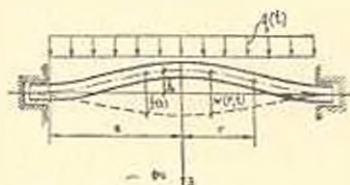


М. А. ЗАДОЯН, Г. В. ШАХАЗИЗЯН

О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается вопрос несущей способности круглой шарнирно-опертой гибкой плиты с двухсторонними симметричными тонкими усиливающими покрытиями и с начальной погибью, направленной против осесимметрично-распределенной нагрузки $q(t)$ (фиг. 1). Материал покрытий считается упругим, а для среднего слоя имеют место соотношения наследственной теории ползучести Маслова—Арутюняна [1].



Фиг. 1.

Потеря устойчивости в виде «хлопка» с учетом явления ползучести для металлической арки (балки) рассмотрена в работе [2]. Вопросам устойчивости при ползучести посвящены работы [3—9] и др. Подробная библиография и анализ работ в этой области даны в монографиях Ю. Н. Работнова [3—4] и Н. Хоффа [5].

1. Соотношения между внутренними силами и деформациями срединной поверхности плиты. Если принять гипотезу прямых нормалей

$$\varepsilon_r = e_r + x_r z \quad (r, \theta) \quad (1.1)$$

где e_r, e_θ — деформации, а x_r, x_θ — кривизны срединной поверхности плиты, напряжения в крайних слоях плиты определяются формулой

$$\sigma_{r,i} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} [e_r + \nu_i e_\theta \pm (x_r + \nu_i x_\theta) h] \quad (r, \theta) \quad (1.2)$$

В бетонном слое имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{E}{1-\nu^2} [e_r + \nu e_\theta + (x_r + \nu x_\theta) z] + \\ & + \int_{-1}^1 \frac{E}{1-\nu^2} [e_r + \nu e_\theta + (x_r + \nu x_\theta) z] R(t, \tau) d\tau \quad (r, \theta) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра ползучести

$$K(t, \tau) = -E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} - \gamma(\tau) (1 - e^{-\gamma(\tau-1)}) \right] \quad (1.4)$$

и имеет вид

$$R(t, \tau) = \frac{E'(\tau)}{E(\tau)} + \gamma\tau(\tau) E(\tau) - \frac{D(\tau)}{E(\tau)} \left(E(\tau) e^{-\int_1^\tau \gamma(s) ds} \right) \quad (1.5)$$

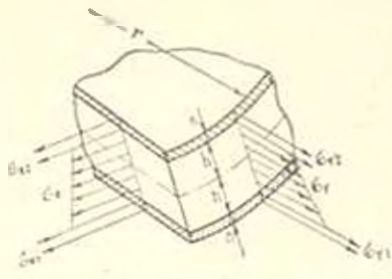
$$\gamma(\tau) = \gamma [1 - \varphi(\tau) E(\tau)], \quad D(\tau) = \gamma^2(\tau) - \gamma'(\tau) - \gamma\eta(\tau) \quad (1.5)$$

Для старого бетона $\varphi(\tau) = C$, $E(\tau) = E$ и будем иметь

$$R(t, \tau) = \tau e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad \tau = \gamma EC \quad (1.6)$$

Для простоты толщину покрытия Δ по отношению к толщине бетонного слоя считаем малой и напряжение в нем по высоте принимаем постоянным.

Из условий статики (фиг. 2) имеем



$$N_r = (z_{r1} + z_{r2}) \Delta + \int_{-h}^h \sigma_r dz$$

$$M_r = (z_{r1} - z_{r2}) \Delta h + \int_{-h}^h \sigma_r z dz \quad (r, \theta) \quad (1.7)$$

Фиг. 2

Используя выражения напряжений в слоях (1.2)–(1.3), из (1.7) получаем

$$N_r = A_0(e_r + \nu e_\theta) - \int_{-h}^h B_0(e_r + \nu e_\theta) R(t, \tau) d\tau$$

$$M_r = A_1(e_r + \nu e_\theta) - \int_{-h}^h B_1(e_r + \nu e_\theta) R(t, \tau) d\tau \quad (r, \theta) \quad (1.8)$$

где введены обозначения

$$A_0(t) = B_0(t) \nu_0(t), \quad B_0(t) = \frac{2E(t)h}{1-\nu^2}, \quad \nu_0 = 1 + \frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2} \frac{E_1\Delta}{E(t)h}$$

$$A_1(t) = B_1(t) \nu_1(t), \quad B_1(t) = \frac{2E(t)h^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \nu_1 = 1 + 3 \frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2} \frac{E_1\Delta}{E(t)h} \quad (1.9)$$

Между компонентами перемещения и деформациями срединной поверхности плиты имеются зависимости

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right], \quad e_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\epsilon_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \epsilon_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1.10)$$

Здесь $w_0(r)$ — начальная заданная погибь, $w(r, t)$ — прогиб от воздействия внешних сил, а $w_* = w_0 + w$.

Краевые условия плиты будут

$$N_r = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = a$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0$$
(1.11)

В дальнейшем для упрощения принимаем, что коэффициенты Пуассона для бетона и усиливающих слоев равны $\nu_1 = \nu$.

2. Вариационное уравнение задачи. Согласно принципу возможных перемещений имеем

$$\int_0^a (N_r \delta e_r + N_\theta \delta e_\theta + M_r \delta \kappa_r + M_\theta \delta \kappa_\theta) r dr - \int_0^a q_1 \delta w r dr = 0 \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) эквивалентно дифференциальному уравнению равновесия нормальных сил

$$\frac{\partial}{\partial r} (r N_r) - N_\theta = 0 \quad (2.2)$$

и вариационному уравнению

$$\int_0^a \left[\frac{\partial}{\partial r} (r M_r) - \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r N_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + q_1 r \right] \delta w dr = 0 \quad (2.3)$$

Вводя функцию напряжений $\Phi(r, t)$,

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad (2.4)$$

из (1.8) и (1.10) находим

$$\frac{\partial}{\partial r} (-\Delta \Phi) = -\frac{1-\nu^2}{2r} \left[A_2 \left| \left(\frac{\partial w_*}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial r} \right)^2 \right| - \right. \\ \left. - \int_0^1 B_2 \left| \left(\frac{\partial w_*}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial r} \right)^2 \right| R(t, \tau) d\tau \right] \quad (2.5)$$

Подставляя выражения M_r и M_θ из (1.8) в (2.3) и преобразуя с учетом краевых условий (1.11), получим

$$\int_0^a \left[A_1 \nabla^2 \nabla^2 w - \int_0^1 B_1 \nabla^2 \nabla^2 w R(t, \tau) d\tau - q_1 \right] \delta w dr = 0$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (2.6)$$

Положим

$$w_0 = f_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad w = f(t) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (2.7)$$

где f_0 — заданная начальная погибь в середине плиты, а $f(t)$ — неизвестный, изменяющийся во времени прогиб в середине плиты.

Подставляя (2.7) в (2.5) и производя необходимые выкладки с учетом краевых условий, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1-\nu^2}{6r} \left[A_0(f^2 - 2f_0 f) - \int_0^t B_0(f^2 - 2f_0 f) R(t, \tau) d\tau \right] F(r) \quad (2.8)$$

где

$$F(r) = 3 \frac{r^2}{a^2} - 6 \frac{r^4}{a^4} + 4 \frac{r^6}{a^6} - \frac{r^8}{a^8}$$

Далее, внося (2.7) и (2.8) в (2.6), интегрируя и вводя обозначения

$$w(t) = f(t)/f_0, \quad q(t) = q_1(t)E, \quad \bar{z} = f_0^2 2h \quad (2.9)$$

получим нелинейное интегральное соотношение для определения w

$$\begin{aligned} a_1 w + a_2 (w^3 - 3w^2 + 2w) = q + \beta_1 \int_0^t w R(t, \tau) d\tau + \\ + \beta_2 (w - 1) \int_0^t (w^2 - 2w) R(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1(t) = \beta_1 \bar{z}_1(t), \quad \bar{z}_2(t) = \beta_2 \bar{z}_0(t) \\ \beta_1 = \frac{16\bar{z}}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{2h}{a} \right)^4, \quad \beta_2 = \frac{6\pi}{7} \bar{z}^3 \left(\frac{2h}{a} \right)^4 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Полученное уравнение (2.10) сводится к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\begin{aligned} a_1 w + (w - 1) \beta_1 = q + \beta_1 \int_0^t w R(t, \tau) d\tau \\ \beta_2 (w^3 - 2w) = \beta_2 + \beta_2 \int_0^t (w^2 - 2w) R(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\psi(t)$ наряду с $\omega(t)$ определяют характер движения плиты во времени вследствие ползучести бетона.

3. *Критическое время плиты.* За критерий потери несущей способности принимаем условие безграничного возрастания скорости прогиба ($\omega \rightarrow \infty$). Соответствующий момент времени $t = T$ при данной нагрузке q называется критическим временем конструкций.

Принимая для простоты $q(t, t) = q - \cos \psi t$ и рассматривая случай старого бетона (1.6), из (2.10) дифференцированием по t получим

$$\left[a_1 + a_2(3\omega^2 - 6\omega + 2) + i\beta_2 \int_0^t (\omega^2 - 2\omega) e^{-\psi(t-\tau)} d\tau \right] \frac{v}{v_0} =$$

$$= q - A\omega - B(\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega) \quad (3.1)$$

где $v = \omega$,

$$A = \frac{16\beta_2}{3(1-\nu^2)} \left(\mu_1 - \frac{\lambda}{\tau_1} \right), \quad B = \frac{6}{7} \beta_2 \left(\mu_2 - \frac{\lambda}{\eta} \right) \quad (3.2)$$

Обозначая начальные значения ω и v при $t = \tau$, через ω_0 и v_0 , из (2.10) и (3.1) находим

$$a_1\omega_0 + a_2(\omega_0^3 - 3\omega_0^2 + 2\omega_0) = q$$

$$\tau_0 = \tau \frac{q - A\omega_0 - B(\omega_0^3 - 3\omega_0^2 + 2\omega_0)}{a_1 + a_2(3\omega_0^2 - 6\omega_0 + 2)} \quad (3.3)$$

Определим значение $q = q_0$, при котором потеря несущей способности («хлопок») происходит в начальный момент $T = \tau_0$. Приравняв нулю знаменатель τ_0 из (3.3), получим соответствующее значение относительного прогиба

$$\omega_{00} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\xi_0^2}{\xi^2}} \quad (3.4)$$

где

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{56}}{3} \sqrt{\frac{\mu_1}{(1-\nu^2)\nu_0}} \quad (3.5)$$

Из формул (3.4) следует, что для явления «хлопка» необходимо, чтобы параметр удовлетворял условию $\xi > \xi_0$. Подставляя значение ω_{00} из (3.4) в первое уравнение (3.3), находим значение q_0 , при котором в начальный момент $t = \tau$, происходит хлопок

$$q_0 = a_1\omega_{00} + a_2(\omega_{00}^3 - 3\omega_{00}^2 + 2\omega_{00}) \quad (3.6)$$

Индексом (*) обозначим величины, соответствующие значению $t \rightarrow \infty$. Применяя правило Лопиталья, из (2.10) и (3.1) находим

$$A\omega_0 + B(\omega_0^3 - 3\omega_0^2 + 2\omega_0) = q$$

$$v_s = \frac{q - A\omega_s - B(\omega_s^3 - 3\omega_s^2 + 2\omega_s)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2(3\omega_s^2 - 6\omega_s + 2) - \beta_s \frac{\lambda}{\gamma_1} (\omega_s - 2\omega_0)} \quad (3.7)$$

Приравнявая нулю знаменатель v_s , находим значение ω_{s0} , при котором возможен хлопок ($t \rightarrow \infty$)

$$\omega_{s0} = 1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{2\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}} \quad (3.8)$$

где

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\gamma_1}}} \quad (3.9)$$

Очевидно, для возможности хлопка при $t \rightarrow \infty$ необходимо условие $\varepsilon_0 > \varepsilon_s$. Подставляя значение ω_{s0} из (3.8) в выражение q из (3.7), находим значение q_* , при котором хлопок «происходит» в бесконечности ($t \rightarrow \infty$):

$$q_* = A\omega_{s0} + B(\omega_{s0}^3 - 3\omega_{s0}^2 + 2\omega_{s0}) \quad (3.10)$$

При $q < q_*$, как видно из формулы (3.7), скорость прогиба плиты в течение времени затухает ($v \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Значение q , определяемое по формуле (3.10), будет верхним значением «безопасной» нагрузки в смысле исчерпания несущей способности плиты. Для значения, находящегося между q_0 и q_* , существует критическое время, когда происходит потеря несущей способности в виде «хлопка».

Исключая интеграл из (2.10) и (3.1), приходим к системе дифференциальных уравнений

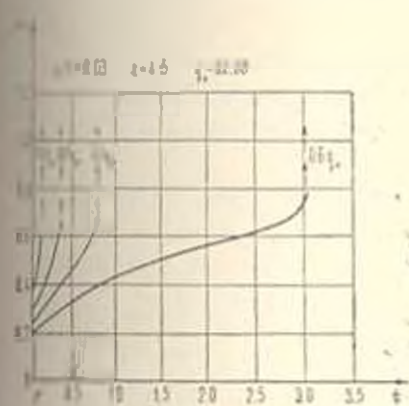
$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= v \\ \dot{v} &= \gamma v + m(\omega) v^2 + n(\omega) v^3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь введены обозначения

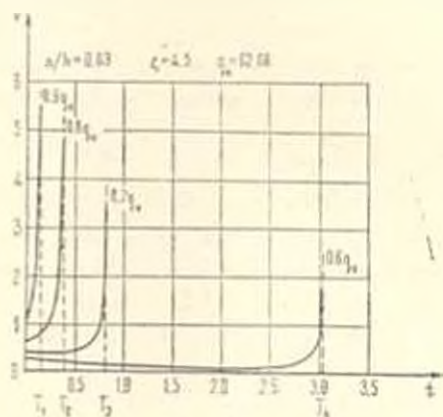
$$\begin{aligned} m(u) &= [S_1 u (2 - u) - S_2] [q - A u - B(u^3 - 3u^2 + 2u)]^{-1} \\ n(u) &= S_1 (1 - u) [q - A u - B(u^3 - 3u^2 + 2u)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{36}{7} \frac{\mu}{\gamma_1} \varepsilon_s^3, \quad S_1 = \frac{12}{7} \left(3\mu_0 - 2 \frac{\lambda}{\gamma_1} \right) \varepsilon_s^3 \\ S_2 &= \frac{16\varepsilon_0}{3(1 - \nu^2)} \left(2\mu_1 - \frac{\lambda}{\gamma_1} \right) + \frac{12}{7} \left(2\mu_0 - \frac{\lambda}{\gamma_1} \right) \varepsilon_s^3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

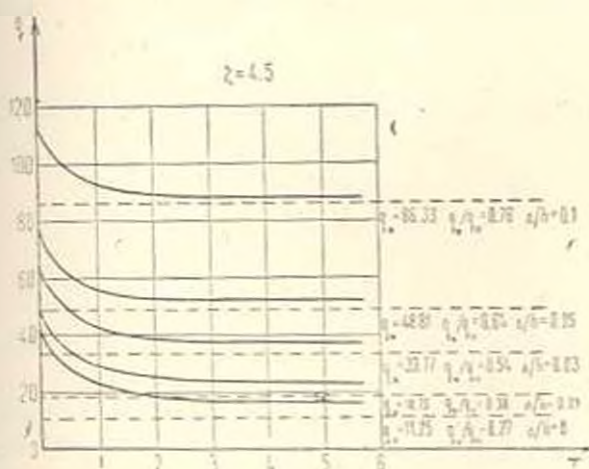
На основании численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (3.11) с начальными условиями (3.3) при значениях параметров $\varepsilon_1 = 2 \cdot 10^4$ кг/см², $E = 2 \cdot 10^5$ кг/см², $C = 0.9 \cdot 10^{-5}$ см²/кг, $\nu = 0.3$, $\tau = 0.026$ 1/день, $\Delta/h = 0.03$, $\tau_0 = 4.5$, произведенного на ЭВМ „Наирн-2“, построены графики $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ от момента τ до T (фиг. 3, 4). На



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

фиг. 5 построен график зависимости q от T для различных значений Δ/h . Из графиков заключаем, что с увеличением толщины усиливающего слоя Δ увеличиваются q_0 , q_* и q_{**} .

Институт механики АН Армянской ССР.
Ереванский политехнический институт
ин. К. Маркса

Поступила 28 XII 1977

Խ. Ա. ԶԱԳՈՅԱՆ, Հ. Բ. ՇԱՀԱԶԻԶԻԱՆ

ԵՌԱՇՇԵՐՏ ԿՈՐ ՍԱԼԻ ԿՐՈՂՈՒՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՍՈՂՔԻ ԳԵՊԻՈՒՄ

Ա մ փ ո վ ո ո մ

Հողվածում ուսումնասիրվում է լայնական բախշված բեռին հակառակ ուղղված սկզբնական ճկվածքով եռաշերտ կլոր սալի կայունության խնդիրը։ Արտաքին շերտերի նյութը ընդունվում է առաձգական, իսկ միջին շերտը՝ համար հաշվի է առնվում սողքը ըստ Մասլով-Հարությունյանի ժառանգական տեսության։

Օգտվելով լադրանժի վարիացիոն հավասարումից, ներմուծելով լարումների $\Phi(r, t)$ ֆունկցիան, խնդրի լուծումը բերվում է «ոլտերի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի, որից ստացվում է փոխադասարկված գործակիցներով դիֆֆերենցիալ հավասարումների սիստեմ։

Քվային ինտեգրման միջոցով կառուցված են $w(t)$, $v(t)$ և $q(T)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները տարբեր ղեպերի համար։

Ակնթարթային ($t = t_1$) և երկարատև ($t \rightarrow \infty$) կայունության ղեպերում, հավասարաչափ բախշված հաստատուն բեռի (q_0) և կրիտիկական ինտենսիվությունից որոշման համար ստացված են տեսլիկալ արտահայտություններ։

ON SUPPORTING POWER OF A ROUND THREE-SHEET PLATE UNDER CREEP

M. A. ZADOYAN, H. B. SHAHAZIZIAN

S u m m a r y

The problem on stability of a round three-sheet plate with initial deflection opposite to a transverse load is discussed.

The material of outer sheets is thought to be elastic and for the medium sheet the creep is considered in terms of the Maslov-Arutunyan theory.

By using Lagrange's variational equation and introducing the tension function $\Phi(r, t)$, the problem is reduced to a system of nonlinear integral equations of the Volter type. From this a system of differential equations is obtained with variable ratios depending on a relative deflection.

By numerical integration the diagrams $w(t)$, $v(t)$ and $q(T)$ are constructed for various cases.

On determining the critical intensity q_0 and q_k of continuous load the analytic expressions are obtained with instant ($t = t_1$) and continuous stability ($t \rightarrow \infty$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., ГИТЛА, 1952.
2. Ryan T. H. H. Steep buckling of curved beam under lateral loading. Proc. 3-rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., N. Y., 1958.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. М., «Наука», 1966.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
5. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. М., ИЛ, 1955.
6. Бувакин А. А. Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, 1953, т. 6, № 2.
7. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластин в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
8. Рихвицкии А. Р. Устойчивость при ползучести. Пробл. устойч. в строит. мех. Тр. Всесоюзн. конф. по пробл. устойч. М., изд. «Строительство», 1965.
9. Вильмир Л. С. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963.
10. Задолян М. А. Смешанное вариационное уравнение целнеймо-ползучего тела и задача выпучивания призматического стержня. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. 21, № 2.
11. Задолян М. А. Применение вариационных методов теории ползучести при расчете изогнутых элементов. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, 1975, т. 26, № 3.