

И. И. КУДИШ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ УПРУГО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЯЖЕЛО НАГРУЖЕННОГО КОНТАКТА КАЧЕНИЯ

В работе исследуется плоская неизотермическая упруго-гидродинамическая задача для тяжело нагруженных цилиндров. Качение цилиндров происходит с проскальзыванием. Смазка считается несжимаемой ньютоновской жидкостью. Температурная деформация контактирующих цилиндров не учитывается, а температуры их поверхностей считаются заданными.

Указанная задача численно исследовалась в работе [1]. В [2] предложен метод определения силы трения в упруго-гидродинамическом контакте, основанный на приближенном решении задачи о распределении температуры T поперек слоя смазки.

В условиях тяжело нагруженного контакта давление почти во всей области контакта, за исключением малых зон входа и выхода, близко к герцевскому. В зонах же входа и выхода на величину и характер распределения давления существенное влияние оказывает течение вязкой смазки. Именно в этих зонах формируется толщина слоя смазки. Поэтому возникает необходимость детального исследования решения задачи в зонах входа и выхода. Обычно применяемые сквозные численные методы решения могут привести к значительным погрешностям, особенно при режимах недостаточной смазки и масляного голодания.

Аналогично [3], исследуем поставленную задачу методом сращиваемых асимптотических разложений.

1. Займемся выводом уравнения Рейнольдса для неизотермической задачи в случае ньютоновской жидкости. Используя обычно принимаемые допущения [4], для скорости смазки $u(x, z)$ вдоль направления качения получим

$$u(x, z) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{\int_{-h/2}^z \frac{ds}{\eta}}{\int_{-h/2}^z \frac{ds}{\eta}} + \frac{dp}{dx} \left\{ \int_{-h/2}^z \frac{s ds}{\eta} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{s ds}{\eta} \frac{\int_{-h/2}^z \frac{ds}{\eta}}{\int_{-h/2}^z \frac{ds}{\eta}} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь x и z — координаты элемента смазки, измеряемые соответственно вдоль и поперек смазочного слоя (фиг. 1); u_1 и u_2 — линейные скорости поверхностей цилиндров; $h = h(x)$ — зазор между цилиндрами; $p = p(x)$ — давление в слое смазки; $\eta = \eta(x, z)$ — динамическая вязкость смазки.

С помощью выражения (1.1) и уравнения неразрывности

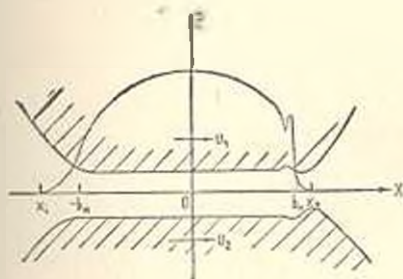
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dw}{\partial z} = 0$$

а также граничных условий

$$w\left(x, -\frac{h}{2}\right) = w\left(x, \frac{h}{2}\right) = 0$$

получим уравнение Рейнольдса в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{s ds}{\mu} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z \frac{ds}{\mu} dz \right] \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu} - \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z \frac{s ds}{\mu} dz \right] \frac{dp}{dx} \right\} = \\ = u_1 \frac{dh}{dx} + (u_2 - u_1) \frac{d}{dx} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z \frac{ds}{\mu} dz \right] \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu} \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1. Общий вид области контакта и давления в ней.

К уравнению (1.2) необходимо добавить граничные условия в точках начала $x = x_1$ и конца $x = x_2$ области контакта

$$p(x_2) = p(x_1) = \frac{dp}{dx}(x_1) = 0 \quad (1.3)$$

а также уравнение для определения $h(x)$ [3]

$$h = h_1 + \frac{x^2 - x_1^2}{R'} + \frac{4}{\pi E'} \int_{x_1}^{x_2} p(t) \ln \frac{x_2 - t}{|x - t|} dt \quad (1.4)$$

и условие равенства интеграла от давления по области контакта прижимающей нагрузке P

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = P \quad (1.5)$$

Здесь $h_1 = h(x_1)$ — толщина слоя смазки в точке выхода из области контакта; E' — приведенный модуль упругости материалов цилиндров, *Известия АН Армянской ССР, Механика, № 6*

$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{2 - \nu_2^2}{E_2} \right)$; R — приведенный радиус кривизны недеформированных цилиндров, $\frac{1}{R'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$; P — прижимающая нагрузка.

Положим, что вязкость смазки μ подчиняется закону

$$\mu = \nu(p) \exp [\Delta (T_0 - T)] \quad (1.6)$$

где $\nu(p)$ — известная функция давления p ; Δ — температурный коэффициент вязкости; T_0 — температура смазки вне области контакта, $T = T(x, z)$ — температура смазки в области контакта.

Поскольку вязкость смазки зависит от температуры, то возникает необходимость определения температуры в области контакта. Отметим, что тепловыделение в слое смазки связано в основном с наличием вязкого сдвига в направлении качения. Рассматривая теперь уравнение энергии и учитывая тот факт, что потоки тепла поперек слоя смазки значительно превосходят потоки вдоль слоя, уравнение для температуры запишем в виде [4]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (1.7)$$

С помощью выражения (1.1) приведем уравнение (1.7) к виду

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{1}{\mu} \left\{ (u_2 - u_1) \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu} + \frac{dp}{dx} \left[z - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{s ds}{\mu} \right] \int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu} \right] \right\}^2 \quad (1.8)$$

К уравнению (1.8) необходимо добавить граничные условия

$$T\left(x, -\frac{h}{2}\right) = T_{w1}(x), \quad T\left(x, \frac{h}{2}\right) = T_{w2}(x) \quad (1.9)$$

Здесь $T_{w1}(x)$ и $T_{w2}(x)$ — температура поверхностей контактирующих цилиндров; $\lambda = \lambda(p)$ — коэффициент теплопроводности смазки, зависящий лишь от давления p .

Таким образом, получена замкнутая система существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (1.2)–(1.6), (1.8) и (1.9) для определения функций $p(x)$, $h(x)$, $T(x, z)$ и постоянных x_1 и h_1 . При этом функции $T_{w1}(x)$ и $T_{w2}(x)$, а также постоянные x_1 , R' , E , P , Δ и T_0 являются заданными. Кроме того, предполагаются известными функции давления $\nu(p)$ и $\lambda(p)$.

Имея в виду использование аппарата [3], необходимо исключить температуру $T(x, z)$ из уравнения (1.2). Для этого $T(x, z)$ должна быть явно выражена через p , λ , ν и z из уравнений (1.6), (1.8) и (1.9), что связано с определенными трудностями. Однако, для ряда случаев с помощью асимптотического подхода удастся исключить из (1.2) температуру T и затем применить методы работы [3].

2. Введем безразмерные переменные

$$x' = x/b_H, \quad z' = z/h_1, \quad \rho' = \rho/\rho_0, \quad p' = p/p_H, \quad h' = h/h_1, \quad (2.1)$$

$$T' = T/T_0 - 1, \quad T_{W2}' = T_{W2}/T_0 - 1, \quad u = x/b_H, \quad c = x_1/b_H$$

где b_H и p_H — соответственно полуширина герцевской площадки и максимальное герцевское давление. Тогда уравнения (1.2)–(1.6), (1.8) и (1.9) преобразуются к виду (штрихи опущены)

$$\frac{d}{dx} \left\{ F_1(x) \frac{dp}{dx} \frac{V \cdot sl}{H_0^2} \left[\frac{h}{2} - F_2(x) \right] \right\} = \frac{V}{H_0^2} \frac{dh}{dx} \quad (2.2)$$

$$p(u) = p(c) = \frac{dp}{dx}(c) = 0 \quad (2.3)$$

$$H_0(h-1) = x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_c^x p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt \quad (2.4)$$

$$\int_c^x p(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (2.5)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{8\pi \nu e^{\delta T}}{\delta \left(\int_{-h/2}^{h/2} e^{\delta T} ds \right)^2} \left\{ 1 + \frac{12 H_0^2}{V \cdot sl} \frac{1}{\nu} \frac{dp}{dx} \left[z \int_{-h/2}^{h/2} e^{\delta T} ds - \int_{-h/2}^{h/2} s e^{\delta T} ds \right] \right\}^2 \quad (2.6)$$

$$T\left(x, -\frac{h}{2}\right) = T_{W1}(x), \quad T\left(x, \frac{h}{2}\right) = T_{W2}(x) \quad (2.7)$$

$$\nu = \nu(Q_1, p), \quad \lambda = \lambda(Q_1, p) \quad (2.8)$$

$$F_1(x) = \frac{12}{\nu} \left| \int_{-h/2}^{h/2} s e^{\delta T} ds \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z e^{\delta T} ds dz \int_{-h/2}^{h/2} e^{\delta T} ds - \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z s e^{\delta T} ds dz \right| \quad (2.9)$$

$$F_2(x) = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z e^{\delta T} ds dz \int_{-h/2}^{h/2} e^{\delta T} ds \quad (2.10)$$

при этом

$$\delta = \Delta T_0, \quad sl = 2 \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}, \quad \lambda = \frac{\nu_0 \Delta (u_2 - u_1)^2}{8 \epsilon_0} \quad (2.11)$$

$$\nu = \frac{3(u_1 + u_2) \nu_0 E^2}{4 R^2 p_H^4}, \quad H_0 = \frac{h_1 R'}{b_H}$$

Постоянные Q_1 и Q_2 в (2.8) характеризуют скорость изменения функций ν и λ с изменением p .

В дальнейшем будем рассматривать режимы, для которых $sl \neq 0$.

Исследуем задачу для температуры T в случае режимов масляного голодания и недостаточной смазки в тяжело нагруженном контакте. Будем предполагать, что для этих режимов имеет место соотношение

$$\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{v} \frac{dp}{dx} \ll 1, \quad x \in [a, c] \quad (2.12)$$

Временно будем считать $\lambda(p)$, $v(p)$, $p(x)$ и $h(x)$ известными функциями x , a , λ , δ , V , sl и H_0 — известными постоянными. При этом решение уравнений (2.6), (2.7) следует искать в виде равномерно пригодного на отрезке $[a, c]$ асимптотического представления [5].

$$T(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{v} \frac{dp}{dx} \right)^k T_k(x, z) \quad (2.13)$$

Заменив в (2.6), (2.7) $T(x, z)$ его разложением из (2.13) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{v} \frac{dp}{dx}$, получим уравнения для определения $T_k(x, z)^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} &= -8\lambda v e^{i\tau_0} \left(\int_{-h/2}^{h/2} e^{i\tau_0} ds \right)^2 \\ T_0\left(x, -\frac{h}{2}\right) &= T_{W1}(x), \quad T_0\left(x, \frac{h}{2}\right) = T_{W2}(x) \\ i \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} &= -8\lambda v e^{i\tau_0} \left(\int_{-h/2}^{h/2} e^{i\tau_0} ds \right)^2 \times \\ &\times \left\{ i\delta T_1 - 2\delta \int_{-h/2}^{h/2} T_1 e^{i\tau_0} ds \right\} \int_{-h/2}^{h/2} e^{i\tau_0} ds + \frac{24z}{sl} \int_{-h/2}^{h/2} e^{i\tau_0} ds \quad (2.15) \\ T_1\left(x, -\frac{h}{2}\right) &= T_1\left(x, \frac{h}{2}\right) = 0 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Функция $T(x, z)$ удовлетворяет нелинейному интегро-дифференциальному уравнению, в то время как все $T_k(x, z)$ ($k \geq 1$) удовлетворяют линейным уравнениям.

Предположим, что температуры поверхностей одинаковы

$$T_{W1}(x) = T_{W2}(x) = T_W(x) \quad (2.16)$$

* Указанная процедура легко обобщается на случай, когда функции $T_{k-1}(x)$ представимы в виде рядов, аналогичных (2.13).

Тогда непосредственной подстановкой легко убедиться, что

$$T_0 = T_w + \frac{1}{\delta} \ln \left\{ \left(1 + x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{2z}{h} \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}} \right) \right] \right\} \quad (2.17)$$

удовлетворяет краевой задаче (2.14).

Используя линейность краевой задачи (2.15), получим $T_1(x, z)$ в виде

$$T_1 = \\ = \frac{6h^2}{\delta sl} \int_{-1}^1 e^{\delta T_0} ds \left[\sqrt{\frac{1 + x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}}{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}}} \operatorname{th} \left(s \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}} \right) - s \right] \\ s = \frac{2z}{h} \quad (2.18)$$

Аналогичным образом могут быть построены и решены уравнения для $T_k(x, z)$ при $k \geq 2$. Однако, как будет показано ниже, для исследования в главном задачи относительно $p(x)$, H_0 и т. д. достаточно знать лишь функции $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$.

С помощью соотношений (2.17) и (2.18) удастся в аналитическом виде вычислить функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$

$$F_1(x) = \frac{3h^3 e^{\delta T_w} \left(1 + x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w} \right)}{y \left(\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}} \right)^2} \left[\sqrt{\frac{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}}{1 + x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}}} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}} - \ln \left(1 + x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\int_0^{\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}}} \ln \operatorname{ch} u du}{\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}}} \right] + O \left(\frac{H_0}{V} \frac{1}{y} \frac{dp}{dx} \right) \quad (2.19)$$

$$F_2(x) = \frac{h}{2} \frac{H_0^2}{V} \frac{3h^3 e^{\delta T_w} \left(1 + x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w} \right)}{sl y \left(\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_w}} \right)^2} \frac{dp}{dx} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{1 + 2x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}}{\sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W} \left(1 + x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}\right)}} \times \right. \\
& \times \operatorname{arsh} \left| \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}} - 1 - 2 \ln \left(1 + x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}\right) + \right. \\
& \left. \left. \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}} \right| \right. \\
& \left. + 4 \frac{\int_0^1 \ln \operatorname{ch} u du}{\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}}} \right\} + O\left(\frac{H_0^4}{V^2} \left(\frac{1}{v} \frac{dp}{dx}\right)^2\right) \quad (2.20)
\end{aligned}$$

3. Заменяя в (2.2) функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ их выражениями из (2.19) и (2.20), получим

$$\frac{d}{dx} \left[W(x) \frac{dp}{dx} \right] = \frac{V}{H_0^2} \frac{dh}{dx} \quad (3.1)$$

$$p(a) = p(c) = \frac{dp}{dx}(c) = 0 \quad (3.2)$$

$$H_0(h-1) = x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_c^x p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt \quad (3.3)$$

$$\int_a^c p(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
W(x) = & \frac{3h^3 e^{\frac{v}{\lambda} T_W} \left(1 + x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}\right)}{v \left(\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}}\right)^2} \left\{ 1 + \ln \left(1 + x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}\right) - \right. \\
& - \sqrt{\frac{1 + x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}}{x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}}} \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}} - \\
& \left. \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}} \right\} \\
& - 2 \frac{\int_0^1 \ln \operatorname{ch} u du}{\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\frac{v}{\lambda} T_W}}} \left\{ + O\left(\frac{H_0^4}{V} \frac{1}{v} \frac{dp}{dx}\right) \right\} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

где

$$\int_0^x \ln \operatorname{ch} x dz = \frac{x^2}{2} - x \ln 2 + \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} e^{-2kx} \quad (3.5)$$

При $\delta = 0$ и $x \rightarrow 0$ функция $W(x) = \frac{H^2}{\nu}$, что соответствует изотермическому случаю.

Для широкого класса задач упруго-гидродинамической теории смазки уравнение Рейнольдса приводится к виду (3.1), причем функция $W(x)$ определяется особенностями задачи. Так, например, в изотермической постановке для жидкости Ри-Эйрина при $sl = 0$ функция $W(x)$ имеет вид [6]

$$W(x) = 3 \frac{h^2}{\nu} \frac{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u}{u^2}, \quad u = H_0 z h \frac{dp}{dx} \quad (3.5')$$

Здесь $z = \frac{p_H}{GE}$, G — модуль сдвига жидкости Ри-Эйрина.

Исследуем случай тяжело нагруженного контакта, при котором давление почти во всей области контакта близко к герцевскому. Это означает, что в уравнения (3.1)–(3.5) входит малый параметр ω , связанный с параметрами V , Q_1 и Q_2 таким образом, что в области

$$x - a \gg \varepsilon_1, \quad c - x \gg \varepsilon_2 \quad \text{при} \quad \omega \ll 1 \quad (3.6)$$

имеет место неравенство

$$\frac{H_0^2}{V} \frac{d}{dx} \left[W(x) \frac{dp}{dx} \right] \ll 1 \quad \text{при} \quad \omega \ll 1 \quad (3.7)$$

Здесь ε_1 и ε_2 — характерные размеры малых окрестностей соответственно точек $x = a$ (зона входа) и $x = c$ (зона выхода), то есть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\omega) \ll 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\omega) \ll 1 \quad \text{при} \quad \omega = \omega(V, Q_1, Q_2) \ll 1$$

Область, определенную неравенствами (3.6), будем называть герцевской зоной контакта.

С помощью неравенства (3.7) из уравнений (3.1), (3.3) и (3.4) в герцевской зоне контакта получим

$$x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt = 0, \quad \int_a^c p(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$p(x) = \sqrt{(x-a)(c-x)} + \frac{1 + 2ac + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 - (a+c)x}{2V(x-a)(c-x)} \quad (3.8)$$

Предположим, что координата входа a равна

$$a = -1 + \alpha_1 \varepsilon_q, \quad \alpha_1 \sim 1 \quad \text{при} \quad \omega \ll 1 \quad (3.9)$$

Введем внутренние переменные в зонах входа и выхода

$$r = \frac{x-a}{\varepsilon_q}, \quad s = \frac{x-c}{\varepsilon_q}$$

тогда асимптотиками внешнего представления $p(x)$ в виде (3.8) соответственно будут

$$\begin{aligned} p(x) &= \varepsilon_q^{1/2} \left[1 - \frac{a_1}{2r} \right] + O(\varepsilon_q^{3/2}) \quad \text{при} \quad r = \text{fix} \\ p(x) &= \varepsilon_q^{1/2} \left[1 - 2s - \frac{\beta_1}{1-2s} \right] + O(\varepsilon_q^{3/2}) \quad \text{при} \quad s = \text{fix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для условия срачивания решений в зонах входа и выхода с внутренним представлением внешнего представления в виде (3.10) следует, что

$$\begin{aligned} p(x) &= O(\varepsilon_q^{1/2}), \quad \frac{dp}{dx} = O(\varepsilon_q^{-1/2}) \quad \text{при} \quad r = \text{fix} \\ p(x) &= O(\varepsilon_q^{1/2}), \quad \frac{dp}{dx} = O(\varepsilon_q^{-1/2}) \quad \text{при} \quad s = \text{fix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Поэтому решение задачи (3.1)–(3.4) при условиях (3.6) и (3.7) в зонах входа и выхода будем искать в виде

$$\begin{aligned} p(x) &= \varepsilon_q^{1/2} q(r) + o(\varepsilon_q^{1/2}), \quad q(r) \sim 1 \quad \text{при} \quad r \sim 1 \\ p(x) &= \varepsilon_q^{1/2} g(s) + o(\varepsilon_q^{1/2}), \quad g(s) \sim 1 \quad \text{при} \quad s \sim 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Неизвестные постоянные, входящие в уравнения (3.1) и (3.4), будем искать в виде

$$H_0 = H_{00}(\omega) + o(H_{00}), \quad H_{00} \ll 1; \quad c = 1 + \varepsilon_q^2 \beta_1 + o(\varepsilon_q^2), \quad \beta_1 \sim 1 \quad (3.13)$$

Ниже исследуются лишь те режимы смазывания, при которых с каждой из сторон герцевской зоны находится по одной зоне неоднородности [5]. Это требование накладывает определенные ограничения на размеры зон входа и выхода ε_q и ε_s сверху. Конкретный вид этих ограничений зависит от функции $W(x)$. Например, для функций $W(x)$, определяемых

$$(3.5), (3.5'') \text{ или } W(x) = \frac{h^2}{x} \quad \text{при} \quad \lambda(Q, p) = 1, \quad \gamma = e^{O(p^m)} \quad (m > 0) \text{ и } \omega = Q^{-1} \ll 1$$

будем иметь ограничения в виде

$$\varepsilon_q^2 \ll H_{00}, \quad \varepsilon_q \ll \varepsilon_{q0} = Q^{-2m} \quad (3.14)$$

В случае $\omega = V \ll 1$ первое из ограничений (3.14) остается без изменения, и второе при $Q \sim V^{-m}$ принимает вид [7]

$$\varepsilon_q \ll \varepsilon_{q0} = V^{2m} \quad (3.15)$$

Отвлечемся на некоторое время от конкретного вида функции $W(x)$. Рассмотрим более общую функцию $W(x)$ по сравнению с (3.5) и (3.5'), а именно, предположим, что в зонах входа и выхода

$$W(x) = \nu_n \varepsilon_{(q)}^k H_{00}^\varepsilon W_0\left(\frac{r}{s}\right) + \dots, \quad W_0\left(\frac{r}{s}\right) \sim 1 \quad \text{при} \quad \left|\frac{r}{s}\right| \sim 1 \quad (3.16)$$

а в герцевской зоне выполняется неравенство (3.7). Из (3.16) в частном случае $n=k=1=0$ может быть получено выражение $W(x)$ для неизотермической задачи.

Исследуя уравнения (3.1) и (3.3) в зонах входа и выхода с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений, получим

$$\varepsilon_q \sim \varepsilon_s, \quad \nu \ll 1 \quad (3.17)$$

При этом были использованы представления (3.9), (3.12), (3.13) и условие (3.14).

С помощью соотношений (3.8), (3.12) и (3.13) из уравнения (3.3) в зонах входа и выхода легко получить асимптотические представления для

$$\frac{dh}{dx} \quad \text{при} \quad \nu \ll 1$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &\sim \frac{\varepsilon^{1/2}}{H_{00}} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{q(t) - \sqrt{2t}}{t-r} dt + o\left(\frac{\varepsilon^{1/2}}{H_{00}}\right), \quad r \sim 1 \\ \frac{dh}{dx} &= \frac{\varepsilon^{1/2}}{H_{00}} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{g(t) - \sqrt{-2t}}{t-s} dt + o\left(\frac{\varepsilon^{1/2}}{H_{00}}\right), \quad s \sim 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь для краткости принято $\varepsilon \sim \varepsilon_q \sim \varepsilon_s$. Далее с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений, используя соотношения (3.12) — (3.18), из уравнений (3.1), (3.2) и (3.4) получим в зонах входа и выхода систему уравнений для определения функций $q(r)$ и $g(s)$, а также постоянных A и β_1 .

$$\frac{A^{1+\nu}}{2} \frac{d}{dr} \left[W_0(q) \frac{dq}{dr} \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{q(t) - \sqrt{2t}}{t-r} dt, \quad q(0) = 0 \quad (3.19)$$

$$\int_0^\infty \left[q(t) - \sqrt{2t} - \frac{z_1}{1-2t} \right] dt = 0$$

$$\frac{A^{1+\nu}}{2} \frac{d}{ds} \left[W_0(g) \frac{dg}{ds} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{g(t) - \sqrt{-2t}}{t-s} dt, \quad g(0) = 0 \quad (3.20)$$

$$\int_{-\infty}^0 \left[g(t) - \sqrt{-2t} + \frac{p_1}{\sqrt{-2t}} \right] dt = 0$$

Здесь интегральные условия для $q(r)$ и $g(s)$ получены из рассмотренных уравнений (3.31) и (3.8) в зонах входа и выхода с привлечением условия (3.4) и условий сращивания с (3.10). Кроме этого использовались равенства (3.9), (3.12), (3.13) и (3.14).

К уравнениям (3.19), (3.20) необходимо добавить в качестве недостающих граничных условий асимптотические соотношения, вытекающие из условий сращивания (3.10)

$$q(r) \rightarrow \sqrt{2r} + \frac{p_1}{\sqrt{2r}} \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

$$g(s) \rightarrow \sqrt{-2s} - \frac{p_1}{\sqrt{-2s}} \quad \text{при } s \rightarrow -\infty \quad (3.22)$$

Замена условия $\frac{dg}{ds}(0) = 0$ на условие (3.22) правомерна, так как система уравнений (3.19) — (3.21) с условием $\frac{dg}{ds}(0) = 0$ и система (3.19) — (3.22) эквивалентны, если решение первой из них существует и единственно, а решение второй системы единственно.

При асимптотическом анализе уравнений задачи для постоянной H_m , кроме того, получаем оценку

$$H_{00} = A (V_m^{-n} \varepsilon^{2-k})^{\frac{1}{1+3}}, \quad A = A(x_1, \varepsilon, sl, z, m, \dots) \sim 1 \quad (3.23)$$

Из первого неравенства (3.14) и (3.23) следует $\varepsilon \sim (V_m^{-n})^{\frac{2}{1+3}}$. Это соотношение совместно с (3.16) определяет область применимости изложенного метода. Примерами этих областей являются (3.14) и (3.15).

Отметим, что при $\varepsilon^{3/2} \ll H_{00}$ с точностью до $\frac{\varepsilon^{3/2}}{H_{00}}$ функция зазора $h(x) = 1$ при $x \in [a, c]$, а поэтому функция $W_0(\dots)$ не зависит от h . Следовательно, при $\varepsilon^{3/2} \ll H_{00}$ уравнения (3.19) — (3.22) замкнуты. В этом случае система уравнений (3.19) — (3.22) расщепляется таким образом, что коэффициент A в (3.23) определяется только давлением $q(r)$ в зоне входа, а затем уже определяются давление $g(s)$ и постоянная p_1 .

В случае, когда $\varepsilon^{3/2} \sim H_{00}$ при $\varepsilon \ll 1$, функция зазора $h(x)$ на отрезке $[a, c]$ меняется, вообще говоря, на свою величину. Поэтому для замыкания системы уравнений (3.19) — (3.22) необходимо к ней добавить уравнение для $h(x)$, так как в этом случае функция W_0 зависит от h .

Отметим, что можно получить иную систему уравнений для $q(r)$ и $g(s)$ в зонах входа и выхода

$$q(r) = 1 - 2r \left\{ 1 - \frac{A^{1-\beta}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\frac{d}{dt} \left[W_0(q) \frac{dq}{dt} \right] dt}{1 - 2t(t-r)} \right\}$$

$$A^{1-\beta} = \frac{\pi z_1}{\int_0^\infty \frac{\frac{d}{dt} \left[W_0(q) \frac{dq}{dt} \right] dt}{1 - 2t}} \quad (3.24)$$

$$g(s) = 1 - 2s \left\{ 1 - \frac{A^{1-\beta}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\frac{d}{dt} \left[W_0(g) \frac{dg}{dt} \right] dt}{1 - 2t(t-s)} \right\}$$

$$q_1 = \frac{A^{1-\beta}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\frac{d}{dt} \left[W_0(g) \frac{dg}{dt} \right] dt}{1 - 2t}$$

эквивалентную системе уравнений (3.19)–(3.22). Для этого достаточно представить исходные уравнения (3.1)–(3.4) в виде, точно решенном относительно давления $p(x)$, входящего в уравнение (3.3). Дальнейшее исследование полученных таким путем уравнений производится методом, существенно отличающимся от изложенного выше.

4. Вернемся к изотермической задаче для ньютоновской смазки и условиях тяжело нагруженного контакта. В этом случае $H_0 = A(V\varepsilon)^{1/2}$. Отсюда с помощью (3.8) и (3.12) можно убедиться в справедливости неравенств (2.12) и (3.7) для режима масляного голодания.

Для определенности предположим, что $\lambda(Q, p) = 1$ и $\gamma = \varepsilon^{Q, p^m}$. Кроме того, будем считать, что малый параметр $\varepsilon = \varepsilon(V, Q)$ обеспечивает выполнение одного из соотношений

$$\varepsilon_Q \ll Q^{-2/m}, \quad \begin{cases} Q \ll V^{-m/5} \\ \varepsilon_Q \ll V^{2/5} \end{cases} \quad (4.1)$$

Рассмотрим случай, когда

$$T_F(-1 + \varepsilon r) = T_{F0} + O(\varepsilon^2), \quad T_F(1 - \varepsilon s) = T_{F0} + O(\varepsilon^2)$$

$$T_{W0} = \text{const}, \quad \varepsilon > 0$$

Тогда решение системы уравнений (3.19)–(3.21) при $\lambda = k = l = 0$ (ньютоновская жидкость) выражается через соответствующее решение системы

уравнений для изотермического случая. При этом $W_0(q) = W_0(p) = \gamma^{-1} = \text{const}$ и $A = A_{iso}$, где A_{iso} — один из компонентов решения изотермической задачи. Учитывая, что при условии (4.1) решение уравнений (3.19)–(3.21) при произвольном $z_1 < 0$ имеет вид

$$q(r) = |z_1|^{1/2} q_0\left(\frac{r}{|z_1|}\right), \quad g(s) = |z_1|^{1/2} g_0\left(\frac{s}{|z_1|}\right) \\ A(z_1) = A_0 |z_1|^{\beta_0}, \quad \beta_0 = \beta_0 |z_1| \quad (4.2)$$

формула для толщины слоя смазки в точке $x = s$ принимает особенно простой вид^{*}

$$h_1 = A_0 |z_1|^{-3} (V z_1^2)^{1/3} \frac{h_0^2}{R}, \quad A_0 = 1.2613 \quad (4.3)$$

Функции $q_0(r)$, $g_0(s)$ и постоянные A_0 и β_0 являются решением изотермической задачи при $z_1 = -1$.

Рассмотрим режим обильной смазки для ньютоновской жидкости в случае, когда $\epsilon = V \ll 1$ и $Q \ll V^{-1/3}$; при этом $z = V^{-1/3}$. Перейдем в формуле (3.23) формально к пределу $z \rightarrow V^{-1/3}$ при $n = k = l = 0$, тогда получим, что $H_m \sim V^{-1/3}$. Для величины $\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{\nu} \frac{dp}{dx}$, входящей в левую часть неравенства (2.12), получим в зонах входа и выхода оценку

$$\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{\nu} \frac{dp}{dx} \sim \frac{H_0^2}{V} z^{-1/3} \sim 1 \quad (4.4)$$

Таким образом, в случае обильной смазки использованный метод построения решения для температуры $T(x, z)$ неприменим. Это связано с тем, что в зонах входа и выхода тепловыделение, вызываемое относительным проскальзыванием поверхностей, становится соизмеримым с тепловыделением, вызываемым сопротивлением качению. Поэтому исключить из рассмотрения температуру T оказывается невозможным.

Изложим метод решения системы уравнений (2.2)–(2.10) при $\lambda = 1$, позволяющий в данном случае также получить асимптотически справедливые уравнения в зонах входа и выхода.

Отметим, что в герцевской зоне $\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{\nu} \frac{dp}{dx} \sim V^{1/3} \ll 1$, поэтому, как и ранее, в этой зоне оказывается возможным исключить из рассмотрения температуру $T(x, z)$ и свести задачу к уравнениям (3.1)–(3.5). Поэтому с помощью (3.6) и (3.7) из уравнений (3.1), (3.3) и (3.4) получим глав-

* В случае, когда значения показателей степеней n , k и l отличны от нуля, в соотношениях (4.2) изменится лишь равенство для $A(z_1)$, то есть $A(z_1) = A_0 |z_1|^{\frac{2}{l-3}}$. Соответственно изменится и формула (4.3) для h_1 .

Этот член асимптотики давления в герцевской зоне в виде (3.8). Отсюда вытекает справедливость формулы (3.10), (3.11). Поэтому решение задачи (2.2)–(2.10) в зонах входа и выхода для $p(x)$, H_0 и ε будем искать в виде (3.12) и (3.13), а для $T(x, z)$ — соответственно

$$\begin{aligned} T(x, z) &= T_1(r, z) + o(1), \quad T_1(r, z) \sim 1 \quad \text{при } r \sim 1 \\ T(x, z) &= T_0(s, z) + o(1), \quad T_0(s, z) \sim 1 \quad \text{при } s \sim 1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

При этом можно показать, что $z_g = z_e = V^{2\delta}$ и в зонах входа и выхода справедливы оценки

$$F_k(x) = F_{k0}\left(\frac{r}{s}\right) + o(1), \quad F_{k0}\left(\frac{r}{s}\right) \sim 1 \quad \text{при } \left|\frac{r}{s}\right| \sim 1, \quad k = 1, 2 \quad (4.6)$$

Применяя изложенную выше методику сращиваемых асимптотических разложений, с помощью соотношений (3.12), (3.13), (4.5) и (3.18) в зонах входа и выхода получим связанную систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{A^2}{2} \frac{d}{dr} \left[F_{10}(r) \frac{dq}{dr} + \frac{sl}{A^2} \left[\frac{h_g(r)}{2} - F_{20}(r) \right] \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{q(t) - V\sqrt{2t}}{t-r} dt \quad (4.7)$$

$$q(0) = 0, \quad q(r) \rightarrow \frac{1}{2r} + \frac{q_1}{V\sqrt{2r}}, \quad \int_0^\infty \left[q(t) - V\sqrt{2t} - \frac{q_1}{V\sqrt{2t}} \right] dt = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{h_0^2 T_1}{2A^2} &= - \frac{8\pi e^{\tau q^\infty - \frac{1}{2} T_1}}{\lambda_0^{3/2} \left(\int_{-h_0/2}^{\tau q^\infty - \frac{1}{2} T_1} e^{\frac{1}{2} T_1} ds \right)^2} \left\{ 1 + \frac{12 A^2}{sl} e^{-\tau q^\infty} \frac{dq}{dr} \left[z \int_{-h_0/2}^{h_0/2} e^{\frac{1}{2} T_1} ds - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{-h_0/2}^{h_0/2} sl^{\frac{1}{2} T_1} ds \right] \right\}^2 \end{aligned}$$

$$T_1\left(r, -\frac{h_0}{2}\right) = T_{21}(r), \quad T_1\left(r, \frac{h_0}{2}\right) = T_{22}(r)$$

$$\frac{A^2}{2} \frac{d}{ds} \left[F_{10}(s) \frac{dg}{ds} + \frac{sl}{A^2} \left[\frac{h_g(s)}{2} - F_{20}(s) \right] \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{g(t) - V\sqrt{-2t}}{t-s} dt$$

$$g(0) = 0, \quad g(s) \rightarrow V\sqrt{-2s} - \frac{g_1}{V\sqrt{-2s}}$$

$$\int_{-\infty}^0 \left[g(t) - V\sqrt{-2t} + \frac{\beta_1}{V\sqrt{-2t}} \right] dt = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} = - \frac{8\gamma e^{\gamma g^m + \gamma T_0}}{h_g^2} \left\{ 1 + \frac{12A^2}{sl} e^{-\gamma g^m} \frac{dg}{ds} \right\} z \int_{-h_g/2}^{h_g/2} e^{\gamma T_0} ds -$$

$$- \int_{-h_g/2}^{h_g/2} s e^{\gamma T_0} ds \Bigg\}^2$$

$$T_0\left(s, -\frac{h_g}{2}\right) = T_{W1}(s), \quad T_0\left(s, \frac{h_g}{2}\right) = T_{W2}(s)$$

$$\gamma = \begin{cases} 0, & Q, V^{m/5} \ll 1 \\ \gamma_0, & Q, V^{m/5} \sim 1 \end{cases} \quad \gamma_0 \sim 1 \text{ при } V \ll 1$$

Для того, чтобы система уравнений (4.7) стала замкнутой, к ней необходимо добавить уравнения для определения зазора $h_g(r)$ в зоне входа и $h_g(s)$ в зоне выхода

$$A[h_g(r) - 1] = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[q(t) - V\sqrt{-2t} + \frac{\beta_1}{V\sqrt{-2t}} \right] \ln t dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\infty} \left[q(t) - V\sqrt{2t} - \frac{\beta_1}{V\sqrt{2t}} \right] \ln |r-t| dt \right\}$$

$$A[h_g(s) - 1] = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 \left[g(t) - V\sqrt{-2t} + \frac{\beta_1}{V\sqrt{-2t}} \right] \ln \left| \frac{t}{s-t} \right| dt \quad (4.8)$$

Кроме того, в процессе вывода уравнений (4.7) и (4.8) из сравнения порядка членов получим оценку

$$H_{00} = AV^{1/5}, \quad A = A(z_1, \beta, sl, z, m) \sim 1 \quad (4.9)$$

Таким образом, как в случае масляного голодания, так и в случае обильной смазки удастся достаточно подробно исследовать зоны входа и выхода.

Формулы (3.23), (4.3) и (4.9) для толщины слоя смазки по структуре полностью совпадают с соответствующими формулами для изотермического процесса смазывания [7] и отличаются лишь постоянными A .

Остановимся на формулах для касательных напряжений

$$\tau = -\frac{H_0(u_1 - u_2)}{2h_1} = -\tau \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\nu}{\int_{-h/2}^{h/2} e^{-\tau} ds} \left\{ \tau l + \right. \\ \left. + \frac{12 H_0^2}{V} \frac{1}{\nu} \frac{dp}{dx} \left[z \int_{-h/2}^{h/2} e^{-\tau} ds - \int_{-h/2}^{h/2} s e^{-\tau} ds \right] \right\} \quad (4.10)$$

Оценим разность касательных напряжений, возникающих на трущихся поверхностях. Тогда из (4.10) получим

$$\tau \left(x, \frac{h}{2} \right) - \tau \left(x, -\frac{h}{2} \right) = 12 h \frac{H_0^2}{V} \frac{dp}{dx} \quad (4.11)$$

Поэтому в условиях масляного голодания, как это следует из (2.12), в качестве касательного напряжения на обеих поверхностях с ошибкой порядка

$\frac{H_0^2}{V} \ll 1$ можно принять

$$\tau = \frac{\nu s l}{\int_{-h/2}^{h/2} e^{-\tau} ds} = h \frac{e^{-\tau W} \operatorname{arsh} \left| \frac{x - \frac{\nu}{\lambda} e^{-\tau W}}{h \left(1 + z \frac{\nu}{\lambda} e^{-\tau W} \right)} \right|}{\frac{1 + z \frac{\nu}{\lambda} e^{-\tau W}}{x - \frac{\nu}{\lambda} e^{-\tau W}}} \quad (4.12)$$

Эта формула при $\lambda = 1$ и $\nu = e$ совпадает с формулой, полученной в работе [2].

Для рассмотренного выше режима обильной смазки формула (4.12) справедлива лишь в герцевской зоне, а в зонах входа и выхода касательное напряжение τ необходимо вычислять по формуле (4.10), где температура и давление определяются из решения системы (4.7), (4.8): это непосредственно вытекает из (4.4). Тем не менее, приняв $1 \ll Q = Q(V) \ll V^{-0.3}$, с малой ошибкой силу трения можно вычислять по формуле (4.12) как для режима масляного голодания, так и для режима обильной смазки. При этом в (4.12) следует положить $h = 1$, $p = \sqrt{1 - x^2}$.

В случае, когда в герцевской зоне функция ν остается ограниченной,

расчет силы трения $F_{1p} = \int_{x_1}^{x_2} \tau dx$ необходимо производить по формуле (4.10).

В заключение отметим, что изложенный метод без существенных изменений может быть применен к контактно-гидродинамическим задачам для

толстой полосы при различных зависимостях вязкости от давления и температуры, например,

$$\eta = \eta_0 \nu(p) [1 + \alpha(T - T_0)]$$

$$\nu(p) = \begin{cases} \exp\left(\frac{\alpha_1 p^m}{1 + \alpha_2 p^k}\right), & p \leq p_0 \\ \exp\left(\frac{\alpha_1 p^m}{1 + \alpha_2 p^k}\right), & p > p_0 \end{cases}$$

При других зависимостях вязкости от температуры в результате асимптотического анализа может быть получена система уравнений, в определенном смысле аналогичная системе (4.7), (4.8).

5. Проиллюстрируем полученные результаты на примере численного решения системы уравнений (3.19)–(3.22) при $l = 0$ и $W_1(x)$, вычисляемого с помощью (3.5) и (3.12). В силу справедливости неравенства $z^{-2} \leq E_1$ для режимов масляного голодания в (3.5) полагалось $h = 1$. Вычисления производились с помощью разностной схемы, аналогичной [3]; при этом ошибка не превышала 2%. Расчеты были проведены для $\eta = 1$ и $\eta = 0$ при $m = 1$ и различных значениях α_1 , m , α и T_{W0} (см. формулы (4.2)). Значения $A(\alpha_1, m, \alpha, T_{W0})$ приведены в табл. 1. Для сравнения в этой же табл. 1 приведены значения коэффициентов $A_{iso}(\alpha_1, m, \alpha)$, соответствующие изотермической постановке задачи при температуре сдвига $T = T_0 = T_{W0} = 0$ и $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ и $m = 1$.

Таблица 1

α_1	α	T_{W0}	η	A_{iso}	A
			0	1.9789	1.9613
-2	0.008	0	1	1.8919	1.8849
-5	0.008	0	0	3.7648	3.7149
			1	3.5843	3.5792
-5	0.5	0	0	3.7648	3.4015
			1	3.5843	3.2817
-5	0.5	1	0	3.7648	2.5684
			1	3.5843	2.4857
-5	0.5	2	0	3.7648	1.8831
			1	3.5843	1.8186

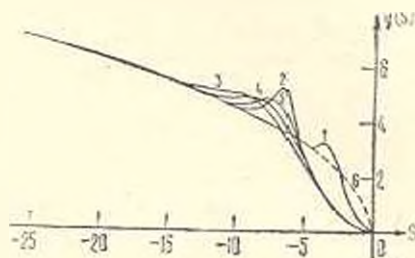
Из табл. 1 видно, что при $T_{W0} = 0$ неизотермическое поведение смазки слабо сказывается на величине A , а, следовательно, и на толщине слоя смазки h_1 , в то время как при $T_{W0} = 1$ и $T_{W0} = 2$ имеет место существенное уменьшение h_1 по сравнению с полученным в изотермической постановке задачи. Кроме того, из табл. 1 следует, что для приближенного вычисления h_1 в условиях масляного голодания можно пользоваться формулой (4.3) при $\varepsilon = Q^{-2m}$

$$h_1 = 1.2615 \gamma |\alpha_1|^{2/3} (VQ^{-2m})^{1/3} \frac{b_N^2}{R} \quad (5.1)$$

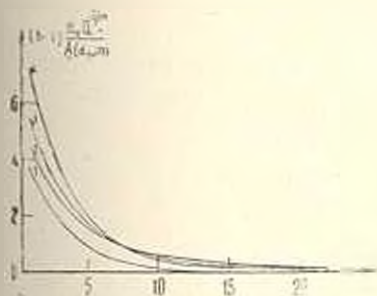
На фиг. 2 приведены кривые $g(s)$ для некоторых значений α , χ и $\delta T_{\text{вх}}$ при $\eta = 1$ и $m = 1$. Отметим, что эпюры $g(s)$ при $\chi = 0.008$ практически совпадают с соответствующими эпюрами, полученными из решения изотермической задачи. С увеличением $|\alpha|$ локальный максимум (пик)

Фиг. 2. Распределение давления в зоне выхода при $m = 1$ и $\eta = Q^{-1}$.

1. $\alpha_1 = -2$, $\chi = 0.008$, $\delta T_{\text{вх}} = 0$;
2. $\alpha_1 = -5$, $\chi = 0.008$, $\delta T_{\text{вх}} = 0$;
3. $\alpha_1 = -5$, $\chi = 0.5$, $\delta T_{\text{вх}} = 0$;
4. $\alpha_1 = -5$, $\chi = 0.5$, $\delta T_{\text{вх}} = 1$;
5. $\alpha_1 = -5$, $\chi = 0.5$, $\delta T_{\text{вх}} = 2$;
- 6 по Герцу $h(-s)|_{s=0} = 2\alpha$.

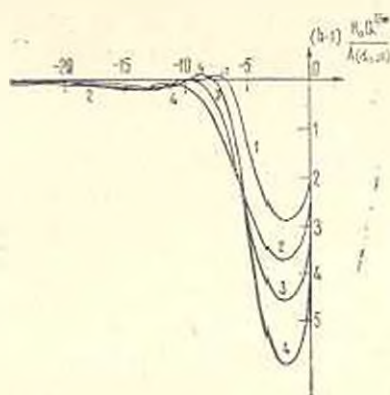


$g(s)$ смещается к центру площадки контакта и увеличивается по величине. При увеличении χ пик $g(s)$ уменьшается и также смещается к центру области контакта; при этом наблюдается более медленный выход на герцевское решение. С увеличением $\delta T_{\text{вх}}$ пик $g(s)$ незначительно смещается в сторону выхода из области контакта. Давление в зоне входа является мо-



Фиг. 3. Профиль зазора между цилиндрами в зоне входа при $m = 1$, $\eta = Q^{-1}$ и $\alpha_1 = -5$.

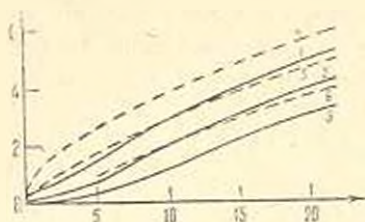
1. $\chi = 0.008$, $\delta T_{\text{вх}} = 0$;
2. $\chi = 0.5$, $\delta T_{\text{вх}} = 0$;
3. $\chi = 0.5$, $\delta T_{\text{вх}} = 1$;
4. $\chi = 0.5$, $\delta T_{\text{вх}} = 2$.



Фиг. 4. Профиль зазора между цилиндрами в зоне выхода при $m = 1$, $\eta = Q^{-1}$ и $\alpha_1 = -5$.

1. $\chi = 0.008$, $\delta T_{\text{вх}} = 0$;
2. $\chi = 0.5$, $\delta T_{\text{вх}} = 0$;
3. $\chi = 0.5$, $\delta T_{\text{вх}} = 1$;
4. $\chi = 0.5$, $\delta T_{\text{вх}} = 2$.

нонно возрастающей функцией. При этом в окрестности, примыкающей к α , оно несколько выше, а в области больших давлений несколько ниже давления, полученного в изотермической постановке. Поведение зазора $h(x)$ такое же, как и изотермической постановке, однако значения $h(x)$ могут существенно отличаться от полученных в изотермической постановке (фиг. 3, 4). Это отличие в основном связано с поведением величины A при изменении χ и $\delta T_{\text{вх}}$.



Фиг. 5. Профиль температуры $T(x, 0)$ в зоне входа при $m=1$; $\tau = Q^{-2}$, $\alpha_1 = -5$ и $\alpha_2 = 0.5$.

1. $T|_{x=0} = 0$; 2. $\partial T/\partial x|_{x=0} = 1$; 3. $\partial^2 T/\partial x^2|_{x=0} = 2$; температура, вычисленная по Герцу;
4. $T|_{x=0} = 0$; 5. $\partial T/\partial x|_{x=0} = 1$; 6. $\partial^2 T/\partial x^2|_{x=0} = 2$.



Фиг. 6. Профиль температуры $T(x, 0)$ в зоне выхода при $m=1$; $\tau = Q^{-2}$, $\alpha_1 = -5$ и $\alpha_2 = 0.5$.

1. $T|_{x=0} = 0$; 2. $\partial T/\partial x|_{x=0} = 1$; 3. $\partial^2 T/\partial x^2|_{x=0} = 2$; температура $T(x, 0)$, вычисленная по Герцу; 4. $T|_{x=0} = 0$; 5. $\partial T/\partial x|_{x=0} = 1$; 6. $\partial^2 T/\partial x^2|_{x=0} = 2$.

На фиг. 5 и 6 изображены графики функций $T(x, 0)$ соответственно в зоне входа и выхода, характер которых, как следует из (2.17), определяется поведением давления.

Всесоюзный научно-исследовательский
конструкторско-технологический институт
подшипниковой промышленности

Поступила 23 VIII 1972

Ն. Ի. ԿՈՒՆԻՆ

ՀԱՐԹ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱԶԵՐՈՐ ԱՌԱՋԱՆՈՒԹՅՈՒՆԱՐԿ ԽՆԴՐԻ ԱՌԻՄՊՏՈՏԱԿԱՆ ՎԵՐՆՈՒԾՈՒՄԸ ՄԱՆՐ ԲՆՈՆԱՎՈՐՎԱԾ ՃՈՃՄԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՀԱՄԱՐ

Ա. Վ. Ի. ՈՒՆԻՆ

Ասիմպտոտական վերլուծությունների միակցման մեթոդով ուսումնասիրվել է հարթ անհավասարաչերմ խնդիրը նյութոսեյան հեղուկի համար ծանր քնոնավորված ճնշման կոնտակտի դեպքում:

Յուղային բաղադրի, անբավարար և լիառատ յուղման ուժիմունների համար տաքվել են ասիմպտոտական դնահատականների յուղման շերտի հաստության համար, Յուղային բաղադրի դեպքի համար ստացվել են և թվային եղանակներով լուծվել են ասիմպտոտիկ ճնշման գլխավոր անդամների համար հավասարումները խնդրի պարամետրների տարբեր արժեքների դեպքում: Ցույց է տրվում, որ յուղման շերտի հաստությունը որոշվում է ինչպես մուտքի, այնպես էլ ելքի դռաներով:

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF A PLANE NONISOTHERMAL ELASTO-HYDRODYNAMIC PROBLEM FOR A HEAVY-LOADED ROLLING CONTACT

I. I. KUDISH

Summary

A plane nonisothermal elasto-hydrodynamic problem for Newtonian liquid is studied by the method of matched asymptotic expansions in case of a heavy-loaded contact. Asymptotic estimations for the lubricant film thickness were obtained for starved and fully flooded conditions. In case of starved conditions the equations for major members of pressure asymptotics were derived and numerically solved for various values of the problem parameters.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ченг, Штернлиат. Численное решение для давления, температуры и толщины смазочной пленки между двумя бесконечно длинными катящимися и скользящими цилиндрами при больших нагрузках. Теоретические основы инженерных расчетов, 1965, № 3, изд. «Мир».
2. Канис, Уоллуит. Упрощенный анализ сил трения при упруго-гидродинамическом контакте в условиях качения со скольжением. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Проблемы трения и смазки, 1971, т. 93, № 1.
3. Кудиш И. И. Упруго-гидродинамическая задача для тяжело нагруженного контакта качения. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1978, т. XXXI, № 1.
4. Кодиш Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М., изд. «Машиностроение», 1976.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., изд. «Мир», 1967.
6. Кудиш И. И. Определение толщины слоя смазки в условиях масляного голодания для линейного контакта. «Труды института», № 1 (91). М., Специформцентр ВНИИП, 1977.
7. Кудиш И. И. Асимптотическое решение плоской изотермической контактно-гидродинамической задачи. Тезисы докладов Всесоюзной научной конференции «Смешанные задачи механики деформируемого тела», ч. I, Ростов-на-Дону, 1977.