) = 0$$

Это уравнение при помощи (3.1) можно записать так:

$$\lambda = -\frac{\varphi_{21}(\alpha)}{\varphi_{22}(\alpha)}, \qquad \lambda = \frac{K_{\rm II}}{K_{\rm I}} \tag{4.1}$$

$$\varphi_{21} = m_{21}M_{11}(-1/2, \alpha) - m_{11}M_{21}(-1/2, \alpha)$$

$$\varphi_{22} = m_{12}M_{21}(-1/2, \alpha) - m_{22}M_{11}(-1/2, \alpha)$$

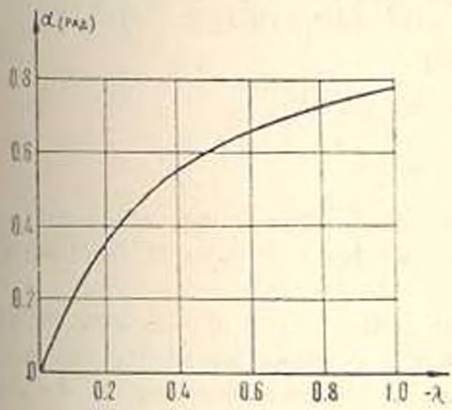
Уравнение (4.1) служит для определения угла отклонения трещины по заданному отношению $\dfrac{K_{\rm II}}{K_{\rm I}}$. Зависимость $\alpha = \alpha(\lambda)$ изображена на фиг. 3.

Начало развития хрупкой трещины определяется условием $k_1 = K_{1c}$, то есть согласно (3.1) и (4.1)

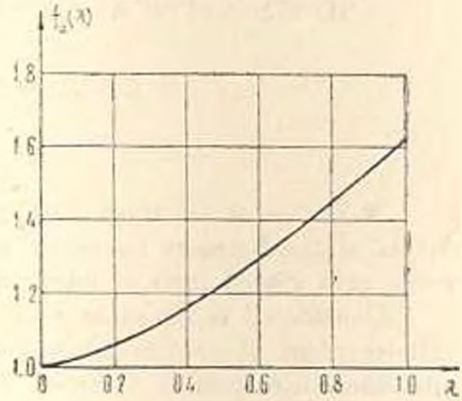
$$K_1 f_0(\lambda) = K_{1c}$$

$$f_0(\lambda) = m_{11}M_{22}(-1/2,\ \alpha) - m_{21}M_{12}(-1/2,\ \alpha) +$$
$$+\lambda[m_{22}M_{12}(-1/2,\ \alpha) - m_{12}M_{22}(-1/2,\ \alpha)]$$

График функции $f_0(\lambda)$ приведен на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

Как показывает сравнение, результаты данной теории при $\lambda < 1$ весьма близки к соответствующим результатам, полученным по энергетической теории и по теории обобщенного нормального разрыва [14]. Серьезное расхождение этих теорий получается при $\lambda > 1$. Имеющихся данных пока недостаточно, чтобы отдать предпочтение той или другой теории. Заметим, что некоторые неоднородные задачи для трещин с ветвлением рассмотрены в работах [16, 17].

Авторы благодарны академику АН СССР Ф. Д. Гахову и профессору Г. П. Черепанову за обсуждение работы.

Азербайджанский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступила 17 VI 1977

Վ. Դ. ԿՈՒԼԻԵՎ, Ա. Է. ՍԱԴԻԽՈՎ

ԵՐԿՈՒ ԶՈՒՅԳ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՌԻՄԱՆԻ ԽՆԴԻՐԸ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱ ՄԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է ուղղագիծ կիսաանվերջ ճեղքով անվերջ հարթության համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը։

Ճեղքն ունի մի վերջավոր ուղղագիծ ճյուղավորում, որը թեքված է կիսաանվերջ ճեղքի նկատմամբ կամայական անկյունով։

Տրվում է համասեռ սինգուլյար խնդրի ճշգրիտ լուծումը։ Ստացված լուծումն օգտագործվում է կորագիծ ճեղքերի տեսության նոր տարբերակ կառուցելու համար, որը համեմատվում է այլ հայտնի տարբերակների հետ։

THE RIEMANN PROBLEM FOR TWO PAIRS OF FUNCTIONS AND ITS APPLICATION IN THE ELASTICITY THEORY

F. D. KULIEV, A. E. SADYKHOV

Summary

A review of all those particular cases is presented where the solution of the Riemann boundary problem for two pairs of functions is given in a closed form of integrals.

Considered is the plane problem in the theory of elasticity for an infinite plane of rectilinear semi-infinite cross-section having one definite linear direction at a certain angle to infinite cross-section. An accurate solution to the homogeneous singular problem is obtained that is not found in the literature.

The accurate solution is used to evolve a new variant of the curvilinear crack theory which is compared with other known variants.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы пар функций. Успехи матем. наук, 1952, т. 7, вып. 4, 3—54.
2. *Риман Б.* Сочинения. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1968.
4. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., «Наука», 1970.
5. *Гахов Ф. Д.* О краевой задаче Римана. Матем. сб., 1937, т. 2(44), № 4, 673—683.
6. *Чеботарев Г. Н.* К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы пар функций. Уч. зап. Казанского ун-та, 1956, т. 116, кн. 4, 31—58.
7. *Морозов В. В.* О коммутативных матрицах. Уч. зап. Казанского ун-та, 1952, т. 112, кн. 9, 17—20.
8. *Храпков А. А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил. Прикл. матем. и мех. 1971, т. 35, вып. 4, 677—689.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
10. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1962.
11. *Черепанов Г. П.* Об одном интегрируемом случае краевой задачи Римана для нескольких функций. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 6, 1285—1288.
12. *Бабешко В. А.* Факторизация одного класса матриц-функций и ее приложения. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 5, 1094—1097.
13. *Бабешко В. А.* К факторизации одного класса матриц-функций, встречающихся в теории упругости. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6, 1333—1335.

14. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
15. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в теории упругости. Л., «Наука», 1968.
16. *Özbek T.* The plane problem of a semi-infinite crack and a finite crack in two radial lines. Int. Journal of Engineering Sci. 1977, vol. 15, No. 3, 185—192.
17. *Chattergee S. N.* The stress field in the neighborbood of a brached in an infinite elastic sheet. Int. Journal of solids and struct. 1975, vol. 11, No. 5, 521—538.
18. *Chien H. Wu.* Elasticity problems of a slender Z-crack. Journal of Elasticity, 1978, vol. 8, No. 2, 183—205.
19. *Tamate Osamu.* Two arbitrary situated cracks in an elastic plate under flexure. Int. Journal Solids and Structures, 1976, vol. 12, No. 4, 287—298.