ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

А. Н. ГУЗЬ, А. В. НАВОЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСЖИМАЕМЫХ ПЛАСТИН ПРИ РАВНОМЕРНОМ БОКОВОМ ДАВЛЕНИИ

Введение. В работах [1, 2] исследована соответственно устойчивость полосы (плоская деформация) и стержня кругового поперечного сечения, которые помещены без трения между двумя абсолютно жесткими стенками и к боковым поверхностям которых приложено равномерное давление. Материал полосы и стержня считался упругим, несжимаемым с произвольной формой потенциала. В результате исследования в [1, 2] получен следующий вывод: состояние равновесия является устойчивым, если к боковой поверхности приложено давление в виде «следящей» нагрузки и неустойчивым, если к боковой поверхности приложено давление в виде «мертвой» нагрузки. В последнем случае критическая нагрузка для длинных полосы и стержня приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы при осевом сжатии. Для проверки общности полученных результатов целесообразно исследовать другие задачи рассматриваемого класса (для тел с поперечным сечением другой формы).

В данной статье исследуем устойчивость пластин прямоугольной и круговой формы, которые помещены без трения в абсолютно жесткие цилиндры соответствующей формы (что определяет граничные условия на торцах пластин) и к боковым (нижней и верхней) поверхностям которых приложено равномерное давление в виде «следящей» или «мертвой» нагрузок. Для определения «следящих» нагрузок будем использовать соотношения [3], которые в рамках теории малых докритических деформаций являются более точными по сравнению с обычно принятыми. Материал пластин будем считать изотропным, несжимаемым с произвольной формой потенциала. Следуя работам [1—5], исследования выполним в общей форме для трехмерных линеаризированных теорий упругой устойчивости при конечных и малых докритических деформациях [6, 7]. При исследовании применим лагранжевы координаты, которые в недеформированном состоянии совпадают с декартовыми (x_1, x_2, x_3) или круговыми цилиндрическими (r, θ, x_3) координатами. Величины, относящиеся к докритическому состоянию, отметим индексом «ноль», возмущения отмечать индексом не будем.

Заметим, что в рассматриваемых задачах в силу условия несжимаемости для докритического состояния при его определении приходим к задаче о всестороннем равномерном сжатии. В связи с этим можно использовать основные соотношения [3—5]. Следуя [1, 2, 4, 5], будем полагать, что выполняется неравенство

$$\mu_0 > 0 \qquad (0.1)$$

которое обеспечивает устойчивость состояния равновесия несжимаемого тела при всестороннем равномерном сжатии, когда ко всей боковой поверхности приложено давление в виде «следящей» нагрузки [4]. Величина μ_0 в (0.1) определяется через упругий потенциал соотношениями (1.8) или (1.9).

§ 1. *Основные соотношения.* Следуя [1—5], представим в следующем виде линеаризированные:
уравнения движения

$$\mu_0 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{grad} p - \rho \ddot{\vec{u}} = 0 \qquad (1.1)$$

условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \qquad (1.2)$$

граничные условия в напряжениях на части S_1 поверхности тела

$$\vec{Q}\big|_{S_1} = \vec{P}; \quad \vec{Q} = (2\mu_0 - \sigma_0)\vec{N}\cdot\nabla\vec{u} + (\mu_0 - \sigma_0)\vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{N}p \qquad (1.3)$$

и выражения для определения правых частей граничных условий (1.3) при действии на S_1 «следящей» нагрузки

$$\vec{P} = -\sigma_0(\vec{N}\cdot\nabla\vec{u} + \vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u})\big|_{S_1} \qquad (1.4)$$

Из (1.3) и (1.4) получаем граничные условия, когда действует «следящая» нагрузка, в следующем виде:

$$(2\mu_0\vec{N}\cdot\nabla\vec{u} + \mu_0\vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{N}p)\big|_{S_1} = 0 \qquad (1.5)$$

Из (1.3) получаем граничные условия, когда действует «мертвая» нагрузка ($\vec{P} = 0$), в виде

$$[(2\mu_0 - \sigma_0)\vec{N}\cdot\nabla\vec{u} + (\mu_0 - \sigma_0)\vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{N}p]\big|_{S_1} = 0 \qquad (1.6)$$

Примечание 1. Из сравнения выражений (1.5) и (1.6) следует, что граничные условия (1.5) при действии «следящей» нагрузки можно получить формально из граничных условий (1.6) при действии «мертвой» нагрузки, если в последнем выражении положить $\sigma_0 = 0$, которое входит явно.

Граничные условия (1.5) и (1.6) относятся к боковым поверхностям. На торцах, которые соприкасаются без трения со стенками абсолютно жестких цилиндров, будем считать, что выполняются следующие условия

$$u_n = 0; \qquad \vec{Q}_S = 0 \qquad (1.7)$$

В (1.7) введены обозначения: u_n — составляющая вектора перемещений, направленная по нормали к торцу; $\vec{Q}_S$ — составляющая вектора напряжений на поверхности торца, лежащая в касательной плоскости.

В (1.1) — (1.6) и ниже введены следующие обозначения: $\vec{u}$ — возмущения вектора перемещений; ρ — плотность материала в естественном (недеформированном) состоянии; $\vec{N}$ — орт нормали к поверхности тела в естественном состоянии; $\vec{P}$ — возмущения внешних нагрузок, действующих на S_1; p — возмущение величины, связанной с гидростатическим давлением (заметим, что вышеизложенные соотношения сформулированы относительно вектора $\vec{u}$ и скаляра p); σ_0 — напряжение, соответствующее всестороннему равномерному сжатию (заметим, что напряжение σ_0 является истинным и для теории конечных докритических деформаций, поскольку в силу условий несжимаемости при всестороннем равномерном сжатии площадь поверхности тела не изменяется); μ_0 — величина, которая определяется через упругий потенциал из нижеприведенных выражений.

Следуя [4], приведем выражения для определения величины μ_0 через упругий потенциал, который является функцией A_i^0 — алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина. В этом случае для теории конечных докритических деформаций получено следующее выражение:

$$\mu_0 = \left(\frac{\partial}{\partial A_1^0} + \frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}; \qquad \Phi^0 = \Phi^0(A_1^0,\ A_2^0) \tag{1.8}$$

а в случае первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций — следующее выражение:

$$\mu_0 = \frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0\Big|_{A_i^0=0} + \sigma_0; \qquad \Phi^0 = \Phi^0(A_2^0,\ A_3^0) \tag{1.9}$$

Исследуем вопрос о применимости метода Эйлера к рассматриваемым задачам. В случае действия «мертвых» нагрузок ($\vec{P} = 0$), как известно, можно применять метод Эйлера. В случае действия «следящих» нагрузок на боковые поверхности первое условие (1.7) обеспечивает выполнение достаточных условий [8] применимости метода Эйлера. Таким образом, в рассматриваемых задачах как при действии «мертвых» нагрузок, так и при действии «следящих» нагрузок можно применять метод Эйлера. В связи с этим в дальнейшем будем применять уравнение (1.1) без инерционных членов в виде

$$\mu_0 \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \mu_0 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} + \operatorname{grad} p = 0 \tag{1.10}$$

Следуя [7], запишем представление общего решения уравнений (1.10) и (1.2). В данном случае оно имеет вид

$$u_n = \frac{\partial}{\partial S}\psi - \frac{\partial^2}{\partial n\,\partial x_3}\chi, \quad U_S = -\frac{\partial}{\partial n}\psi - \frac{\partial^2}{\partial S\,\partial x_3}\chi,$$
$$u_3 = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi, \qquad p = \mu_0\frac{\partial}{\partial x_3}\Delta\chi, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{1.11}$$

где ψ и χ — гармоническая и бигармоническая функции. В (1.11) через

n и S обозначены нормаль и касательная к контуру поперечного сечения при $x_1 = \text{const}$.

Таким образом, рассматриваемые задачи сводятся к однородным задачам: к уравнениям (1.10) и (1.2); граничным условиям на торцах (1.7); граничным условиям по боковым поверхностям (1.5) при действии «следящих» нагрузок или (1.6) при действии «мертвых» нагрузок.

Примечание 2. Уравнения (1.10) и (1.2), а также граничные условия при действии «следящих» нагрузок (1.5) переходят в соответствующие однородные соотношения линейной классической теории упругости, если величину μ_0 заменить на постоянную Ляме μ. Граничные же условия (1.6) при действии «мертвой» нагрузки и граничные условия на торцах (1.7) не переходят в соответствующие выражения классической линейной теории упругости при указанной замене.

Перейдем к исследованию устойчивости пластин конкретной формы.

§ 2. *Прямоугольные пластины.* Рассмотрим устойчивость прямоугольных пластин ($0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $0 \leqslant x_2 \leqslant b$; $-h \leqslant x_3 \leqslant +h$), которые при $x_1 = 0, a$ и $x_2 = 0, b$ соприкасаются без трения со стенками абсолютно жесткого тела, а при $x_3 = \pm h$ загружены равномерным давлением в виде „следящей" или „мертвой" нагрузки.

Из (1.7) получаем граничные условия при $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ в следующем виде:

$$u_1 = 0, \quad \mu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = 0 \tag{2.1}$$

а также при $x_2 = 0$ и $x_2 = b$ в следующем виде:

$$u_2 = 0, \qquad \mu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = 0 \tag{2.2}$$

Из (1.5) получаем граничные условия при $x_3 = \pm h$ в случае действия «следящей» нагрузки в форме

$$\mu_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0, \quad \mu_0 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0, \quad 2\mu_0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p = 0 \tag{2.3}$$

Из (1.6) получаем граничные условия при $x_3 = \pm h$ в случае действия «мертвой» нагрузки в форме

$$(2\mu_0 - \sigma_0) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$(2\mu_0 - \sigma_0) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0 \tag{2.4}$$

$$(2\mu_0 - \sigma_0) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p = 0$$

Согласно (1.11) общее решение представим в следующем виде:

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\chi; \quad u_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\chi$$
$$u_3 = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi; \qquad p = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x_3}\Delta\chi \tag{2.5}$$

Гармоническую и бигармоническую функции ψ и χ, удовлетворяющие условиям на торцах (2.1) и (2.2), представим в следующем виде: для изгибной формы потери устойчивости

$$\psi = A \operatorname{sh}\gamma x_3 \sin\pi\frac{m}{a}x_1 \sin\pi\frac{n}{b}x_2, \qquad \gamma^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$
$$\chi = (B \operatorname{ch}\gamma x_3 + C\gamma x_3 \operatorname{sh}\gamma x_3)\cos\pi\frac{m}{a}x_1 \cos\pi\frac{n}{b}x_2 \tag{2.6}$$

для потери устойчивости с образованием шейки

$$\psi = A \operatorname{ch}\gamma x_3 \sin\pi\frac{m}{a}x_1 \sin\pi\frac{n}{b}x_2$$
$$\chi = (B \operatorname{sh}\gamma x_3 + C\gamma x_3 \operatorname{ch}\gamma x_3)\cos\pi\frac{m}{a}x_1 \cos\pi\frac{n}{b}x_2 \tag{2.7}$$

Рассмотрим вначале случай действия «мертвых» нагрузок, так как при действии «следящих» нагрузок результаты можно получить из рассматриваемого случая, следуя примечанию 1, § 1. Подставляя выражения (2.6) в граничные условия (2.3), после ряда преобразований получаем характеристическое уравнение в виде

$$\delta = 0, \quad \delta = \det\|\alpha_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2.8}$$

В (2.8) введены следующие обозначения:

$$\alpha_{11} = -\mu_0\pi\frac{n}{b}\gamma \operatorname{ch}\gamma h, \quad \alpha_{12} = -\mu_0\pi\frac{m}{a}\gamma^2(2\mu_0 - \sigma_0)\operatorname{ch}\gamma h$$
$$\alpha_{13} = -\pi\frac{m}{a}\gamma^2(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma h \operatorname{sh}\gamma h - \pi\frac{m}{a}\gamma^2 2\mu_0 \operatorname{ch}\gamma h$$
$$\alpha_{21} = -\alpha_{11}\frac{m}{a}\frac{b}{n}, \quad \alpha_{22} = \alpha_{12}\frac{n}{b}\frac{a}{m}, \quad \alpha_{23} = \alpha_{13}\frac{n}{b}\frac{a}{m}, \quad \alpha_{31} = 0 \tag{2.9}$$
$$\alpha_{32} = -(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma^3 \operatorname{sh}\gamma h, \quad \alpha_{33} = -(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma^3\gamma h \operatorname{ch}\gamma h + \sigma_0\gamma^3 \operatorname{sh}\gamma h$$

Подставляя выражения (2.7) для случая потери устойчивости с образованием шейки в граничные условия (2.3), также получаем характеристическое уравнение в виде (2.8) и (2.9). Таким образом, две различные формы потери устойчивости (изгибная и с образованием шейки) соответствуют одному и тому же характеристическому уравнению и, следовательно, имеют одну и ту же критическую нагрузку. После ряда преобразований характеристическому определителю (2.8) и (2.9) можно придать следующий вид:

$$\delta = -\gamma^6\mu_0(2\mu_0 - \sigma_0)^2\gamma h\left(1 - \frac{2\mu_0 + \sigma_0}{2\mu_0 - \sigma_0}\frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{2.10}$$

Следуя примечанию 1. § 1 и положив в (2.10) $\sigma_0 = 0$, которое входит явно, получаем характеристический определитель для случая действия «следящей» нагрузки в следующей форме:

$$\delta = -4\gamma^6\mu_0^3\gamma h\left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{2.11}$$

Учитывая неравенство (0.1) и неравенство $\operatorname{sh}2\gamma h > 2\gamma h$, из (2.11) получаем, что $\delta > 0$, то есть $\delta \neq 0$. Таким образом, приходим к выводу, что состояние равновесия при действии давления при $x_3 = \pm h$ в виде «следящей» нагрузки является устойчивым. Заметим, что этот результат получен для тела с потенциалом произвольной формы.

В случае действия «мертвой» нагрузки, учитывая неравенство (0.1), а также то обстоятельство, что при сжатии $\sigma_0 < 0$, из (2.10) получаем одно уравнение, корни которого имеют физический смысл, в следующем виде:

$$1 - \frac{2\mu_0 + \sigma_0}{2\mu_0 - \sigma_0}\frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h} = 0 \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) по форме совпадает с соответствующими уравнениями [1, 4] для задачи об устойчивости полосы.

§ 3. *Круговые пластины.* Рассмотрим устойчивость круговой пластины ($0 \leqslant r \leqslant R$; $-h \leqslant x_3 \leqslant +h$), которая при $r = R$ соприкасается без трения со стенками абсолютно жесткого цилиндра, а при $x_3 = \pm h$ загружена равномерным давлением в виде «мертвой» или «следящей» нагрузки. Исследование выполним для осесимметричной задачи. Из (1.7) и (1.3) в этом случае получаем при $r = R$ следующие граничные условия:

$$u_r = 0, \quad \mu_0\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \tag{3.1}$$

$$\mu_0\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial r}\right) = 0, \qquad 2\mu_0\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p = 0 \tag{3.2}$$

Из (1.6) получаем граничные условия при $x_3 = \pm h$ в случае действия «мертвой» нагрузки в следующем виде:

$$\begin{gathered}(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_r}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0)\left(\frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial x_3}\right) = 0 \\ (2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p = 0\end{gathered} \tag{3.3}$$

Согласно (1.11) общее решение для рассматриваемого случая можно представить в такой форме:

$$u_r = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial x_3}\chi, \quad u_\theta = 0, \quad u_3 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\chi$$
$$p = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi \tag{3.4}$$

где χ — осесимметричная бигармоническая функция.

Бигармоническую осесимметричную функцию χ, удовлетворяющую условиям (3.1) на торцах, представим в следующем виде: для изгибной формы потери устойчивости —

$$\chi = (A \operatorname{ch} \gamma x_3 + B\gamma x_3 \operatorname{sh} \gamma x_3)\, J_0(\gamma r); \qquad \gamma = \frac{\varkappa_k}{R} \tag{3.5}$$

и для потери устойчивости с образованием шейки —

$$\chi = (A \operatorname{sh} \gamma x_3 + B\gamma x_3 \operatorname{ch} \gamma x_3)\, J_0(\gamma r) \tag{3.6}$$

В (3.5) и (3.6) введены обозначения: $J_0(\alpha)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $\varkappa_k$ — k-ый корень уравнения $J_0'(\varkappa) = 0$.

Рассмотрим вначале случай действия «мертвых» нагрузок, так как при действии «следящих» нагрузок результаты можно получить из рассматриваемого случая, следуя примечанию 1, § 1. Подставляя выражение (3.5) в граничные условия (3.3), после ряда преобразований получаем характеристическое уравнение в следующем виде:

$$\delta = 0, \ \delta = \det \| a_{ij} \|, \ i, j = 1, 2 \tag{3.7}$$

В (3.7) введены следующие обозначения:

$$a_{11} = -\gamma^3 (2\mu_0 - \sigma_0) \operatorname{ch} \gamma h, \ a_{12} = -\gamma^3 [(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma h \operatorname{sh} \gamma h + 2\mu_0 \operatorname{ch} \gamma h]$$
$$a_{21} = -\gamma^3 (2\mu_0 - \sigma_0) \operatorname{sh} \gamma h, \ a_{22} = -\gamma^3 [(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma h \operatorname{ch} \gamma h - \sigma_0 \operatorname{sh} \gamma h] \tag{3.8}$$

После преобразований характеристический определитель можно представить в следующем виде:

$$\delta = \gamma^6 (2\mu_0 - \sigma_0)^2 \gamma h \left(1 - \frac{2\mu_0 + \sigma_0}{2\mu_0 - \sigma_0} \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{3.9}$$

Подставляя выражения (3.6) для случая потери устойчивости с образованием шейки в граничные условия (3.3), также получаем характеристический определитель в виде (3.9). Таким образом, две различные формы потери устойчивости (изгибная и с образованием шейки) соответствуют одному и тому же характеристическому уравнению, следовательно, имеют одну и ту же критическую нагрузку.

Следуя примечанию 1, § 1 и положив в (3.9) $\sigma_0 = 0$, которое входит явно, получаем характеристический определитель для случая действия «следящей» нагрузки в следующем виде:

$$\delta = 4\gamma^6 \mu_0^2 \gamma h \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{3.10}$$

В результате анализа выражения (3.10), как и в случае прямоугольной пластины, приходим к выводу об устойчивости состояния равновесия при $x_1 = \pm h$ «следящей» нагрузки для тела с потенциалом произвольной формы. В случае действия «мертвой» нагрузки снова приходим к уравнению (2.12), анализ которого выполним в следующем параграфе.

§ 4. *Примеры.* В настоящем параграфе рассмотрим примеры для случая действия «мертвой» нагрузки при $x_1 = \pm h$, то есть выполним анализ уравнения (2.12) для различных теорий.

Из (1.8) и (2.12) для теории конечных докритических деформаций получаем следующее выражение для определения критической нагрузки:

$$(\sigma_0)_{кр} = 2\left[\left(\frac{\partial}{\partial A_1^0} + \frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right]\min\left\{\frac{2\gamma_1 h - \operatorname{sh} 2\gamma_1 h}{2\gamma_1 h + \operatorname{sh} 2\gamma_1 h}\right\} \qquad (4.1)$$

Из выражений (1.9) и (2.12) для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций получаем следующее выражение для определения критической нагрузки:

$$(\sigma_0)_{кр} = 2\left[\frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right]\min\left\{\frac{2\gamma_1 h - \operatorname{sh} 2\gamma_1 h}{3\operatorname{sh} 2\gamma_1 h - 2\gamma_1 h}\right\} \qquad (4.2)$$

Для тонкостенных пластин ($\gamma h < 1$) из (4.1) для теории конечных докритических деформаций с точностью до $(\gamma h)^4$ получаем

$$(\sigma_0)_{кр} \approx -\left[\left(\frac{\partial}{\partial A_1^0} + \frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right]\frac{2}{3}(\gamma_1 h)^2\left[1 - \frac{2}{15}(\gamma_1 h)^2\right] \qquad (4.3)$$

Для тонкостенных пластин ($\gamma h < 1$) из (4.2) для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций с точностью до $(\gamma h)^4$ получаем следующее выражение для определения критической нагрузки:

$$(\sigma_0)_{кр} \approx -\left[\frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right]\frac{2}{3}(\gamma_1 h)^2\left[1 - \frac{4}{5}(\gamma_1 h)^2\right] \qquad (4.4)$$

В (4.3) и (4.4) введены следующие обозначения: $\gamma_1 = \pi\sqrt{a^{-2} + b^{-2}}$ — для прямоугольной пластины; $\gamma_1 = \varkappa_1 R^{-1}$ — для круглой пластины.

Представим упругие потенциалы в виде рядов; для теории конечных докритических деформаций

$$\Phi^0(A_1^0, A_2^0) = \sum_{i,j} C_{ij}(A_1^0)^i (A_2^0)^j \qquad (4.5)$$

а также для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций

$$\Phi^0(A_2^0, A_3^0) = \sum_{i,j} \varkappa_{ij}(A_2^0)^i (A_3^0)^j \qquad (4.6)$$

В результате из (4.3) и (4.5) получаем для теории конечных докритических деформаций

$$(\sigma_0)_{кр} \approx -\frac{1}{2} p_{эл} \left| 1 - \frac{2}{15} (\gamma_1 h)^2 \right|, \quad p_{эл} = \frac{4}{3} (C_{10} + C_{01}) (\gamma_1 h)^2 \quad (4.7)$$

а из (4.4) и (4.6) — для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций

$$(\sigma_0)_{кр} \approx -\frac{1}{2} p_{эл} \left| 1 - \frac{4}{5} (\gamma_1 h)^2 \right|, \quad p_{эл} = \frac{4}{3} \mu_{10} (\gamma_1 h)^2 \quad (4.8)$$

В (4.7) и (4.8) через $p_{эл}$ обозначена эйлерова сила при равномерном сжатии в плоскости пластины, вычисленная с привлечением гипотезы Кирхгофа—Лява.

Из (4.7) и (4.8) следует, что при действии «мертвой» нагрузки при $x_3 = \pm h$ состояние равновесия является неустойчивым.

Выводы. Вышеизложенные результаты для прямоугольной и круговой пластин, а также результаты [1, 2] для полосы и стержня дают возможность сделать следующие общие выводы, относящиеся к вопросу устойчивости упругих несжимаемых тел, которые помещены без трения между абсолютно жесткими стенками и к боковым поверхностям которых приложено равномерное давление в виде «следящей» или «мертвой» нагрузок.

1) Состояние равновесия является устойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «следящей» нагрузки.

2) Состояние равновесия является неустойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «мертвой» нагрузки.

3) В случае действия «мертвой» нагрузки величины критической нагрузки для тонких (длинных) тел приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы при осевом сжатии.

4) Изгибная форма потери устойчивости и форма потери устойчивости с образованием шейки имеют одну и ту же критическую нагрузку.

Институт механики АН УССР
Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 10 I 1978

Ա. Ն. ԳՈՒԶ, Ա. Վ. ՆԱՎՈՅԱՆ

ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՉՍԵՂՄՎՈՂ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտված է չսեղմվող ուղղանկյուն և շրջանային թիթեղների կայունությունը, որոնք առանց շփման տեղավորված են բացարձակ կոշտ պատերի միջև և որոնց կողմնային մակերևույթներին կիրառված է հավասարաչափ ճնշում «հետևող» կամ «մեռած» բեռնավորումների տեսքով։ Արդյունքները ստացված են ընդհանուր տեսքով եռաչափ գծայնացված կայունության տեսությունների համար վերջավոր և փոքր նախակրիտիկական դեֆորմացիաների դեպքում։

Ապացուցված են հետևյալ դրույթները՝ 1) հավասարակշռության վիճակը կլինի կայուն, եթե կողմնային մակերևույթներին կիրառված լինի «հետևող» բեռնավորում, 2) հավասարակշռության վիճակը կլինի անկայուն, եթե կողմնային մակերևույթներին կիրառված լինի «մեռած» բեռնավորում, 3) «մեռած» բեռնավորման դեպքում կրիտիկական բեռնավորումը բարակ թիթեղների համար մոտավորապես երկու անգամ փոքր է լինում էյլերյան ուժից, 4) ճկման ձևով կայունության կորուստը և կայունության կորուստը վզիկի առաջացման ձևով ունեն նույն կրիտիկական բեռնավորումը։

ON STABILITY OF INCOMPRESSIBLE PLATES UNDER UNIFORM LATERAL PRESSURE

A. N. GOOZ, A. V. NAVOYAN

Summary

The investigation on the stability of incompressible rectangular and circular plates placed without friction between absolutely frigid walls, their lateral surfaces being subjected to uniform compressive forces of the "following" and "non-following" (dead) type, is described. The results have been obtained in general form for three-dimentional linearized theories of elastic stability for finite and small critical deformations.

The following statements have been proved:

1) The equilibrium is stable when ;compressive forces, applied to lateral surfaces, are of the "following" type;

2) The equilibrium is instable when compressive forces, applied to lateral surfaces, are the "non-following" (dead) type;

3) When compressive forces are of the dead type, the critical forces for thin plates are about twice less than Eyler's forces;

4) The flexion type of stability loss and that forming a neck are of the same critical force.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих несжимаемых тел при равномерном боковом давлении. Прикл. механика, 1977, т. 13, в. 11.
2. *Гузь А. Н., Навоян А. В.* Об устойчивости несжимаемого стержня при равномерном боковом давлении. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1978, т. 31, № 5.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, в. 6.
4. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих несжимаемых тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, в. 11.

5. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии «мертвой» нагрузкой». Прикл. механика, 1976, т. 12, в. 12.
6. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. К., «Наукова думка», 1971, с. 276.
7. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. К., «Наукова думка», 1973, с. 270.
8. *Гузь А. Н.* Достаточные условия применимости метода Эйлера для случая «следящей» нагрузки, заданной на части поверхности тела. Докл. АН УССР, сер. А, 1977, 10.