ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

Ф. С. ТОРОСЯН

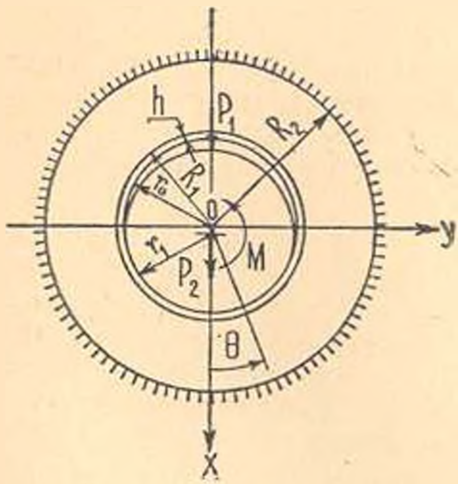
О ВНУТРЕННЕМ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КРУГОВОГО ДИСКА И КРУГОВОГО КОЛЬЦА, ПОДКРЕПЛЕННОГО НА ОБВОДЕ ОТВЕРСТИЯ ТОНКИМ КОЛЬЦЕВЫМ ПОКРЫТИЕМ

Контактные задачи о взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием близких радиусов рассматривались в работах [1—9]. В ряде практически важных случаев представляет значительный интерес также получение решений этих же задач, когда вместо бесконечной пластины с круговым отверстием рассматривается круговое кольцо. В настоящей работе исследуется контактная задача о вдавливании кругового упругого диска на внутренний контур кругового упругого кольца, когда этот контур усилен приваренным или приклеенным к нему тонким упругим кольцевым покрытием. Предполагается, что внешний контур кругового кольца жестко закреплен. В качестве физической модели усиливающего упругого покрытия принимается модель напряженного состояния тонких цилиндрических оболочек, основанной на известных гипотезах Кирхгофа-Лява [10]. Решение исследуемой задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. На основе известного аппарата ортогональных многочленов Якоби получено эффективное решение разрешающего уравнения. Рассмотрены частные случаи. Получены числовые результаты.

§ 1. *Постановка задачи и вывод разрешающего уравнения.* Пусть упругое круговое кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$, жестко закреплено вдоль своей внешней границы, а вдоль внутренней границы усилено приваренным к нему упругим кольцевым покрытием малой толщины h $(h/R_1 \leqslant 1/20)$. Пусть далее внутрь этого кольца вставлен упругий диск радиуса r_1, который прижимается к обводу кольца силами P_1, P_2 и скручивается моментом M (фиг. 1). Будем учитывать также силу тяжести диска. При этом разность $\varepsilon = r_0 - r_1$ $(r_0 = R_1 - h)$ предполагается величины порядка упругих перемещений. Кроме того, считается, что эти тела находятся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния. Задача заключается в определении законов распределения контактных напряжений под диском и размеров области контакта.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $q_j(\theta)$, $\tau_j(\theta)$ $(j = 1, 2)$ соответственно нормальные и тангенциальные контактные напряжения, действующие под диском $(j = 1)$ и на линии соединения усиливающего покрытия с основанием $(j = 2)$. Далее, через $v_r^{(j)}$, $v_\theta^{(j)}$

($j = 1, 2$) обозначим радиальные и тангенциальные компоненты упругих перемещений граничных точек диска ($j = 1$) и отверстия радиуса R_1 кольца ($j = 2$). Участком контакта пусть будет $[-\theta_1, \theta_2]$.



Фиг. 1.

Приняв те же физические предположения [10] относительно усиливающего покрытия, что и в [9], и предполагая, что во всей зоне контакта действуют только силы сцепления, придем к тем же условиям, имеющим место в области контакта, что и в [9]

$$
\begin{aligned}
& v_r^{(1)} + v_r^{(2)} = \delta \cos\theta - r_1 \psi \sin\theta - \varepsilon (1 - \cos\theta) \\
& v_\theta^{(1)} - v_\theta^{(2)} = \delta \sin\theta - 2 r_1 \psi \sin^2 \frac{\theta}{2}
\end{aligned}
\qquad (-\theta_1 < \theta < \theta_2) \qquad (1.1)
$$

где δ — жесткое смещение диска в направлении оси ox, ψ — угол поворота диска относительно первоначальной точки касания.

Далее, пользуясь известным комплексным представлением решения плоской задачи теории упругости [11], легко получить, что компоненты перемещений $v_r^{(j)}$, $v_\theta^{(j)}$ ($j = 1, 2$) выражаются формулами

$$
\begin{aligned}
v_r^{(1)} = {} & \frac{(\varkappa_1 + 1) r_1}{4\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) \ln 2 \left| \sin \frac{\theta - \xi}{2} \right| d\xi + \\
& + \frac{(\varkappa_1 - 1) r_1}{8\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \tau_1(\xi)\, \mathrm{sign}\,(\theta - \xi)\, d\xi - \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) K^{(1)}(\theta - \xi)\, d\xi + \\
& + \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \tau_1(\xi) K^{(2)}(\theta - \xi)\, d\xi + \frac{r_1}{2\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) \cos(\theta - \xi)\, d\xi + f_1(\theta)
\end{aligned}
$$

$$(-\pi < \theta < \pi)$$

$$v_\theta^{(1)} = \frac{(\varkappa_1+1) r_1}{4\pi\mu_1}\int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi)\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right| d\xi -$$

$$-\frac{(\varkappa_1-1)r_1}{8\mu_1}\int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi)\,\mathrm{sign}\,(\theta-\xi)\,d\xi - \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi)K^{(1)}(\theta-\xi)\,d\xi -$$

$$-\int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi)K^{(2)}(\theta-\xi)\,d\xi - \frac{r_1}{2\pi\mu_1}\int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi)\cos(\theta-\xi)\,d\xi + f_2(\theta)$$

$$2\mu_2(v_r^{(2)}+iv_\theta^{(2)}) = a_1R_1B_0 + a_2R_1\overline{B}_1e^{-i\theta} + a_4R_1(B_{-1}e^{-i\theta} - B_1e^{i\theta}) -$$

$$-(1-a_2)R_1\overline{B}_0 - (1-2a_2)R_1\frac{\overline{B}_{-1}}{2}e^{i\theta} + R_1\sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(2)}(B_{-k}e^{-ik\theta}+B_ke^{ik\theta}) -$$

$$-\varkappa_2 R_1\sum_{k=2}^{\infty}(1-C_k^{(1)})\frac{\overline{B}_k}{k-1}e^{-ik\theta} - R_1\sum_{k=2}^{\infty} (1-C_k^{(3)})\frac{\overline{B}_{-k}}{k+1}e^{ik\theta}$$

где

$$B_k = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[q_2(\xi)-i\tau_2(\xi)]e^{-ik\xi}\,d\xi, \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

При этом имеют место условия равновесия диска

$$r_1\int_{-\theta_1}^{\theta_1}[q_1(\xi)-i\tau_1(\xi)]e^{i\xi}\,d\xi = P_1 + P_2 + G_1, \qquad r_1^2\int_{-\theta_1}^{\theta_1}\tau_1(\xi)\,d\xi = M \qquad (1.2)$$

Здесь $\varkappa_j = 3-4\nu_j$ ($j=1, 2$) — при плоской деформации и $\varkappa_j = (3-\nu_j)/(1+\nu_j)$ — при обобщенном плоском напряженном состоянии, $\mu_j = E_j/2(1+\nu_j)$, а E_j и ν_j — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона для материалов диска ($j=1$) и кольца ($j=2$). Кроме того, введены обозначения

$$K^{(1)}(\theta-\xi) = \frac{(\varkappa_1+1)r_1}{4\pi\mu_1}R_{11}(\theta-\xi) + \frac{(\varkappa_1-1)r_1}{8\pi\mu_1}R_{12}(\theta-\xi)$$

$$K^{(2)}(\theta-\xi) = \frac{(\varkappa_1+1)r_1}{4\pi\mu_1}R_{21}(\theta-\xi) +$$

$$+\frac{(\varkappa_1-1)r_1}{8\pi\mu_1}R_{22}(\theta-\xi) - \frac{(\varkappa_1-1)r_1}{8\pi\mu_1}(\theta-\xi)$$

где

$$R_{11}(\theta-\xi)=2\sin^2\frac{\theta-\xi}{2}\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|$$

$$R_{12}(\theta-\xi)=\sin(\theta-\xi)(\pi-|\theta-\xi|)\operatorname{sign}(\theta-\xi)$$

$$R_{21}(\theta-\xi)=\sin(\theta-\xi)\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|$$

$$R_{22}(\theta-\xi)=-2\sin^2\frac{\theta-\xi}{2}(\pi-|\theta-\xi|)\operatorname{sign}(\theta-\xi)$$

Далее,

$$f_1(\theta)=\frac{(\varkappa_1+1)\,r_1}{8\pi\mu_1}\int_{-\theta_1}^{\theta_1}q_1(\xi)\,d\xi+\frac{(\varkappa_1+1)\,P_1}{8\pi\mu_1}-\frac{P_1}{2\pi\mu_1}\cos\theta-$$

$$-\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}P_1\cos\theta\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)-\frac{(\varkappa_1-1)\,P_1}{8\pi\mu_1}\theta\sin\theta-$$

$$-\frac{P_2}{2\pi\mu_1(1+\varkappa_1)}\cos\theta+\frac{G_1}{16\pi\mu_1}(\varkappa_1+\varkappa_1')\cos\theta-\frac{3G_1}{4\pi\mu_1}\cos\theta$$

$$f_2(\theta)=\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1 r_1}M+\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}P_1\sin\theta\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)-\frac{(\varkappa_1-1)\,P_1}{8\pi\mu_1}\theta\cos\theta+$$

$$+\frac{P_2}{2\pi\mu_1(1+\varkappa_1)}\sin\theta+\frac{G_1}{16\pi\mu_1}(\varkappa_1+\varkappa_1')\sin\theta-\frac{G_1}{4\pi\mu_1}\sin\theta$$

$$(-\pi<\theta\leqslant\pi)$$

$$G_1=\pi r_1^2 g\rho_1,\qquad a_1=\frac{(\varkappa_2+1)(r-1)}{(\varkappa_2 r+1)^2-(r-1)^2},\qquad a_2=\frac{(1+\varkappa_2)(\varkappa_2 r+1)}{(\varkappa_2 r+1)^2-(r-1)^2}$$

$$a_3=\frac{2(r-1)^2}{(1+\varkappa_2)(\varkappa_2 r^2+1)}-\frac{\varkappa_2}{1+\varkappa_2}\ln r,\quad a_4=\frac{r-1}{\varkappa_2 r^2+1},\quad a_5=\frac{1+\varkappa_2}{2(\varkappa_2 r^2+1)}$$

$$C_k^{(1)}=\frac{1+\varkappa_2}{\varkappa_2}\frac{D_k^*}{D_k},\qquad C_k^{(2)}=(1+\varkappa_2)(r-1)/D_k,\qquad C_k^{(3)}=(1+\varkappa_2)\frac{D_k'}{D_k}$$

где

$$r=(R_2/R_1)^2,\quad D_k^*=(k^2-1)(r-1)^2+\varkappa_2 r^{-k+1}+\varkappa_2^2 r^2$$
$$D_k'=1+\varkappa_2 r^{-k+1}$$

$$D_k=(k^2-1)(r-1)^2+\varkappa_2 r^{k+1}+\varkappa_2 r^{-k+1}+\varkappa_2^2 r^2+1,\quad (k=2,3,\ldots)$$

g — ускорение силы тяжести, ρ_1 — плотность материала диска, $\varkappa_1=4\nu_1-1$ — при плоской деформации и $\varkappa_1'=(3\nu_1-1)/(\nu_1+1)$ — при обобщенном плоском напряженном состоянии.

Функции $K^{(j)}(\theta-\xi)\,(j=1,\,2)$ — непрерывные в области $-\theta_1 \leqslant \theta$, $\xi \leqslant \theta_2$ и имеют квадратично суммируемые частные производные первого порядка.

Далее, для исключения $q_2(\theta)$ и $\tau_2(\theta)$ из системы (1.1), содержащей неявно $q_2(\theta)$ и $\tau_2(\theta)$, используем уравнения равновесия усиливающего покрытия (оболочки) в перемещениях, приведенные в [9]. Выполняя те же операции, что и в [9], получим соотношения

$$\operatorname{Re} B_0 = \operatorname{Re} A_0[1 + D'(1 - a_1 - a_2)], \quad \operatorname{Im} B_0 = \operatorname{Im} A_0$$

$$B_1 = A_1, \quad B_{-1} = [A_{-1} + 2(D + D')a_4\overline{A}_1]/[1 + (D + D')(1 - 2a_3)]$$

$$B_k = \frac{d_k^{(1)}}{d_k}A_k + \frac{d_k^{(2)}}{d_k}\overline{A}_{-k}, \qquad B_{-k} = \frac{d_k^{(3)}}{d_k}\overline{A}_k + \frac{d_k^{(4)}}{d_k}A_{-k}, \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

где

$$A_k = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\theta_1}^{\theta_2}[q_1(\xi) - i\tau_1(\xi)]\,e^{-ik\xi}\,d\xi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$D = E_0h^3/24R_1^3\mu_2$, $D' = (2\mu_0 + \lambda_0)h/2R_1\mu_2$, $2\mu_0 + \lambda_0 = E_0(1-\nu_0)/(1+\nu_0)(1-2\nu_0)$ — при плоской деформации и $2\mu_0 + \lambda_0 = E_0/(1-\nu_0^2)$ — при обобщенном плоском напряженном состоянии, E_0, ν_0 — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для материала усиливающего покрытия,

$$d_k^{(1)} = -DC_k^{(2)}k^2(k^2-1) + D(1 - C_k^{(3)})k^2(k+1) +$$
$$+ D'C_k^{(2)}(k^2-1) + D'(1 - C_k^{(3)})(k+1) + 2$$

$$d_k^{(2)} = DC_k^{(2)}k^2(k-1)^2 - D(1 - C_k^{(3)})k^2(k-1) +$$
$$+ D'C_k^{(2)}(k-1)^2 + D'(1 - C_k^{(3)})(k-1)$$

$$d_k^{(3)} = DC_k^{(2)}k^2(k+1)^2 - \varkappa_2D(1 - C_k^{(1)})k^2(k+1) +$$
$$+ D'C_k^{(2)}(k+1)^2 + \varkappa_2D'(1 - C_k^{(1)})(k+1)$$

$$d_k^{(4)} = -DC_k^{(2)}k^2(k^2-1) + \varkappa_2D(1 - C_k^{(1)})k^2(k-1) +$$
$$+ D'C_k^{(2)}(k^2-1) + \varkappa_2D'(1 - C_k^{(1)})(k-1) + 2$$

$$d_k = 2\varkappa_2DD'(1 - C_k^{(1)})(1 - C_k^{(3)})k^2(k^2-1) -$$
$$- 2DD'(C_k^{(2)})^2k^2(k^2-1)^2 + \varkappa_2D(1 - C_k^{(1)})k^2(k-1) +$$
$$+ D(1 - C_k^{(3)})k^2(k+1) - 2DC_k^{(2)}k^2(k^2-1) +$$
$$+ \varkappa_2D'(1 - C_k^{(1)})(k-1) + D'(1 - C_k^{(3)})(k+1) +$$
$$+ 2D'C_k^{(2)}(k^2-1) + 2 \neq 0$$

В конечном итоге придем к интегральному уравнению [9] (при $\mu_1 < \infty$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln \frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|} - i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu^{(j)}\,\mathrm{sign}\,(t-s) \right] \chi_0(s)\,ds +$$

$$+ 2q^{(j)} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|}\,\mathrm{Re}\,[\chi_0(s)]\,ds +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} K_1^{(j)}(t-s)\,\chi_0(s)\,ds + \int_{-\pi}^{\pi} K_2^{(j)}(t-s)\,\overline{\chi_0(s)}\,ds = f_0^{(j)}(t) \tag{1.3}$$

$$(j = 1,\ 2,\ 3), \quad (-\pi \leqslant t,\ s \leqslant \pi)$$

где индекс $j = 1$ относится к общему случаю ($D \neq 0$, $h \neq 0$), $j = 2$ относится к случаю, когда усиливающее покрытие настолько гибкое, что пренебрегается его изгибной жесткостью ($D = 0$, $h \neq 0$) а $j = 3$, когда на обводе отверстия кольца отсутствует усиливающее покрытие ($D = 0$, $h = 0$).

Новые переменные t, s, входящие в (1.3), связаны со старыми соотношениями

$$t = \theta + \beta, \quad s = \xi - \beta, \quad \alpha = (\theta_1 + \theta_2)/2, \quad \beta = (\theta_1 - \theta_2)/2$$

В (1.3) введены также обозначения

$$q^{(1)} = q^{(3)} = 0, \ q^{(2)} = 2g_0\varkappa_2/(\varkappa_2 + 1), \quad \mathrm{th}\,\pi\mu^{(1)} = \mathrm{th}\,\pi\mu^{(2)} = -(\varkappa_1 - 1)/(\varkappa_1 + 1)$$

$$\mathrm{th}\,\pi\mu^{(3)} = (\varkappa_2 - 1)\,[(\varkappa_1 - 1)\,R_1\mu_2/(\varkappa_1 - 1)\,r_1\mu_1 - 1]/[1 + (\varkappa_2 + 1)\,g_0]\,(\varkappa_1 + 1) = \lambda$$

$$\chi_0(t) = p_0(t) + i\tau_0(t) - R_1[q_1(t-\beta) + i\tau_1(t-\beta)]/4\pi\mu_2\xi$$

$$K_1^{(j)}(t-s) = 4\pi\mu_2 K^{(1)}(t-s)/(\varkappa_2 + 1)\,r_1 + g_0 \sum_{k=2}^{\infty} a_k^{(1j)} \cos k(t-s) +$$

$$+ 2a_{13}^{(j)} g_0 \cos(t-s) + q^{(j)} R_{11}(t-s) - \frac{1}{2} q^{(j)} \cos(t-s) +$$

$$+ i \left| 4\pi\mu_1 K^{(2)}(t-s)/(\varkappa_1 + 1)\,r_1 + g_0 \sum_{k=2}^{\infty} a_k^{(2j)} \sin k(t-s) + q^{(j)} R_{21}(t-s) \right|$$

$$(j = 1,\ 2)$$

$$K_2^{(j)}(t-s) = g_0 \sum_{k=2}^{\infty} a_k^{(3j)} \cos k(t-s) - [2(\varkappa_1 + 1) + 2a_{14}^{(j)} g_0] \cos(t-s) +$$

$$+ q^{(j)} R_{11}(t-s) + i \left| g_0 \sum_{k=2}^{\infty} a_k^{(4j)} \sin k(t-s) + q^{(j)} R_{21}(t-s) \right| \quad (j = 1,\ 2)$$

$$K_1^{(3)}(t-s) = R_{11}(t-s) - \frac{\lambda}{2} R_{12}(t-s) -$$

$$- g_1 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varkappa_2 C_k^{(1)}}{k-1} + \frac{C_k^{(3)}}{k+1} \right) \cos k(t-s) - 2a_5 g_1 \cos(t-s) +$$

$$+ i \left| R_{21}(t-s) - \frac{\lambda}{2} R_{22}(t-s) + \frac{\lambda}{2}(t-s) + \right.$$

$$\left. + g_1 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varkappa_2 C_k^{(1)}}{k-1} - \frac{C_k^{(3)}}{k+1} \right) \sin k(t-s) \right|$$

$$K_2^{(3)}(t-s) = -2g_1 \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(2)} \cos k(t-s) -$$

$$- [2(\varkappa_1 + 1) g_0 - 2a_4] g_1 \cos(t-s)$$

Здесь

$$a_{13}^{(1)} = (1/2 - a_5)/[1 + (D + D')(1 - 2a_5)]$$

$$a_{14}^{(1)} = a_4/[1 + (D + D')(1 - 2a_5)], \quad a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(1)}\big|_{D=0}, \quad a_{14}^{(2)} = a_{14}^{(1)}\big|_{D=0}$$

$$g_0 = R_1 \nu_2 / r_1 \nu_1 (1 + \varkappa_1), \quad g_1 = g_0/[1 + (1 + \varkappa_2) g_0]$$

$$a_k^{(11)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(2)} + d_k^{(3)}}{d_k} + (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(1)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(4)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(21)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(2)} - d_k^{(3)}}{d_k} - (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(1)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(4)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(31)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(1)} + d_k^{(4)}}{d_k} + (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(2)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(3)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(41)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(1)} - d_k^{(4)}}{d_k} - (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(2)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(3)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(12)} = a_k^{(11)}\big|_{D=0} - \left[\frac{d_k^{(4)*} - d_k^{(4)}}{(k+1) d_k} + \frac{\varkappa_2 (d_k^{(1)*} - d_k^{(1)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

$$a_k^{(22)} = a_k^{(21)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(4)*} - d_k^{(4)}}{(k+1) d_k} - \frac{\varkappa_2 (d_k^{(1)*} - d_k^{(1)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

$$a_k^{(32)} = a_k^{(31)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(3)*} - d_k^{(3)}}{(k+1) d_k} - \frac{\varkappa_2 (d_k^{(2)*} + d_k^{(2)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

$$a_k^{(42)} = a_k^{(41)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(3)*} - d_k^{(3)}}{(k+1) d_k} + \frac{\varkappa_2 (d_k^{(2)*} + d_k^{(2)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

где

$$d_k^{(1)*} = [2\varkappa_2 (D' + 1) + \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k - 1) + (\varkappa_2 - 1) D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) -$$

$$- \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k + 1)]/(\varkappa_2 + 1)$$

$$d_k^{(2)*} = [2 (D' + 1) - \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k - 1) - (\varkappa_2 + 1) D' C_k^{(2)} (k - 1)^2 +$$

$$+ \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k - 1) - 2D' C_k^{(3)}]/(\varkappa_2 + 1)$$

$$d_k^{(3)*} = [2\varkappa_2 (\varkappa_2 D' - 1) - \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k + 1) - 2\varkappa_2^2 D' C_k^{(1)} +$$

$$+ (\varkappa_2 + 1) D' C_k^{(2)} (k + 1)^2 - 2\varkappa_2 D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) + \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k + 1)]/(\varkappa_2 + 1)$$

$$d_k^{(4)*} = [- \varkappa_2 D' + 2 - \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k - 1) - (\varkappa_2 - 1) D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) +$$

$$+ \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k + 1)]/(\varkappa_2 + 1)$$

Функции $f_0^{(j)}(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ имеют вид

$$f_0^{(j)}(t) = f_0^{(1j)}(t) + i f_0^{(2j)}(t) \tag{1.4}$$

При этом

$$f_0^{(1j)}(t) = P_{10} \left\{ 1/2 + \left[a_{12}^{(j)} g_0 - 2/(1 + \varkappa_1) - \ln \left(2 \cos \frac{t - \beta}{2} \right) \right] \cos (t - \beta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1 + 1} (t - \beta) \sin (t - \beta) \right\} + P_{20} [a_{12}^{(j)} g_0 - 2/(1 + \varkappa_1)^2] \cos (t - \beta) +$$

$$+ G_{10} [(\varkappa_1 + \varkappa_1')/4(1 + \varkappa_1) - 3/(1 + \varkappa_1) + a_{12}^{(j)} g_0] \cos (t - \beta) +$$

$$+ (\delta_0 + 1) g_0 \cos (t - \beta) - \gamma_0 g_0 \sin (t - \beta) +$$

$$+ (1/2 - a_{11}^{(j)} g_0) \int_{-\pi}^{\pi} p_0 (s)\, ds + q^{(j)} \int_{-\pi}^{\pi} p_0 (s)\, ds - g_0, \quad (j = 1, 2)$$

$$f_0^{(2j)}(t) = M_0 (1 - a_{21}^{(j)} g_0) - P_{10} \left\{ \left[a_{12}^{(j)} g_0 - \ln \left(2 \cos \frac{t - \beta}{2} \right) \right] \sin (t - \beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1 + 1} (t - \beta) \cos (t - \beta) \right\} - P_{20} [a_{12}^{(j)} g_0 - 2/(1 + \varkappa_1)^2] \sin (t - \beta) +$$

$$+ G_{10} [(\varkappa_1 + \varkappa_1')/4(1 + \varkappa_1) - 1/(1 + \varkappa_1) - a_{12}^{(j)} g_0] \sin (t - \beta) +$$

$$+ \frac{1}{2} q^{(j)} (P_{10} + P_{20} + G_{10}) \sin (t - \beta) - \delta_0 g_0 \sin (t - \beta) +$$

$$+ \gamma_0 g_0 [1 - \cos (t - \beta)], \quad (j = 1, 2)$$

$$[1 + (1 + \varkappa_2) g_0] f_0^{(3)}(t) = [f_0^{(11)}(t) + i f_0^{(21)}(t)] \Big|_{\substack{D = 0 \\ D' = 0}} + g_0 \int_{-\pi}^{t} p_0 (s)\, ds -$$

$$-\frac{1}{2}g_0(P_{10}+P_{20}+G_{10})\cos(t-\beta)+$$

$$+i\left[g_0M_0+\frac{1}{2}g_0(P_{10}+P_{20}+G_{10})\sin(t-\beta)\right]$$

В последних формулах положено

$$P_{10}=R_1P_1/4\pi\mu_2r_1\varepsilon,\quad P_{20}=R_1P_2/4\pi\mu_2r_1\varepsilon,\quad G_{10}=R_1G_1/4\pi\mu_2r_1\varepsilon$$

$$M_0=R_1M/4\pi\mu_2r_1^2\varepsilon,\quad \delta_0=\delta/\varepsilon,\quad \psi_0=r_1\psi/\varepsilon$$

$$a_{11}^{(1)}=(1-a_1-a_2)/[1+D'(1-a_1-a_2)],\quad a_{11}^{(2)}=a_{11}^{(1)}$$

$$a_{12}^{(1)}=a_3+[2(D+D')(a_4)^2-a_5+1/2]/[1+(D+D')(1-2a_5)]$$

$$a_{21}^{(1)}=1+a_1-a_2,\quad a_{21}^{(2)}=a_{21}^{(1)},\quad a_{12}^{(2)}=a_{12}^{(1)}\big|_{D=0}$$

В ядре уравнения (1.3) выделены его особая часть в виде функций

$$\ln\left(1/2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|\right)-i\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu^{(j)}\operatorname{sign}(t-s)$$

$$q^{(j)}\ln\left(1/2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|\right)$$

и регулярная часть в виде функций $K_1^{(j)}(t-s)$, $K_2^{(j)}(t-s)$ $(j=1,2,3)$, непрерывных в области $-\alpha\leqslant t,\ s\leqslant\alpha$ и имеющих квадратично суммируемые первые частные производные.

Отметим, что когда в области контакта действуют силы кулоновского трения, то, как в [9], получим уравнение, аналогичное (1.3).

Таким образом, решение рассмотренной контактной задачи приводится к решению интегрального уравнения (1.3), определяющего неизвестные контактные напряжения $p_n(t)$ и $\tau_n(t)$. Кроме того, в данной задаче следует определить также размеры области контакта (α,β), жесткое смещение δ и угол относительного поворота ψ диска. Поэтому, к уравнению (1.3) должны быть присоединены условия равновесия диска (1.2) и условия ограниченности контактных напряжений на концах зоны контакта [1, 11, 12]

$$\chi_0(\pm\alpha)=0\tag{1.5}$$

§ 2. *Сведение интегрального уравнения (1.3) к бесконечной системе линейных уравнений.* Решение уравнения (1.3) представим в виде ряда [9]

$$\chi_0(t)=w(t)\sum_{m=0}^{\infty}Z_mP_m^{(\alpha,\beta)}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\tag{2.1}$$

с неизвестными коэффициентами $\{Z_m\}_{m=0}^{\infty}$. При этом ввиду (1.5) должны иметь место условия

$$\sum_{m=0}^{\infty}Z_mP_m^{(\alpha,\beta)}(\pm1)=0$$

Здесь

$$w(t)=\frac{1}{2}\left(\sec\frac{t}{2}\right)^{2+\alpha+\beta}\left(\sin\frac{a-t}{2}\right)^{\alpha}\left(\sin\frac{a+t}{2}\right)^{\beta}$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}-i\mu^{(l)},\qquad \beta=-\frac{1}{2}+i\mu^{(l)}$$

$\{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ $(\mathrm{Re}(\alpha,\beta)>-1)$ – многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$.

Подставляя (2.1) в (1.3), а затем используя известные интегральные соотношения, аналогичные приведенному [13], уравнение (1.3) известным способом относительно неизвестных коэффициентов сведем к квазивполне регулярной бесконечной системе

$$z_n(1+q^{(l)})+\frac{H_n}{n}n^{\varepsilon_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z_m}{m^{\varepsilon_1}}\left(K_{n,m}^{(1l)}+q^{(l)}K_{n,m}^{(1*)}\right)+$$

$$+\frac{H_n}{n}n^{\varepsilon_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{z}_m}{m^{\varepsilon_1}}\left(K_{n,m}^{(2l)}+q^{(l)}K_{n,m}^{(2*)}\right)=\frac{H_n}{n^2}n^{\varepsilon_1}b_n,\quad (n=1,2,\ldots)\quad (2.2)$$

где

$$z_n=Z_n/n^{1+\varepsilon_1},\quad (n=1,2,\ldots)$$

а ε_1 — сколь угодно малое, но фиксированное положительное число. Кроме того, для определения коэффицента Z_0 получим соотношение

$$Z_0\left[1-\gamma_0^{-1}h_0\ln\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}\right)-\gamma_0^{-1}J_0^{(\alpha,\beta)}\right]-\gamma_0^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}Z_mJ_m^{(\alpha,\beta)}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}Z_mK_{0,m}^{(1l)}+\sum_{m=0}^{\infty}\overline{Z}_mK_{0,m}^{(2l)}+q^{(l)}\left[(Z_0\gamma_0^{(1)}+\overline{Z}_0\gamma_0^{(1)})\gamma_0^{-1}-\right.$$

$$-(Z_0+\overline{Z}_0)\gamma_0^{-1}h_0\ln\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}\right)-(Z_0+\overline{Z}_0)\gamma_0^{-1}J_0^{(\alpha,\beta)}-$$

$$\left.-\gamma_0^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}(Z_mJ_m^{(\alpha,\beta)}+\overline{Z}_mJ_m^{(\beta,\alpha)})+q_m\left(\sum_{m=1}^{\infty}Z_mK_{0,m}^{(1*)}+\sum_{m=1}^{\infty}\overline{Z}_mK_{0,m}^{(2*)}\right)\right]=b_0\quad (2.3)$$

Здесь введены обозначения

$$K_{n,m}^{(1*)}=-i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{th}\,\pi\mu^{(2)}\int_{-a}^{a}\sec^2\frac{t}{2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)\,dt$$

$$K_{n,m}^{(2*)}=\sin\frac{a}{2}\int_{-a}^{a}\left[h_0P_m^{(\alpha,\beta)}(x)+\right.$$

$$+ i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu^{(2)}\overline{w_1(t)}P_{n-1}^{(-\tau,-\rho)}(x)\Big|\overline{w(t)}P_n^{(\tau,\rho)}(x)\,dt$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots)$$

$$h_0 = \pi\,\mathrm{sech}\,\pi\mu^{(j)}, \quad \gamma_0^{(1)} = -\pi\,\mathrm{sech}\,\pi\mu^{(j)}[\ln 2 + \psi(0.5 - i\mu^{(j)}) - \psi(1)]$$

$$q_m = m^{-1}\pi\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}(\gamma_0 h_0)^{-1}, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$H_n = n\pi^{-1}\,\mathrm{ch}\,\pi\mu^{(j)}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}(h_n)^{-1}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где

$$x = \mathrm{tg}\frac{t}{2}\Big/\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad w_1(t) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}\sec^2\frac{t}{2}\,[\overline{w(t)}]^{-1}$$

$$h_n = \Gamma(n-\tau)\,\Gamma(n-\rho)/2\,[\Gamma(n+1)]^2$$

$\psi(x)$ — пси-функция Эйлера, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Бесконечная система (2.2) и соотношение (2.3) при $j=1$ и $j=3$ ($q^{(1)}=q^{(3)}=0$) совпадают с аналогичной бесконечной системой и аналогичным соотношением, рассмотренными в [9]. Поэтому остальная часть обозначений, содержащаяся в (2.2) и (2.3), здесь не приводится.

Отметим также, что квазивполне регулярность системы (2.2) при $j=1$ и $j=3$ доказана в [9]. Аналогичным образом, как и в [9, 14], можно показать, что при $j=2$ ($q^{(2)}\neq 0$), то есть при добавлении к ядрам $K_{n,m}^{(11)}$ и $K_{n,m}^{(22)}$ соответственно ядер $q^{(2)}K_{n,m}^{(11*)}$ и $q^{(2)}K_{n,m}^{(22*)}$, квазивполне регулярность системы (2.2) не нарушается.

§ 3. *Числовой пример.* Рассмотрим уравнение (1.3) при отсутствии тангенциальных контактных напряжений, то есть $\tau_0(t) = 0$, и положим $P_{10} = M_0 = 0$. Тогда оно принимает вид [7]

$$(1+2q^{(j)})\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|}\,p_0(s)\,ds + \int_{-\alpha}^{\alpha}K_j(t-s)\,p_0(s)\,ds = f_{0j}(t)$$

$$K_j(t-s) = \mathrm{Re}\,[K_1^{(j)}(t-s) + K_2^{(j)}(t-s)]$$

$$f_{0j}(t) = \mathrm{Re}\,[f_0^{(j)}(t)], \quad (j = 1, 2, 3)$$

В указанном частном случае в зоне контакта будет действовать только нормальное давление $p_0(t)$, область контакта становится симметричной относительно оси ox ($\beta = 0$, $\psi = 0$) и будем иметь $p_0(-t) = p_0(t)$.

Условие равновесия диска примет вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p_0(s)\cos s\,ds = P_{20} + G_{10}$$

Числовые расчеты здесь будут выполнены по схеме, приведенной в [7].

Рассмотрим два случая:

1) пренебрегается изгибная жесткость усиливающего покрытия ($D = 0$),

2) отсутствует усиливающее покрытие на обводе отверстия кольца ($h = 0$).

Числовые расчеты проведены для случая $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ при следующих значениях физических и геометрических параметров:

$$\mu_1 = \mu_2 \ \ (E_1 = E_2), \quad \mu_0/\mu_2 = 1/2 \ \ (E_0/E_2 = 1/2), \quad \nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

$$h/R_1 = 0.05, \quad R_2/R_1 = 2, \quad R_3/R_1 = 4 \ \ (r = 4,\ r = 16)$$

Кроме того, положено $r_0 \approx r_1$, в то время как принимается $\varepsilon \neq 0$ ($\varepsilon = r_0 - r_1$).

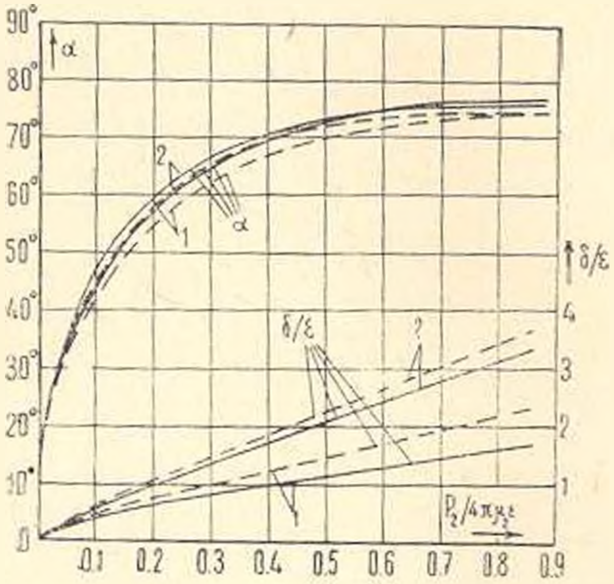
Вычисления проводились на ЭВМ «Наири-2». Бесконечные системы решались методом редукции, причем для получения максимальных нормальных давлений с тремя верными знаками, достаточно было брать три уравнения из бесконечных систем.

Числовые результаты приведены в таблице.

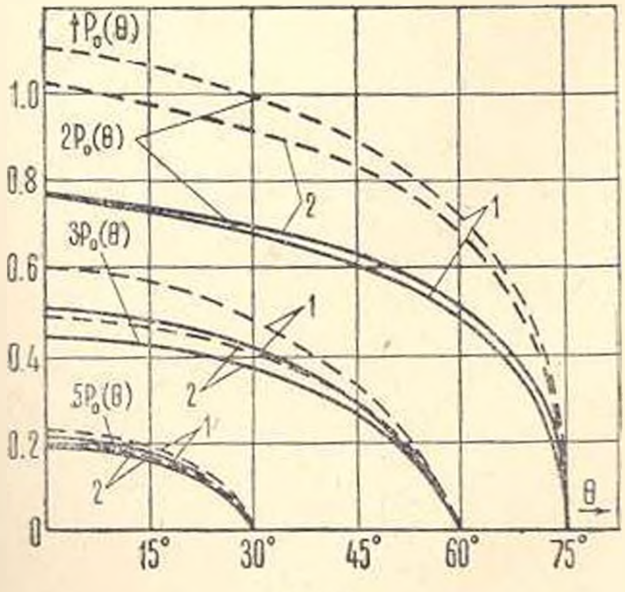
		$h/R_1 = 0.05$			$h = 0$		
		$\alpha = 30°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 75°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 75°$
$R_2/R_1 = 2$	$P_{20},\ G_{10}$	0.0331	0.2317	0.5941	0.0361	0.2701	0.8712
	α_0	0.1915	0.6667	1.3262	0.2111	0.8890	2.3670
		0.2500	1.0790	2.3846	0.2754	1.3694	3.8980
	X_0	0.0109	0.0842	0.2313	0.0120	0.0980	0.3393
	X_1	−0.0109	−0.0851	−0.2342	−0.0121	−0.1001	−0.3430
	X_2	0	0.0010	0.0030	0.0001	0.0029	0.0018
	X_3	0	−0.0001	−0.0001	0	0.0001	0.0019
	$p_0(\vartheta)_{max}$	0.0421	0.1704	0.3849	0.0467	0.2001	0.5603
$R_3/R_1 = 4$	$P_{20},\ G_{10}$	0.0302	0.2063	0.6087	0.0304	0.2264	0.8138
	α_0	0.2411	0,9609	2,4100	0,2670	1.1548	3.5510
		0.2950	1.3280	3.4870	0.3080	1.5590	5.0040
	X_0	0.0100	0.0752	0.2384	0.0100	0.0825	0.3186
	X_1	−0.0099	−0.0740	−0.2350	−0.0100	−0.0814	−0.3143
	X_2	−0.0001	−0.0010	−0.0028	0	−0.0010	−0.0035
	X_3	0	−0.0002	−0.0006	0	−0.0001	−0.0008
	$p_0(\vartheta)_{max}$	0.0382	0.1484	0.3870	0.0386	0.1630	0.5177

Отметим, что вычисления проводились при следующей схеме нагружения диска: либо считалось, что на диск действует только сила P_2 ($G_1 = 0$).

либо наоборот, на диск действуют только силы тяжести диска $G_1 (P_2 = 0)$. Полученные результаты показывают, что в обоих случаях при $P_2 = G_1$ распределение контактных давлений и размеры области контакта получаются



Фиг. 2.



Фиг. 3.

одинаковыми, однако во втором случае ($P_2 = 0$) несколько увеличивается жесткое смещение диска δ (в таблице значения δ_* приведены в двух рядах, причем верхний ряд соответствует случаю $G_1 = 0$, а нижний — $P_2 = 0$).

Для наглядного представления полученных эффектов, обусловленных наличием на обводе отверстия кольца подкрепляющего покрытия и изменением отношения R_2/R_1, приведены графики зависимости длины участка контакта (2α) и величины жесткого смещения диска (δ_0) от прижимающей силы P_0 (фиг. 2). Приведены также графики распределения контактных давлений при $\alpha = 30°$, $60°$ и $75°$ (фиг. 3). В этих графиках сплошные линии соответствуют случаю 1), а пунктирные — случаю 2). Кроме того, через 1 и 2 обозначены кривые, соответствующие отношениям $R_2/R_1 = 2$ и $R_2/R_1 = 4$.

Автор признателен С. М. Мхитаряну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинаканский филиал Ереванского политехнического ин-та им. К. Маркса

Поступила 24 IV 1978

Ֆ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԿԱՎԱՌԱԿԻ ԵՎ ԱՆՑՔԻ ՇՐՋԱԳԻԾԸ ԲԱՐԱԿ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՆԵՐՔԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկվում է շրջանային առաձգական սկավառակի և արտաքին եզրագծով կոշտ ամրացված շրջանային օղակի ներքին կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, երբ օղակի անցքի շրջագիծը ուժեղացված է օղակաձև բարակ առաձգական ծածկույթով։ Խնդրի որոշիչ հավասարումը հանգում է Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման։ Վերջինիս լուծումը Յակոբիի օրթոգոնալ բազմանդամների մաթեմատիկական ապարատի հիման վրա բերված է համարժեք քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։ Մի քանի մասնավոր դեպքերի համար ստացված են թվային արդյունքներ։

ON THE INTERNAL CONTACT INTERACTION OF A ROUND DISK AND A CIRCULAR RING SUPPORTED ON THE CONTOUR OF THE HOLE WITH A THIN CIRCULAR COATING

F. S. TOROSSIAN

S u m m a r y

The contact problem on the external interaction of an elastic round disk with a circular ring rigidly fastened along its external boundary, when the outline of the hole is supported with a thin circular elastic coating stuck to it, is considered.

The solution of the above problem is reduced to that of the first kind Fredholm integral equation. It's effective solution is presented. For some particular cases the numerical results are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Коровчинский М. В.* О некоторых вопросах эластореологии, имеющих приложение в теории трения. Трение и износ в машинах. Сб. XV, М., ин-т машиноведения, 1962
3. *Кочанов Ф. П.* Решение обобщенной задачи И. Я. Штаермана. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 5.
4. *Мазинг Р. И.* Контактная задача для тяжелого полого цилиндра. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 2.
5. *Панасюк В. В., Теплый М. И.* Об одной контактной задаче с учетом сил трения. Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 7.
6. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К теории контактных задач для цилиндрических тел с учетом сил трения. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 2.
7. *Торосян Ф. С.* Об одной контактной задаче для цилиндрических тел. Уч. записки ЕрГУ, 1977, № 1.
8. *Мазинг Р. И.* Цилиндрический штамп с симметричной трещиной. Изв. АН СССР МТТ, 1978, № 1.
9. *Мхитарян С. М., Торосян Ф. С.* О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 5.
10. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
12. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
13. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
14. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.