

П. А. МКРТЧЯН

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ
СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе [1] на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел [2, 3] получены двумерные уравнения магнитоупругости сферической оболочки, находящейся в произвольном неоднородном магнитном поле. В данной работе с помощью указанных уравнений рассматривается задача о параметрических колебаниях электропроводящей сферической оболочки в радиальном магнитном поле. Получено уравнение для определения критических частот главного параметрического резонанса. Исследуется влияние напряженности заданного магнитного поля на критические частоты и области динамической неустойчивости.

Аналогичные задачи динамической устойчивости электропроводящих пластин в магнитном поле рассмотрены в работах [4, 5].

1. Рассмотрим задачу динамической устойчивости замкнутой сферической оболочки постоянной толщины $2h$ и радиуса R под действием равномерно распределенной по поверхности радиальной нагрузки $p(t) = p_0 + p_1 \cos \omega_0 t$. Ортогональная система координат выбрана так, что срединная поверхность сферической оболочки отнесена к географическим координатам α, β (α представляет угол долготы, β — угол широты), а γ направлена по нормали к срединной поверхности. Тогда для коэффициентов первой квадратичной формы и для кривизны срединной поверхности будем иметь $A = R, B = R \sin \alpha, k_1 = k_2 = R^{-1}$. В последующем, ради сохранения симметричной структуры получаемых выражений, приведенные выше значения A и B в расшифрованном виде не будем подставлять, однако все время будем понимать, что A — величина постоянная, а B не зависит от β [6, 7].

Пусть оболочка, изготовленная из материала с конечной постоянной электропроводностью σ , помещена в стационарном неоднородном магнитном поле $\vec{H}_0(\gamma)$, вектор напряженности которого перпендикулярен к недеформированной срединной поверхности [10]. Начальное невозмущенное состояние характеризуется вектором упругих перемещений \vec{U}_0 , электрического поля \vec{E}_0 и магнитного поля \vec{H}_0 . Их определяем из уравнений магнитоупругости и электродинамики невозмущенного состояния. Предполагая, что напряженное состояние оболочки до потери устойчивости является безмоментным и пренебрегая силами инерции [8], из указанных уравнений найдем следующие выражения для характеристик невозмущенного состояния:

$$\vec{E}_0 = 0, \quad \vec{H}_0 = \frac{H_0}{(1 + \gamma/R)^2} \vec{n}_\gamma$$

$$\vec{U}_0 = -\frac{(1 - \nu) R^2}{4Eh} p(t) \vec{n}_\gamma, \quad N_1^0 = N_2^0 = -\frac{1}{2} R p(t) \quad (1.1)$$

где H_0 — величина вектора напряженности магнитного поля на срединной поверхности ($\gamma = 0$), \vec{n}_γ — единичный вектор в направлении координатной линии γ , N_1^0 и N_2^0 — внутренние силы начального невозмущенного состояния.

Как видно из (1.1), до возникновения возмущений внешнее магнитное поле \vec{H}_0 не вызывает дополнительного электромагнитного поля, так как тангенциальные перемещения невозмущенного состояния оболочки равны нулю.

В основу последующих рассуждений ставятся следующие предположения:

а) гипотеза магнитоупругости тонких тел, определяющая закон изменения упругих перемещений и компонент индуцированного электромагнитного поля по толщине оболочки [3];

б) для внешней области (для среды, окружающей оболочку) считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума;

в) влияние токов смещения на характеристики динамической устойчивости пренебрегается.

На основе принятых предположений основная линеаризованная система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений устойчивости сферической оболочки имеет вид [1, 8]

$$\Delta \Psi - \frac{4\pi \varepsilon R^2}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{R}{h} \Delta F + \frac{4\pi \varepsilon H_0 R^2}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\vartheta - \frac{2w}{R} \right) = 0$$

$$(\Delta + 1 - \nu) \vartheta - \frac{1}{R} \left(\frac{h^2}{3R^2} \Delta + 1 - \nu \right) (\Delta + 2) w +$$

$$+ \frac{\varepsilon H_0 R^2}{\rho c c_0^2} \left[\Psi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2w}{R} - \vartheta + \frac{h^2}{3R^3} \Delta w \right) \right] = 0 \quad (1.2)$$

$$\left(\frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 + \nu}{R} \right) \vartheta - \frac{h^2}{3R^4} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon H_0^2 h^2}{3\rho c^2 c_0^2 R^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w - \frac{p(t)}{4\rho h R c_0^2} (\Delta + 2) w = 0$$

Здесь приняты обозначения:

$$\vartheta = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (Bu) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Av) \right] + \frac{2w}{R}$$

$$\Delta = \frac{R^2}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]$$

$$\Psi = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (B\psi) - \frac{\partial}{\partial \beta} (A\varphi) \right] \quad (1.3)$$

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{r}{2} \right) \right] \Psi(\xi, \eta, t) \sin \xi d\xi d\eta$$

$$r^2 = 2(1 - \cos \theta_0), \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}$$

$$\cos \theta_0 = \cos \xi \cos \tau + \sin \xi \sin \alpha \cos (\eta - \beta)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, c — скорость света, c_0 — скорость звука в материале оболочки, $\varphi(\alpha, \beta, t)$, $\psi(\alpha, \beta, t)$ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного в оболочке электрического поля, $u(\alpha, \beta, t)$, $v(\alpha, \beta, t)$, $w(\alpha, \beta, t)$ — искомые перемещения срединной поверхности оболочки.

Решения приведенных уравнений должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

2. Решения уравнений (1.2) представим в виде разложения

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) Y_n(\alpha, \beta), \quad \theta = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t) Y_n(\alpha, \beta)$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t) Y_n(\alpha, \beta) \quad (2.1)$$

$$Y_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\beta + B_{nk} \sin k\beta) P_n^k(\cos \alpha)$$

где A_{nk} и B_{nk} — коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$A_{nk} = \frac{1}{\|Y_n^k\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n(\alpha, \beta) P_n^k(\cos \alpha) \cos k\beta \sin \alpha d\alpha d\beta$$

$$B_{nk} = \frac{1}{\|Y_n^k\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n(\alpha, \beta) P_n^k(\cos \alpha) \sin k\beta \sin \alpha d\alpha d\beta$$

$$\|Y_n^k\|^2 = \frac{2\pi \varepsilon_k}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \quad \varepsilon_k = \begin{cases} 2 & \text{при } k=0, \\ 1 & \text{при } k>0, \end{cases}$$

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] — полиномы Лежандра.$$

Подставляя (2.1) в уравнения (1.2), получим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned}
 & \left[\lambda_n + (2n+1) \frac{R}{2h} \right] \Psi_n + \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2} \frac{d}{dt} \left[\Psi_n - \frac{H_0}{c} \frac{d}{dt} \left(\theta_n - \frac{2w_n}{R} \right) \right] = 0 \\
 & (\lambda_n - 1 + \nu) \theta_n + \frac{1}{R} \left(\frac{\lambda_n h^2}{3R^2} - 1 + \nu \right) (\lambda_n - 2) w_n + \\
 & + \frac{\sigma H_0^2 h^2 \lambda_n}{3\rho R c^2 c_0^2} \frac{dw_n}{dt} - \frac{\sigma H_0 R^2}{\rho c c_0^2} \left[\Psi_n - \frac{H_0}{c} \frac{d}{dt} \left(\theta_n - \frac{2w_n}{R} \right) \right] = 0 \quad (2.2) \\
 & \frac{1}{R} \left(1 + \nu + \frac{\lambda_n h^2}{3R^2} \right) \theta_n + \frac{h^2}{3R^4} (\lambda_n - 1 + \nu) (\lambda_n - 2) w_n + \\
 & + \frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 w_n}{dt^2} + \frac{\sigma h^2 H_0^2 \lambda_n}{3\rho c^2 c_0^2 R^2} \frac{dw_n}{dt} - \frac{p(t)}{4\rho h R c_0^2} (\lambda_n - 2) w_n = 0
 \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_n = n(n+1)$.

Система уравнений (2.2) после некоторых преобразований приводится к одному дифференциальному уравнению относительно $w_n(t)$

$$\begin{aligned}
 & a_1 \frac{d^3 w_n}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 w_n}{dt^2} + a_0 (1 - 2\gamma_0 \cos \omega\tau) \frac{dw_n}{dt} + \\
 & + [1 - 2\mu_0 (\cos \omega\tau - \alpha_1 \omega \sin \omega\tau)] w_n = 0 \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 & a_1 = \frac{\sigma_0 R^2 \Omega}{ch d_n} \left(1 + \frac{d_n \beta_0^2}{\lambda_n - 1 + \nu} \right), \quad a_2 = 1 + \frac{\lambda_n c_0^2 \sigma_0^2 \beta_0^2 (d_n \beta_0^2 + \lambda_n - 2)}{3 d_n c^2 (\lambda_n - 1 + \nu)} \\
 & a_0 = a_1 - \frac{a_1 p_0}{p_* - p_0}, \quad p_* = \frac{4Eh}{R} \frac{1 + \delta^2 (\lambda_n - 1)^2}{\lambda_n - 1 + \nu}, \quad \mu_0 = \frac{p_t}{2(p_* - p_0)} \\
 & a_3 = \frac{\sigma_0 R^2 \Omega p_*}{ch d_n (p_* - p_0)} + \frac{\sigma_0 h c_0^2 \beta_0^2}{3c \Omega R^2 (\lambda_n - 1 + \nu)} \left[\lambda_n^2 + (\lambda_n - 2) (\lambda_n - 1 + \nu) + \right. \\
 & \left. + \frac{6R^2 (1 + \nu)}{h^2} \right], \quad \gamma_0 = \frac{\alpha_1 \mu_0}{\alpha_0}, \quad \Omega_0^2 = \frac{gE}{\gamma_1 R^2} (\lambda_n - 2) \frac{1 + \delta^2 (\lambda_n - 1)^2}{\lambda_n - 1 + \nu} \quad (2.4) \\
 & \frac{\gamma_1}{g} = \rho, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{3R^2 (1 - \nu^2)}, \quad \sigma_0 = \frac{4\pi\sigma h}{c}, \quad \beta_0 = \frac{V_A}{c_0}, \quad V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \\
 & d_n = \lambda_n + \frac{R}{2h} (2n+1), \quad \omega = \frac{\omega_0}{\Omega}, \quad \Omega^2 = \Omega_0^2 \left(1 - \frac{p_0}{p_*} \right), \quad \tau = \Omega t
 \end{aligned}$$

В (2.4) Ω_0 — частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля, γ_0 и μ_0 — коэффициенты возбуждения, p_* — значения критической силы при статической устойчивости оболочки, параметры σ_0 и β_0 характеризуют электропроводность материала оболочки и напряженность внешнего магнитного поля соответственно, V_A — скорость распространения волн Альфвена.

Уравнение (2.3) имеет периодические коэффициенты и, как известно [8, 9], при некоторых соотношениях между коэффициентами имеет неограниченно возрастающие решения. Границы области главного параметрического резонанса определим, используя метод гармонического баланса [8].

Согласно сказанному, решение уравнения (2.3) будем искать в виде

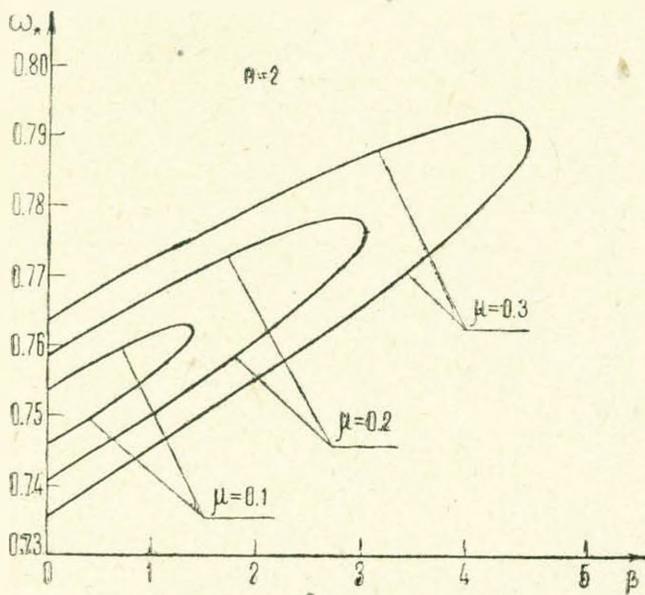
$$w_n(\tau) = A_0 \sin \frac{\omega \tau}{2} + B_0 \cos \frac{\omega \tau}{2} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.3) и приравнявая определитель нулю, для определения критических частот главного параметрического резонанса получим уравнение

$$a_1^2 z^3 + (a_2^2 - 2a_1 p_0) z^2 + (a_0^2 - \mu_0^2 a_1^2 - 2a_2) z + 1 - \mu_0^2 = 0 \quad (2.6)$$

где $z = \omega^2/4$.

На основании (2.6) проведем численный анализ для алюминиевой оболочки при $h/R = 0.01$, $p_0 = 5$ атм.



Фиг. 1.

На фиг. 1 представлены графики зависимости критических частот главного параметрического резонанса ω_* от напряженности заданного магнитного поля β ($\beta = 10^4 \beta_0^2$) при различных значениях коэффициента возбуждения μ , где

$$\omega_* = \frac{\omega_0^2}{4\omega_1^2}, \quad \omega_1^2 = \frac{gE}{\gamma_1 R^2}, \quad \mu = \frac{p_0 + p_i/2}{p_{**}}, \quad p_{**} = \frac{8Ek^2}{R^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

Здесь p_{**} — минимальное значение по n критической силы при статической устойчивости оболочки.

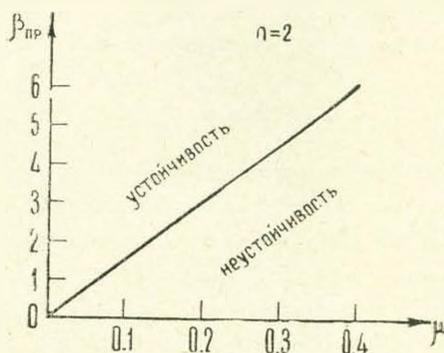
Рассматривая фиг. 1, замечаем, что при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности область главного параметрического резонанса уменьшается и стремится к нулю при определенном значении напряженности магнитного поля $\beta_{пр}$. Это значит, что существует минимальное значение ($\beta_{пр}$) напряженности заданного магнитного поля, превышение которого исключает возможность появления параметрического резонанса.

В табл. 1 приведены значения $H_{пр}$ при некоторых значениях коэффициента возбуждения μ для алюминиевой оболочки.

Таблица 1

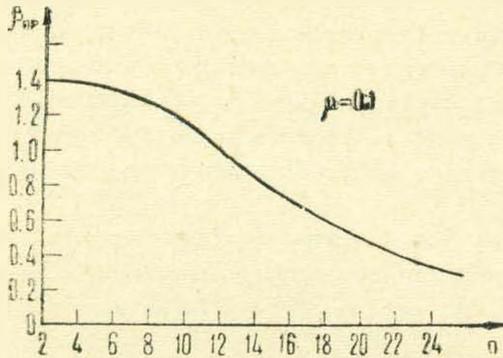
$H_{пр},$ 10^4 эрстед	1.0862	3.4348	5.0698	6.1991	7.1698
μ	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4

Расчеты показывают, что ω_* является монотонно возрастающей функцией от числа волн n , поэтому фиг. 1 построена для $n = 2$, соответствующему наименьшему значению ω_* в зависимости от n .



Фиг. 2.

Зависимость $\beta_{пр}$ от коэффициента возбуждения μ приведена на фиг. 2, которая показывает, что чем больше интенсивность магнитного поля, тем большая амплитуда параметрической силы требуется, чтобы вызвать динамическую неустойчивость оболочки. Приведенная кривая отделяет область устойчивости ($H_0 > H_{пр}$) от области неустойчивости ($H_0 < H_{пр}$) и построена при $n = 2$.



Փիգ. 3.

Из фиг. 3 видно, что зависимость $\beta_{пр}$ от числа волн n является монотонно убывающей функцией.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 6 IX 1977

Պ. Ա. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՄԱԳՆԵՒՍԱԿԱՆ ԳՕՇՏՈՒՄ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱԿՆՆԱԿԱՆ ԳՆԿՍՅՈՒՆ ԽՈՒՂԱԾՈՒ
ԳԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆՆԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հոդվածում ելնելով բարակապատ մարմինների մագնիսաառածգականության վարկածներից, դիտարկվում է գնդային թաղանթի դինամիկ կայունության խնդիրը ստացիոնար մագնիսական դաշտում, երբ մագնիսական դաշտի լարվածության վեկտորը ուղղված է թաղանթի միջին մակերևույթի նորմալով: Ստացված է բնութագրիչ հավասարում զլիտավոր պարամետրական սեղանանսի կրիտիկական հաճախականության նկատմամբ:

Ուսումնասիրվում է տված մագնիսական դաշտի լարվածության ազդեցությունը դինամիկ կայունության տիրույթների վրա: Որոշված է արտաքին մագնիսական դաշտի սահմանային արժեքը, որի դեպքում բացառվում է պարամետրական սեղանանսի հնարավորությունը:

DYNAMIC STABILITY OF AN ELECTROCONDUCTIVE SPHERICAL SHELL IN THE MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

S u m m a r y

In terms of the hypothesis of a thin body magnetoelasticity the problem of parametric vibration of an electroconductive spherical shell

in the radial magnetic field is considered. An equation is obtained to determine the critical frequencies of the main parametric resonance. The influence of the specified magnetic field strength upon the critical frequencies and the dynamic instability region is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А. Об уравнениях магнитоупругости тонких сферических оболочек. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 5.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
4. Багдасарян Г. Е. О динамической устойчивости проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 2.
5. Багдасарян Г. Е. О параметрических колебаниях проводящих пластин в продольном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 5.
6. Власов В. Э. Общая теория оболочек. М.—Л., Гостехиздат, 1949, с. 265—275.
7. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974, с. 128—132.
8. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956, с. 586—593.
9. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., Изд. «Наука», 1961, с. 183—208.
10. Зенкевич В. Б., Сычев В. В. Магнитные системы на сверхпроводниках. М., Изд. «Наука», 1972, с. 228—231.