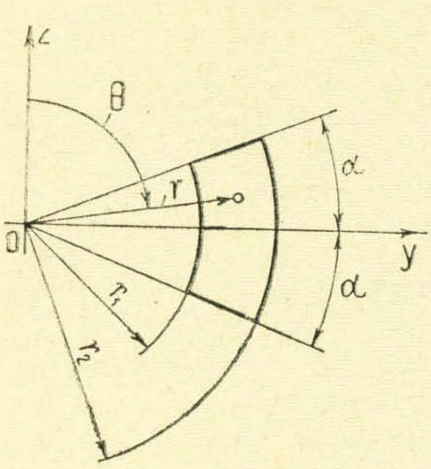
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

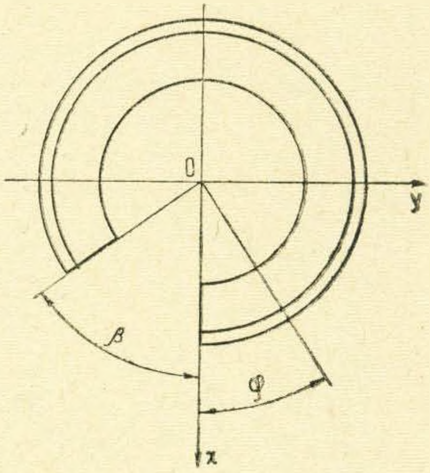
П. В. ГАЛЧЯН, М. А. ЗАДОЯН

# ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

Рассматривается задача о пластическом кручении кривого стержня. Материал стержня подчиняется условию изотропного упрочнения. В сферической системе координат $(r, \theta, \varphi)$ боковые поверхности стержня являются координатными поверхностями $r = r_1$, $r = r_2$ $(r_1 < r_2)$ и $\theta = \pi/2 \pm \alpha$, а торцевые поверхности — координатными поверхностями $\varphi = 0$ и $\varphi = \beta$ (фиг. 1, 2). Здесь $r$ — расстояние от центра сферы, $\theta$ — полярное расстояние, а $\varphi$ — угол долготы. Меридиональные поперечные сечения $\Omega$ такого стержня представляют собой кольцевые секторы (фиг. 1). Стержень скручивается противоположными силами $P_z$ (фиг. 3), действующими по оси $z$, соответственно в плоскостях $\varphi = 0$, $\varphi = \beta$.




Фиг. 1.




Фиг. 2.

Впервые задача о кручении кривого стержня в постановке теории упругости рассматривалась в работе [1], а затем — в [2—6]. Аналогичная задача в идеальной жестко-пластической постановке для неупрочняющегося материала рассматривалась в работе [10]. В работах [11, 12] в тороидальных и цилиндрических координатах рассматривалась задача о пластическом кручении сектора кольца из упрочняющегося материала. При помощи некоторого полуобратного метода в указанных работах получено поле напряжений и деформаций, когда контур поперечных сечений совпадает с координатными линиями. В работе [12] обобщается теорема о циркуляции сдвига и исследуется случай тонкостенных стержней.

1. Принимается, что интенсивность деформаций сдвига $\Gamma$ и интенсивность касательных напряжений $T$ связаны соотношением $\Gamma = 2(1 + \lambda T^{\nu})T$, а зависимости между компонентами тензоров деформации и напряжений имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = f(T)(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad f(T) = 1 + \lambda T^{\nu} \tag{1.1}$$

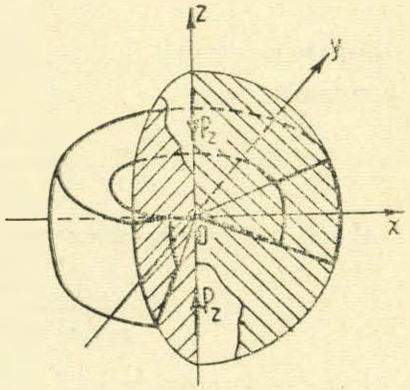
Здесь $\sigma_{ij}$ представляют отношения компонентов напряжения к $2G$ ($G$ — модуль сдвига), $\sigma$ — среднее давление в точке, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, а $\lambda$ и $\nu$ — некоторые положительные физические параметры, причем для простоты принимаем $\nu$ целым. Нулевое значение параметра $\lambda$ соответствует линейной упругости. Упругая часть составляющих полной деформации в (1.1) будет $\varepsilon^{e}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$.

Дифференциальные соотношения между компонентами деформации и компонентами смещения в сферических координатах имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta$$

$$2\gamma_{r\theta} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$




Фиг. 3.

$$2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \tag{1.2}$$

$$2\gamma_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)$$

Компоненты перемещения представим в виде

$$u_r = u_{r0}(r, \theta) + r\sin\theta\int\left[2\gamma_{\varphi r} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right]d\varphi$$

$$u_\theta = u_{\theta 0}(r, \theta) + \sin\theta\int\left[2r\gamma_{\theta\varphi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right)\right]d\varphi \tag{1.3}$$

$$u_\varphi = u_{\varphi 0}(r, \theta) + \int(\varepsilon_\varphi r\sin\theta - u_\theta\cos\theta - u_r\sin\theta)\,d\varphi$$

где $u_{r0}$, $u_{\theta 0}$, $u_{\varphi 0}$ — произвольные функции $r$ и $\theta$. Предполагая, что тензор напряжения, следовательно, и тензор деформации не зависят от $\varphi$, из (1.2) и (1.3) получаем выражения для компонентов деформации

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_{r0}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{u_{r0}}{r}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{r0}}{\partial \theta} - \frac{u_{\theta 0}}{r}$$

$$2\gamma_{\varphi r} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_{\varphi 0}}{r}\right) + \frac{B}{r}\operatorname{ctg}\theta, \quad 2\gamma_{\theta\varphi} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u_{\varphi 0}}{r\sin\theta}\right) - \frac{B}{r} \tag{1.4}$$

где $B = \text{const}$ — крутка. Полагая далее отличными от тождественного нуля только компоненты напряжения $\tau_{\theta\varphi}$, $\tau_{r\varphi}$ и компоненты деформации $\gamma_{\theta\varphi}$, $\gamma_{r\varphi}$, для перемещения можно получить

$$u_r = B\varphi\cos\theta, \quad u_\theta = -B\varphi\sin\theta, \quad u_\varphi = u_{\varphi 0}(r, \theta) + Er\sin\theta$$

$$E = \frac{1}{r^*}u_{\varphi 0}(r^*, \pi/2) - \frac{\partial u_{\varphi 0}(r^*, \pi/2)}{\partial r}, \quad r^* \in [r_1, r_2]$$

Из выражений для $\gamma_{\varphi r}$ и $\gamma_{\theta\varphi}$ (1.4) получаем уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial \gamma_{\theta\varphi}}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\gamma_{\varphi r}}{r\sin\theta}\right) = \frac{B}{r^2\sin^2\theta} \tag{1.5}$$

Вводя функцию напряжений

$$\tau_{\varphi r} = -\frac{B}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \qquad \tau_{\varphi\theta} = \frac{B}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{1.6}$$

из (1.1) и (1.5) получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f(T)}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right] + \sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{f(T)}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right] = \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \tag{1.7}$$

когда $(r, \theta) \in \Omega - \Gamma\Omega$

$$T = \frac{B}{r^2\sin^2\theta}\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)^2}$$

Рассматривая условия на боковой поверхности стержня, приходим к условию $\Phi = \text{const}$ на контуре $\Gamma$ границы области меридионального поперечного сечения $\Gamma\Omega$. В случае многосвязной области на каждом контуре $\Gamma_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ функция $\Phi$ принимает различные постоянные значения. Таким образом, задача сводится к определению функции $\Phi$ из уравнения (1.7) при условии $\Phi = \text{const}$ на контуре $\Gamma$.

Выбирая начало координат за центр приведения на торцевой плоскости $\varphi = 0$, вычисляем главный момент $M$ и проекции главного вектора $P_z$, $P_x$ на оси $x$, $z$ поверхностных сил

$$M = -B\iint_\Omega \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\,d\Omega$$

Переходя к криволинейному интегралу, получаем

$$M = -B\oint_{\Gamma}\frac{\Phi}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

В случае многосвязной области будем иметь

$$M = -B\Phi_0\oint_{\Gamma_0}\frac{d\theta}{\sin^2\theta} + B\sum_{k=1}^{m}\Phi_k\oint_{\Gamma_k}\frac{d\theta}{\sin^2\theta} = 0$$

так как все интегралы в этом выражении равны нулю. Здесь $\Phi_0$, $\Phi_k$ — значения $\Phi$ соответственно на внешнем и внутренних контурах $\Gamma_0$, $\Gamma_k$. Принимая $\Phi_0 = 0$ на внешнем контуре, находим

$$P_z = -B\sum_{k=1}^{m}\Phi_k\oint_{\Gamma_k}\frac{d\theta}{r\sin\theta} - \frac{\cos\theta dr}{r^2\sin^2\theta} + 2B\iint_{\Omega}\frac{\Phi}{r^3\sin^3\theta}\,d\Omega \qquad (1.8)$$

В случае односвязной области будем иметь

$$P_z = 2B\iint_{\Omega}\frac{\Phi}{r^3\sin^3\theta}\,d\Omega \qquad (1.9)$$

Аналогично находим

$$P_z = B\Phi_0\oint_{\Gamma_0}\frac{\cos\theta d\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{dr}{r^2\sin\theta} - B\sum_{k=1}^{m}\Phi_k\oint_{\Gamma_k}\frac{\cos\theta d\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{dr}{r^2\sin\theta} = 0$$

так как

$$\oint_{\Gamma_k}\frac{\cos\theta d\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{dr}{r^2\sin\theta} = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m)$$

Таким образом, $P_z$ будет равнодействующей данной системы поверхностных сил.

В области меридионального сечения возьмем произвольный замкнутый контур $\Gamma_*$. Область, ограниченную этим контуром, обозначим $\Omega_*$. Интегрируя обе части уравнения (1.7) в области $\Omega_*$ и переходя к криволинейному интегралу, получим

$$\oint_{\Gamma_*}\frac{f(T)}{r^3\sin^3\theta}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,rd\theta - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,dr\right] = -\oint_{\Gamma_*}\frac{d\theta}{r\sin^3\theta}$$

Имея в виду, что $rd\theta = -ds\cos(t,\ r)$ и $dr = ds\cos(t,\ \theta)$, где $t$ — направление внешней нормали к контуру $\Gamma_*$, а $s$ — дуга этого контура, окончательно получим

$$\oint_{\Gamma_*} \frac{1}{r^3 \sin^3\theta} f\left(\frac{B}{r^2 \sin^2\theta} |\operatorname{grad}\Phi|\right) \frac{\partial\Phi}{\partial t} ds = \oint_{\Gamma_*} \frac{d\theta}{r \sin^3\theta} \tag{1.10}$$

Полученное уравнение является обобщением известной теоремы о циркуляции касательного напряжения при кручении, которой можно пользоваться при рассмотрении многосвязных областей.

2. Рассмотрим случай, когда меридиональное сечение стержня есть кольцевой сектор. Решение уравнения (1.7) при условии $\Phi = 0$ на $\Gamma\Omega$ ищем в виде

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \Phi_k \tag{2.1}$$

Преобразуя (1.7), подставляя в него разложение (2.1) и вводя новую переменную $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega$ $(-\alpha \leqslant \omega \leqslant \alpha)$, приходим к системе рекуррентных первых граничных задач

$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi_n}{\partial r} + \frac{3}{r^2}\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\Phi_n}{\partial\omega} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial\omega^2} = -Q_n, \quad \text{когда } (r, \omega) \in \Omega - \Gamma\Omega$$
$$\Phi_n = 0, \quad \text{когда } (r, \omega) \in \Gamma\Omega \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

где $Q_0 = -1$, а при $n \geqslant 1$

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{grad} F_k \operatorname{grad}\Phi_{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} Q_{n-k-1} F_k$$

При $\nu = 2$

$$F_n = \frac{B^2}{r^4 \cos^4\omega} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad}\Phi_k \operatorname{grad}\Phi_{n-k}$$

Здесь $\Phi_0$ характеризует линейно-упругое состояние.

Можно показать, что задача (2.2) имеет единственное решение и тождественно удовлетворяется условие разрешимости, а соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение.

3. Решение задачи (2.2) ищем в виде ряда

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{nk}(\omega) R_k(r) \tag{3.1}$$

где

$$R_k(r) = \frac{\sqrt{2}}{\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2}} r^{3/2} \sin\left(s_k \ln\frac{r}{r_1}\right), \quad s_k = \frac{k\pi}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

собственные функции задачи (2.2).

Разложим $r^2 Q_n(r, \omega)$ в ряд по $R_k(r)$

$$r^2 Q_n(r, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk}(\omega) R_k(r) \tag{3.2}$$

Имея в виду, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^4} R_k R_l \, dr = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l \\ 1 & \text{при } k = l \end{cases}$$

получим для коэффициентов

$$Q_{nk}(\omega) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\xi^2} Q_n(\xi, \omega) R_k(\xi) \, d\xi$$

Подставив разложения (3.1) и (3.2) в первое уравнение (2.2), для коэффициентов $\Omega_{nk}$ получаем уравнения

$$\Omega''_{nk} + 3 \operatorname{tg} \omega \Omega'_{nk} - \mu_k \Omega_{nk} = - Q_{nk}, \qquad \mu_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ln^2 \frac{r_2}{r_1}} + \frac{9}{4} \tag{3.3}$$

удовлетворяющие граничным условиям $\Omega_{nk}(\pm \alpha) = 0$.

Подстановка $\Omega_{nk}(\omega) = (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} u_{nk}(x)$, $x = \sin \omega$ переводит соответствующее (3.3) однородное уравнение в уравнение

$$(x^2 - 1) u''_{nk} + 6x u'_{nk} + (4 + \mu_k) u_{nk} = 0, \quad |x| < 1$$

общий интеграл которого будет

$$u_{nk} = C_1 P_{\nu_k}(x) + C_2 Q_{\nu_k}(x), \qquad \nu_k = -\frac{1}{2} + \frac{k\pi i}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

где $P_{\nu_k}(x)$ и $Q_{\nu_k}(x)$ — сферические функции Лежандра первого и второго родов с индексом $\nu_k$.

Общий интеграл однородного уравнения (3.3) будет

$$\Omega_{nk} = C_{1k} \cos^2 \omega P^2_{\nu_k}(\sin \omega) + C_{2k} \cos^2 \omega Q^2_{\nu_k}(\sin \omega)$$

где $P^2_{\nu_k}(x)$ и $Q^2_{\nu_k}(x)$ — присоединенные сферические функции.

Разыскивая частное решение $\Omega^*_{nk}$ по методу вариации произвольных постоянных $C_{1k}$ и $C_{2k}$, получим общий интеграл уравнения (3.3)

$$\Omega_{nk}(\omega) = \bar{\Omega}_{nk}(\omega) + \Omega^{*}_{nk}(\omega) = C_{1k}\cos^2\omega P^2_{\nu_k}(\sin\omega) + C_{2k}\cos^2\omega Q^2_{\nu_k}(\sin\omega) -$$

$$-\cos^2\omega Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)\int_{-\alpha}^{\infty}\frac{Q_{nk}(\psi)\,P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,d\psi}{\cos^2\psi\,[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]} +$$

$$+\cos^2\omega P^2_{\nu_k}(\sin\omega)\int_{-\alpha}^{\infty}\frac{Q_{nk}(\psi)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,d\psi}{\cos^2\psi\,[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]}$$

Определив $C_{1k}$ и $C_{2k}$ из граничных условий (3.3), окончательно получим

$$\Omega^{*}_{nk}(\omega) = -\int_{-\alpha}^{\alpha} Q_{nk}(\psi)\frac{M_{\nu_k}}{N_{\nu_k}}d\psi -$$

$$-\int_{-\alpha}^{\infty} Q_{nk}(\psi)\,\frac{\cos^2\omega\,[Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k}(\sin\omega)Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)]}{\cos^2\psi\,[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]}d\psi \qquad (3.4)$$

$$M_{\nu_k} = \cos^2\omega\,[P^2_{\nu_k}(\sin\omega)Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]\times$$

$$\times\,[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)]$$

$$N_{\nu_k} = \cos^2\psi\,[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]\times$$

$$\times\,[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]$$

Подставив (3.4) в (3.1), после некоторых преобразований получим решение задачи (2.2) в виде

$$\Phi_n(r,\,\omega) = \int\int_{\Omega} Q_n(\xi,\,\psi)\,G(\xi,\,\psi;\,r,\,\omega)\,d\Omega$$

где $G(\xi, \psi; r, \omega)$ — функция Грина задачи (2.2)

$$G(\xi,\,\psi;\,r,\,\omega) =$$

$$= \frac{\cos^2\omega}{\xi^3\cos^2\psi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]}{[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]}\times$$

$$\times\,\frac{[P^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)]}{[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]}\,R_k(\xi)\,R_k(r) \qquad \text{при} \quad \psi \leqslant \omega$$

$$G(\xi, \psi; r, \omega) =$$

$$= \frac{\cos^2 \omega}{\xi^3 \cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[Q^2_{\nu_k}(\sin\omega) P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\omega) Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]}{[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha) P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha) Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]} \times$$

$$\times \frac{[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha) P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha) Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)]}{[P^2_{\nu_k}(\sin\psi) Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi) P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]} R_k(\xi) R_k(r) \quad \text{при } \psi \geqslant \omega$$

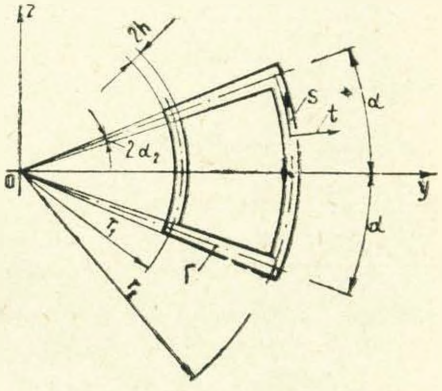
Переходя к доказательству сходимости ряда (2.1), отметим, что уравнение (2.2) в области $\Omega$ является равномерно эллиптическим с коэффициентами, принадлежащими пространству $C_{\alpha_1}$, $\alpha_1 \in (0, 1)$. Следовательно, справедливы априорные оценки Шаудера [13]. Область $\Omega$ и граничные значения $\Phi_n$ гладкие. При этих условиях $\Phi_0 \in C_{2+\alpha_1}$, так как $Q_0 \in C_{\alpha_1}$, и вообще из выражения $Q_n$ (2.2) следует, что $Q_n \in C_{\alpha_1}$, следовательно, $\Phi_n \in C_{2+\alpha_1}$.

Вводя норму в $C_{\alpha_1}$

$$\| X \| = \max_{M \in \Omega} | X(M) | + \max_{M, N \in \Omega} \frac{| X(M) - X(N) |}{\overline{MN}^{\alpha_1}}$$

и применяя априорные оценки Шаудера $\| D^2 \Phi_n \| \leqslant c^* \| Q_n \|$, где $c^*$ — постоянная, зависящая от геометрии области, аналогично [12] показывается, что ряд (2.1) и ряды, составленные из производных $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k D\Phi_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k D^2 \Phi_k$, сходятся абсолютно и равномерно с некоторым радиусом сходимости.

4. Рассмотрим тонкостенный стержень с замкнутым профилем (фиг. 4) в виде двухсвязной области, толщиной стенки $2h$ ($2\alpha_2 r_2 = 2h$). Переходя




Фиг. 4.

к координатной системе $(l, s)$, где $l$ направлено по внешней нормали, а $s$ — по касательной к срединной линии $\Gamma$ меридионального сечения, из (1.6) получим

$$\tau_t = \frac{B}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \qquad \tau_s = -\frac{B}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Преобразуя уравнение (1.7) к координатной системе $(t, s)$ и пренебрегая ввиду малости толщины стенки компонентом напряжения $\tau_t$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f(T)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] = 1, \qquad T = \frac{B}{S(s)}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{4.1}$$

где

$$S(s) = \begin{cases} (r_1+s)^2\cos^2\alpha & \text{при } r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\ \theta = \pi/2+\alpha \\ r_2^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha-\dfrac{s}{r_2}\right) & \text{при } r = r_2,\ \pi/2-\alpha \leqslant \theta \leqslant \pi/2+\alpha \\ (r_2-s)^2\cos^2\alpha & \text{при } r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\ \theta = \pi/2-\alpha \\ r_1^2\sin\left(\dfrac{s}{r_1}+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) & \text{при } r = r_1,\ \pi/2-\alpha \leqslant \theta \leqslant \pi/2+\alpha \end{cases}$$

Интегрируя уравнение (4.1) при $\nu = 1$, получаем

$$\Phi = -\frac{S(s)}{2\lambda B}t + \frac{2\lambda B}{3S(s)}\sqrt{\left(x+\frac{S(s)}{\lambda B}t\right)^3} + k_2(s) \tag{4.2}$$

где $K_1(s)$ и $K_2(s)$ — произвольные функции, определяющиеся из граничного условия,

$$x = \left[\frac{S(s)}{2\lambda B}\right]^2 + \frac{K_1(s)\,S(s)}{\lambda B}$$

Полагая на внешнем контуре $\Phi = 0$, а на внутреннем $\Phi = \Phi_1$, найдем

$$K_2(s) = \frac{hS(s)}{2\lambda B} - \frac{2\lambda B}{3S(s)}\sqrt{\left(x+\frac{hS(s)}{\lambda B}\right)^3}$$

где $x$ определяется из уравнения

$$x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1 = 0 \tag{4.3}$$

где

$$b_1 = -\frac{3\chi}{4h^2\upsilon}\left(\frac{\lambda B}{S(s)}\right)^2, \qquad c_1 = \frac{2h^2}{\upsilon}, \qquad d_1 = -\frac{9\chi}{4\upsilon}$$

$$e_1 = \frac{27\chi}{64h^2\upsilon} + \frac{h^4}{3\upsilon}\left(\frac{S(s)}{\lambda B}\right)^2$$

$$\chi = \Phi_1^2 - \frac{2hS(s)}{\lambda B}\Phi_1 + \left(\frac{hS(s)}{\lambda B}\right)^2, \qquad \upsilon = 2+\left(\frac{\lambda B}{S(s)}\right)^2$$

Корни уравнения (4.3), как известно, совпадают с корнями двух уравнений

$$x^2 + \frac{1}{2}(b_1 + A)\,x + \left(y + \frac{b_1 y - d_1}{A}\right) = 0$$

где $A = \pm\sqrt{8y + b_1^2 - 4c_1}$, а $y$ — какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 + by^2 + cy + d = 0$$

где

$$b = -4c_1,\quad c = 2b_1d_1 - 8e_1,\quad d = e_1(4c_1 - b_1^2) - d_1^2$$

Пренебрегая двойным интегралом, из (1.8) получим

$$\Phi_1 = \frac{r_1 r_2 P_z}{BH(r_1 - r_2)},\qquad H = \frac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \tag{4.4}$$

Подставив $\Phi_1$ из (4.4) в выражение для $x$, а $\Phi$ — из (4.2) в (1.10), получим уравнение для определения $B$

$$\oint_\Gamma \frac{x\,ds}{[S(s)]^{5/2}} = \frac{1}{2\lambda^2 B^2}\left[\frac{1}{\cos\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1} + \ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}\right] + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

В случае линейной упругости из (4.1) будем иметь

$$\Phi = \frac{1}{2}t^2 + K_3(s)\,t + K_4(s) \tag{4.5}$$

Полагая на внешнем контуре $\Phi = 0$, а на внутреннем $\Phi = \Phi_1$, найдем произвольные функции $K_3(s)$ и $K_4(s)$

$$K_3 = -\frac{\Phi_1}{2h} = \text{const},\qquad K_4 = \frac{1}{2}(\Phi_1 - h^2) = \text{const}$$

Из (1.10) и (4.4) определим $B$, а затем напряжение $\tau_s$

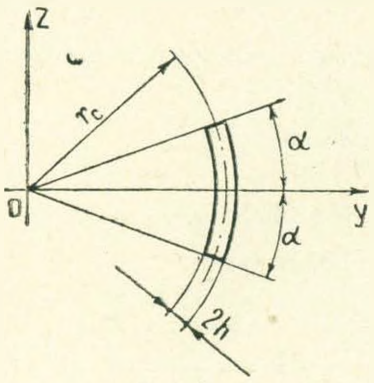
$$B = \frac{(r_1^2 + r_2^2)\,P_z}{2hH(r_1 - r_2)^2},\qquad \tau_s = \frac{B}{S(s)}\left[\frac{(r_1 - r_2)\,r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} - t\right]$$

Для простоты вычисления в общем случае закона упрочнения (1.1), ввиду малости толщины стенки $2h$, функцию напряжения приближенно можно взять также в виде (4.5). Тогда имеем

$$B = \frac{(r_1^2 + r_2^2)\,P_z}{2hH(r_1 - r_2)^2} - \frac{2\lambda r_1 r_2}{H(r_1 - r_2)}\left(\frac{r_1 r_2 P_z}{2hH(r_2 - r_1)}\right)^{\nu+1}\oint_\Gamma \frac{ds}{[S(s)]^{\nu+3/2}}$$

$$\tau_s = \frac{B}{S(s)}\left[\frac{r_1 r_2 P_z}{2BhH(r_1 - r_2)} - t\right]$$

5. Положим $r = r_c + \zeta$, где $|\zeta| \leqslant h$, $r_c = (r_1 + r_2)/2$. Если $2h/r_c \ll 1$ и $h/xr_c \ll 1$, тогда будем иметь тонкостенный стержень открытого профиля, вытянутый по направлению полярного расстояния (фиг. 5).



Фиг. 5.

Полагая $\gamma_{\varphi r} \approx 0$, $\tau_{\varphi r} \approx 0$, из (1.5) получаем

$$\frac{\partial \gamma_{\theta\varphi}}{\partial r} = \frac{B}{r^2 \sin^2 \theta} \tag{5.1}$$

Согласно (1.1) и (1.6), подставим $\gamma_{\theta\varphi}$ в (5.1) и проинтегрируем, принимая $\tau_{\theta\varphi} = 0$ при $r = r_c$. Тогда получим

$$f(T)\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{r^2}{r_c} - r$$

или в новых переменных $\zeta$

$$f(T)\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = -\zeta \tag{5.2}$$

Интегрируя (5.1) в пределах от $r_c$ до $r_c + \zeta$, получим

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{B\zeta}{r_c^2 \sin^2 \theta} \tag{5.3}$$

Интегрируя (5.2), с учетом (5.3), получим

$$\Phi = -\int_{-h}^{\zeta} \zeta f^*\left(\frac{|B\zeta|}{r_c^2 \sin^2 \theta}\right) d\zeta \tag{5.4}$$

где $f^*(\Gamma) = 1/f(T)$. Параметр $B$ определится из (1.9)

$$P_z = -\frac{2B}{r_c^2}\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\gamma} \frac{d\theta}{\sin^3 \theta}\int_{-h}^{h} d\zeta \int_{-h}^{\zeta} \eta f^*\left(\frac{|B\eta|}{r_c^2 \sin^2 \theta}\right) d\eta =$$

$$= \frac{4B}{r_c^2}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{d\theta}{\sin^3 \theta}\int_{0}^{h} \eta_1^2 f^*\left(\frac{|B|\eta_1}{r_c^2 \sin^2 \theta}\right) d\eta_1 \tag{5.5}$$

При $\nu = 1$ будем иметь

$$T^2 + \frac{1}{\lambda} T - \frac{\Gamma}{2\lambda} = 0$$

откуда

$$T = -\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2|B\zeta|}{\lambda r_c^2 \sin^2\theta}}$$

Подставив это выражение для $T$ в (5.5), окончательно получим

$$P_z = \frac{8Br_c^4(2+\cos^2\alpha)\sin\alpha}{45\lambda^3|B^3|} - \frac{8r_c^2h^2\sin\alpha}{\lambda^2 B} +$$

$$+ \frac{4r_c^2h}{5\lambda^2 B}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sin\theta \sqrt{\left(1+\frac{2\lambda h|B|}{r_c^2\sin^2\theta}\right)^3}\, d\theta -$$

$$- \frac{4Br_c^4}{15\lambda^3|B^3|}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sin^3\theta \sqrt{\left(1+\frac{2\lambda h|B|}{r_c^2\sin^2\theta}\right)^3}\, d\theta$$

Подставив (5.4) в (1.6), будем иметь

$$\tau_{\varphi\theta} = -\frac{2B\zeta}{(r_c+\zeta)^2\left(1+\sqrt{1+\frac{2\lambda|B\zeta|}{r_c^2\sin^2\theta}}\right)\sin^2\theta} \approx$$

$$\approx -\frac{2B\zeta}{r_c^2\left(1+\sqrt{1+\frac{2\lambda|B\zeta|}{r_c^2\sin^2\theta}}\right)\sin^2\theta}$$

*В случае линейной упругости $f^* \equiv 1$. Тогда из (5.5), (5.4) и (1.6) получаем*

$$B = \frac{3r_c^2P_z}{2Hh^3}, \qquad \Phi = -\frac{1}{2}(\zeta^2 - h^2)$$

$$\tau_{\varphi\theta} = -\frac{3r_c^2P_z}{2Hh^3}\frac{\zeta}{(r_c+\zeta)^2\sin^2\theta} \approx -\frac{3P_z}{2Hh^3}\frac{\zeta}{\sin^2\theta}$$

Аналогично можно получить решение и для тонкостенного стержня с профилем, вытянутым по направлению $r$.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 23 I 1978

Պ. Վ. ԳԱԼՊՉՅԱՆ, Մ. Ա. ԶԱՏՈՅԱՆ

## ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՁԵՎ ՈՒՆԵՑՈՂ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԶՈՂԻ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԱԼՈՐՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Ուսումնասիրվում է շրջանային օղակի սեկտորի ձև ունեցող կոր ձողի ոլորումը, երբ միջօրեականային կտրվածքներն ունեն օղակային սեկտորի ձև։ Ձողը ոլորվում է ծայրային կտրվածքներում ազդող և օղակի առանցքով ուղղված հակադիր ուժերով։ Ձողի նյութը ենթարկվում է իզոտրոպ ամրապնդման։*

*Խնդիրը բերվում է լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ առաջին եզրային խնդրին։ Այդ խնդրի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի տեսքով, ըստ մի որոշ ֆիզիկական պարամետրի և հանգեցվում է անկուրրենտ առաջին եզրային խնդիրների անվերջ համակարգի։ Կառուցվում են այդ խնդիրների լուծումները և ցույց է տրվում շարքի զուգամիտությունը։*

*Բերված են նաև փակ և բաց սրամատավորության բարակապատ ձողերի համար մոտավոր լուծումները։*

## THE PLASTIC TORSION OF A CIRCULAR BAR WITH A CIRCULAR SECTOR CROSS-SECTION

P. V. GALPCHIAN, M. A. ZADOYAN

S u m m a r y

The torsion of a curved bar in the form of a circular ring sector, whose meridional sections are of a circular sector shape, is considered. The bar is twisted by the opposite forces acting to the end sections along the axis of the ring. The material of the bar obeys the condition of isotropic strengthening.

The problem is reduced to a first boundary one relative to the function of strain. The solution of the latter is sought in the form of a power series by certain physical parameter and is reduced to an infinite system of recurrent first boundary problems. The solutions of these problems are given and the series convergence is shown.

The approximate solutions for thin bars with closed and open profiles are also presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Göhner O.* Spannugsverteilung in einem an den Endquerschnitten belasteten Ringstabsektor. Ingr-Arch., 1931, Bd2, p. 381—414.
2. *Freiberger W.* The uniform torsion of an incomplate tore. Austral. J. Scient. Res. Ser. A, 1949, vol. 2, No. 3, p. 354—375.

3. *Larghaar H. L.* Torsion of curved beams of rectangular cross section. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 1.
4. *Рабинович А. Л.* Кручение элемента кругового кольца. Исследования по механике и прикладной математике. Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1958, вып. 1.
5. *Stein I.* Stress analysis of a helical coil. Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 1, p. 122—126. (Руск. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1963, т. 30, № 1).
6. *Reissner E.* Not on the problem of twisting of a circular ring sector. Quart. Appl. Math., 1949, vol. 7, No. 3, p. 342—347.
7. *Freiberger W.* The uniform torsion of a perfectly plastic circular ring. Commonwealth of Australia. Aeronautical Research Laboratories, Report ARLSM 2B, 1953.
8. *Freiberger W., Prager W.* Plastic twisting of thich-walled circular ring sectors. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 3, p. 461—463.
9. *Wang A. J., Prager W.* Plastic twisting of a circular ring sector. J. Mech. and Phys. Solids, 1955, vol. 3, p. 169—175.
10. *Freiberger W.* Elastic-plastic torsion of circular ring sectors. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, No. 3, p. 259—269.
11. *Задоян М. А.* Пластическое кручение неполного тора. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
12. *Задоян М. А.* Пластическое кручение сектора кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
13. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1965.