

С. М. МХИТАРЯН, Ф. С. ТОРОСЯН

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КРУГОВОГО ДИСКА И БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ ТОНКИМ КОЛЬЦЕВЫМ ПОКРЫТИЕМ

Контактные задачи о вдавливании кругового упругого диска в бесконечную плоскость с круговым отверстием близких радиусов, когда контакт осуществляется через их контуры, ввиду их важного прикладного значения стали предметом исследования многих авторов [1—6]. Характерной особенностью постановки этого класса задач является то, что к ним не применимы классические гипотезы Герца. Последнее вносит определенные коррективы в структуру разрешающего интегрального уравнения, усложняя ее, и в конечном итоге приводит к некоторым трудностям при построении его адекватного решения.

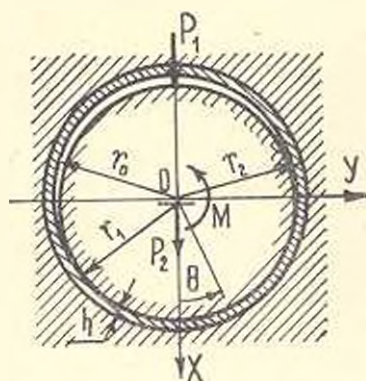
В настоящей работе рассматривается контактная задача о давлении кругового упругого диска на контур бесконечной пластины с круговым отверстием, когда ее граница усилена тонкостенным элементом в виде приваренного или приклеенного к ней кольцевого упругого покрытия. Усиливающее тонкое покрытие трактуется в рамках теории тонких цилиндрических оболочек, основанной на известных гипотезах Кирхгофа-Лява, не учитывающих поперечное обжатие материала. Определение законов распределения контактных напряжений под диском сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. При помощи известного аппарата ортогональных многочленов Якоби это уравнение сводится к эквивалентной квазивполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений. Получены числовые результаты. В определенной мере выяснен эффект подкрепляющего тонкого кольца.

Обсуждаемая здесь задача в известном смысле представляет аналог задачи из [2], встречающейся в вопросах трения и износа.

§ 1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Пусть в круговой вырез радиуса r_2 упругой бесконечной пластины, усиленный тонким кольцевым покрытием малой толщины h , вставлен диск радиуса r_1 . Диск прижимается к пластине силами P_1, P_2 и скручивается моментом M (фиг. 1). Считается, что механическое поведение этих тел описывается уравнениями теории плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния. Разность $\varepsilon = r_2 - h - r_1$ предполагается величиной порядка упругих перемещений. Требуется определить законы распределения контактных напряжений под диском и размеры области контакта.

В качестве физической модели усиливающего покрытия принимается, как уже говорилось, геометрическая гипотеза Кирхгофа-Лява теории тонких оболочек [7].

Обозначим через $q_1(\theta)$ и $\tau_1(\theta)$ соответственно нормальные и тангенциальные контактные напряжения под диском, а через $q_2(\theta)$ и $\tau_2(\theta)$ — контактные напряжения, действующие на границе бесконечной пластины, то есть на линии соединения усиливающего кольца с основанием. Участком контакта



Фиг. 1.

под диском пусть будет $[-\theta_1, \theta_2]$. Далее, через $v_r^{(1)}, v_\theta^{(1)}$ и $v_r^{(2)}, v_\theta^{(2)}$ обозначим соответственно радиальные и тангенциальные компоненты упругих перемещений граничных точек диска и бесконечной пластины от внешних и указанных нагрузок. Через v_r^+, v_θ^+ и v_r^-, v_θ^- обозначим компоненты перемещения граничных точек усиливающего кольца, где индексы „+“ и „-“ соответствуют точкам, находящимся на окружностях с радиусами r_2 и $r_0 = r_2 - h$.

Теперь перейдем к выводу основных разрешающих уравнений поставленной задачи.

На линии соединения усиливающего кольца с основанием можем записать условия

$$v_r^+ = v_r^{(2)}, \quad v_\theta^+ = v_\theta^{(2)} \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

Но поскольку толщина h усиливающего кольца предполагается малой ($h/r_2 \leq 1/20$ [7]), то пренебрегая его поперечной деформацией и принимая $v_\theta^+ \approx v_\theta^-$, будем иметь

$$v_r^+ \approx v_r^{(2)}, \quad v_\theta^+ \approx v_\theta^{(2)} \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

Учитывая эти соотношения и предполагая, что во всей зоне контакта действуют только силы сцепления, легко показать, что там должны выполняться следующие условия [1, 2]:

$$\begin{aligned} -v_r^{(1)} + v_r^{(2)} &= \delta \cos \theta - r_1 \psi \sin \theta - \varepsilon (1 - \cos \theta) \\ v_\theta^{(1)} - v_\theta^{(2)} &= \delta \sin \theta - 2r_1 \psi \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (-\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \quad (1.1)$$

Здесь δ — жесткое смещение диска в направлении оси OX , а ψ — угол поворота диска относительно первоначальной точки касания, возникающего из-за наличия скручивающего момента M , вследствие чего область контакта становится несимметричной относительно указанной точки.

Далее, на основании известного комплексного представления плоской задачи теории упругости [8] легко получить, что компоненты перемещений $v_r^{(1)}, v_\theta^{(1)}, v_r^{(2)}$ и $v_\theta^{(2)}$ выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
v_r^{(1)} &= \frac{(x_1 + 1) r_1}{4\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi) \ln 2 \left| \sin \frac{\theta - \xi}{2} \right| d\xi + \\
&+ \frac{(x_1 - 1) r_1}{8\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) \operatorname{sign}(\theta - \xi) d\xi - \int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi) K^{(1)}(\theta - \xi) d\xi + \\
&+ \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) K^{(2)}(\theta - \xi) d\xi + \frac{r_1}{2\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi) \cos(\theta - \xi) d\xi + f_1(\theta) \\
v_\theta^{(1)} &= \frac{(x_1 + 1) r_1}{4\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) \ln 2 \left| \sin \frac{\theta - \xi}{2} \right| d\xi - \\
&- \frac{(x_1 - 1) r_1}{8\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi) \operatorname{sign}(\theta - \xi) d\xi - \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) K^{(1)}(\theta - \xi) d\xi - \\
&- \int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi) K^{(2)}(\theta - \xi) d\xi - \frac{r_1}{2\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) \cos(\theta - \xi) d\xi + f_2(\theta) \quad (1.2) \\
&(-\pi < \theta \leq \pi)
\end{aligned}$$

$$2\mu_2(v_r^{(2)} + iv_\theta^{(2)}) = -\nu_2 r_2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\bar{B}_k}{k-1} e^{-ik\theta} - r_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{B}_{-k}}{k+1} e^{ik\theta} \quad (1.3)$$

где

$$B_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [q_2(\xi) - i\tau_2(\xi)] e^{-ik\xi} d\xi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

При этом имеют место условия равновесия диска

$$r_1 \int_{-\theta_1}^{\theta_1} [q_1(\xi) - i\tau_1(\xi)] e^{-i\xi} d\xi = P_1 + P_2, \quad r_1^2 \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) d\xi = M \quad (1.4)$$

Здесь $\nu_j = 3 - 4\nu_j$ ($j = 1, 2$) для плоской деформации и $\nu_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ для случая плоского напряженного состояния; $\mu_j = E_j/2(1 + \nu_j)$, а E_j и ν_j — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона для материалов диска ($j = 1$) и бесконечной пластины ($j = 2$). Кроме того, введены обозначения

$$K^{(1)}(\theta - \xi) = \frac{(x_1 + 1) r_1}{4\pi\mu_1} R_{11}(\theta - \xi) + \frac{(x_1 - 1) r_1}{8\pi\mu_1} R_{12}(\theta - \xi)$$

$$K^{(2)}(\theta - \xi) = \frac{(x_1 + 1)r_1}{4\pi\mu_1} R_{11}(\theta - \xi) + \\ + \frac{(x_1 - 1)r_1}{8\pi\mu_1} R_{22}(\theta - \xi) - \frac{(x_1 - 1)r_1}{8\pi\mu_1} (\theta - \xi)$$

где

$$R_{11}(\theta - \xi) = 2 \sin^2 \frac{\theta - \xi}{2} \ln 2 \left| \sin \frac{\theta - \xi}{2} \right|$$

$$R_{12}(\theta - \xi) = [\pi - |\theta - \xi|] \sin(\theta - \xi) \operatorname{sign}(\theta - \xi)$$

$$R_{21}(\theta - \xi) = \sin(\theta - \xi) \ln 2 \left| \sin \frac{\theta - \xi}{2} \right|$$

$$R_{22}(\theta - \xi) = -2 [\pi - |\theta - \xi|] \sin^2 \frac{\theta - \xi}{2} \operatorname{sign}(\theta - \xi)$$

$$f_1(\theta) = \frac{(x_1 + 1)r_1}{8\pi\mu_1} \int_{-\pi}^{\theta} q_1(\xi) d\xi + \frac{x_1 + 1}{8\pi\mu_1} P_1 - \frac{1}{2\pi\mu_1} P_1 \cos \theta - \\ - \frac{x_1 - 1}{8\pi\mu_1} P_1 \theta \sin \theta - \frac{x_1 + 1}{4\pi\mu_1} P_1 \cos \theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2\pi\mu_1 (1 + x_1)} P_2 \cos \theta \\ f_2(\theta) = \frac{x_1 + 1}{4\pi\mu_1 r_1} M + \frac{x_1 + 1}{4\pi\mu_1} P_1 \sin \theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) - \\ - \frac{x_1 - 1}{8\pi\mu_1} P_1 \theta \cos \theta + \frac{1}{2\pi\mu_1 (1 + x_1)} P_2 \sin \theta \quad (-\pi < \theta < \pi)$$

Легко видеть, что функции $K^{(j)}(\theta - \xi)$ ($j = 1, 2$) непрерывны в области $-\theta_1 \leq \theta$, $\xi \leq \theta_2$ и имеют квадратично суммируемые частные производные первого порядка.

Теперь, рассматривая усиливающее кольцо как цилиндрическую тонкую оболочку, запишем уравнения его равновесия в перемещениях

$$\frac{D}{r_2^4} \left(\frac{d^4 v_r^{(2)}}{d\xi^4} - \frac{d^4 v_\theta^{(2)}}{d\xi^4} \right) + \frac{h}{r_2^2} (2\mu_0 + \nu_0) \left(\frac{d^2 v_r^{(2)}}{d\xi^2} + v_r^{(2)} \right) = q_1(\theta) - q_2(\theta) \\ \frac{D}{r_2^4} \left(\frac{d^4 v_r^{(2)}}{d\xi^4} - \frac{d^4 v_\theta^{(2)}}{d\xi^4} \right) - \frac{h}{r_2^2} (2\mu_0 + \nu_0) \left(\frac{d^2 v_\theta^{(2)}}{d\xi^2} + v_\theta^{(2)} \right) = z_1(\theta) - z_2(\theta) \quad (1.5)$$

Здесь $D = E_0 h^3 / 12$ — жесткость усиливающего кольца на изгиб; $2\mu_0 + \nu_0 = E_0 (1 - \nu_0) / (1 + \nu_0) (1 - 2\nu_0)$ для плоской деформации и $2\mu_0 + \nu_0 = E_0 / (1 - \nu_0^2)$ для плоского напряженного состояния, а E_0 и ν_0 — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для материала усиливающего кольца.

Отметим, что при выводе уравнений (1.5) за перемещения срединной линии оболочки приняты перемещения линии соединения усиливающего кольца с основанием, поперечная деформация тонкого кольца взята равной нулю, а для выражения поперечной силы через перемещения использованы известные формулы сопротивления материалов для кривого бруса. Следует еще отметить, что уравнения (1.5) с точностью коэффициентов совпадают с соответствующими уравнениями цилиндрической оболочки, выведенными в [7] на основе классических гипотез Кирхгофа-Лява. Однако, указанные предположения, лежащие в основе (1.5) и являющиеся модификацией этих гипотез, для обсуждаемой задачи представляются более естественными и, поэтому, в дальнейшем будут использованы именно они.

Поскольку требуется определить только законы распределения контактных напряжений под диском $q_1(0)$ и $\tau_1(0)$, то система уравнений (1.5) будет использована для исключения $q_2(0)$ и $\tau_2(0)$. Для этого достаточно подставить в правую часть (1.5) разложения функций $q_j(0)$, $\tau_j(0)$ ($j=1, 2$) в ряд Фурье, в левую часть — выражения $\sigma_j^{(0)}$ и $\nu_j^{(2)}$ из (1.3), а затем приравнять коэффициенты при $e^{ik\theta}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Упомянутые разложения имеют вид

$$\begin{aligned} -q_1(0) + i\tau_1(0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}, & A_k &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [q_1(\xi) - i\tau_1(\xi)] e^{-ik\xi} d\xi \\ -q_2(0) + i\tau_2(0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\theta}, & B_k &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [q_2(\xi) - i\tau_2(\xi)] e^{-ik\xi} d\xi \end{aligned}$$

Выполняя поочередно указанные операции, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B_0 &= \frac{1}{1+b} \operatorname{Re} A_0, & \operatorname{Im} B_0 &= \operatorname{Im} A_0, & B_1 &= A_1, & B_{-1} &= A_{-1}/(1+a+b) \\ B_k &= \frac{d_k^{(1)}}{d_k} A_k + \frac{d_k^{(2)}}{d_k} A_{-k}, & B_{-k} &= \frac{d_k^{(3)}}{d_k} A_k + \frac{d_k^{(4)}}{d_k} A_{-k}, & (k &= 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} a &= D/2r_2^2, & b &= (2\nu_0 + \lambda_0) h/2r_2\nu_2, & d_k^{(1)} &= ak^3 + ak^2 + bk + b + 2 \\ d_k^{(2)} &= -ak^3 + ak^2 + bk - b, & d_k^{(3)} &= -\alpha_1 ak^3 - \alpha_2 ak^2 + \alpha_2 bk + \alpha_2 b \\ d_k^{(4)} &= \alpha_2 ak^3 - \alpha_3 ak^2 + \alpha_2 bk - \alpha_2 b + 2 \\ d_k &= 2\alpha_1 abk^2(k^2 - 1) + \alpha_2 ak^2(k - 1) + ak^2(k + 1) + \\ &\quad + \alpha_2 b(k - 1) + b(k + 1) + 2 \end{aligned}$$

Подставляя выражения $\sigma_j^{(0)}$, $\nu_j^{(2)}$ ($j=1, 2$) из (1.2) и (1.3) с учетом (1.6) в систему (1.1), затем умножая второе из уравнений (1.1) на отри-

цательную мнимую единицу — i и складывая с первым, после некоторых элементарных выкладок придем к интегральному уравнению

$$\frac{(x_1 + 1)r_1}{4\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \left[\ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\theta - \xi}{2} \right|} + i \frac{\pi}{2} \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \operatorname{sign}(\theta - \xi) \right] \chi(\xi) d\xi + \\ + \int_{-\theta_1}^{\theta_1} G_1(\theta - \xi) \chi(\xi) d\xi + \int_{-\theta_1}^{\theta_1} G_2(\theta - \xi) \overline{\chi(\xi)} d\xi = f(\theta), \quad (-\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1)$$

Перейдем к новым переменным

$$t = \theta + \beta, \quad s = \xi + \beta, \quad \beta = (\theta_1 - \theta_2)/2, \quad (\theta_1 + \theta_2)/2 = \alpha$$

Считая, что диск упругий и отличен от жесткой шайбы, предыдущее уравнение запишем в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{t-s}{2} \right|} - i \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi p \operatorname{sign}(t-s) \right] \chi_0(s) ds + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} K_1(t-s) \chi_0(s) ds + \int_{-\pi}^{\pi} K_2(t-s) \overline{\chi_0(s)} ds = f_0(t) \quad (1.7)$$

где

$$\operatorname{th} \pi p = -(x_1 - 1)/(x_1 + 1)$$

В ядре уравнения (1.7) выделены его главная (сингулярная) часть в виде ядра

$$\ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{t-s}{2} \right|} - i \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi p \operatorname{sign}(t-s)$$

и регулярная часть в виде непрерывных функций

$$K_1(t-s) = 4\pi\mu_1 G_1(t-s)/(x_1 + 1)r_1, \quad K_2(t-s) = 4\pi\mu_1 G_2(t-s)/(x_1 + 1)r_1$$

где

$$G_1(t-s) = K^{(1)}(t-s) + \frac{r_2}{4\pi\mu_2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cos k(t-s) + \\ + \frac{r_2}{4\pi\mu_2(1+a+b)} \cos(t-s) + \\ + i \left[K^{(2)}(t-s) + \frac{r_2}{4\pi\mu_2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \sin k(t-s) \right]$$

$$G_2(t-s) = \frac{r_2}{4\pi\mu_2} \sum_{k=2}^{\infty} a_k^{(2)} \cos k(t-s) - \frac{r_1}{2\pi\mu_1} \cos(t-s) \\ (-2 \leq t, \quad s \leq 2)$$

Здесь

$$a_k^{(1)} = [2\chi_2 a k^4 + 2\chi_2 a k^2 + 2\chi_2 b k^2 + 2\chi_2 (k+1) + \\ + 2(k-1) + 2\chi_2 b]/(k^2-1) d_k \\ a_k^{(2)} = -[4\chi_2 a k^3 + 4\chi_2 b k + 2\chi_2 (k+1) - 2(k-1)]/(k^2-1) d_k \\ a_k^{(2)} = -2(\chi_2 a k^2 - \chi_2 b)/d_k \quad (k=2, 3, \dots)$$

Через $\chi_0(t)$ обозначена комбинация компонентов неизвестных контактных напряжений в комплексной форме, приведенных к безразмерному виду

$$\chi_0(t) = r_2 \chi(t)/4\pi\mu_2 \varepsilon = p_0(t) + i\tau_0(t) \\ p_0(t) = r_2 p(t)/4\pi\mu_2 \varepsilon = r_2 q_1(t-\beta)/4\pi\mu_2 \varepsilon \\ \tau_0(t) = r_2 \tau(t)/4\pi\mu_2 \varepsilon = r_2 \tau_1(t-\beta)/4\pi\mu_2 \varepsilon$$

Функция $f_0(t)$ имеет вид

$$f_0(t) = \mu_2 r_2 f(t-\beta)/(x_1+1) \mu_2 r_1 \varepsilon = f_0^{(1)}(t) + i f_0^{(2)}(t) \\ f_0^{(1)}(t) = P_{10} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{g_0}{2(1+a+b)} - \frac{2}{1+x_1} \right) \cos(t-\beta) - \right. \\ \left. - \cos(t-\beta) \ln \left(2 \cos \frac{t-\beta}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{x_1-1}{x_1+1} (t-\beta) \sin(t-\beta) \right] + \\ + P_{20} \left(\frac{g_0}{2(1+a+b)} - \frac{1}{(1+x_1)^2} \right) \cos(t-\beta) + (2_0+1) g_0 \cos(t-\beta) - \\ - 2_0 g_0 \sin(t-\beta) + \left[\frac{1}{2} - g_0/(1+b) \right] \int_{-2}^t p_0(t) dt - g_0 \\ f_0^{(2)}(t) = M_0 (1-g_0) - P_{10} \left[\frac{g_0}{2(1+a+b)} \sin(t-\beta) - \right. \\ \left. - \sin(t-\beta) \ln \left(2 \cos \frac{t-\beta}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{x_1-1}{x_1+1} (t-\beta) \cos(t-\beta) \right] - \\ - P_{20} \left(\frac{g_0}{2(1+a+b)} - \frac{2}{(1+x_1)^2} \right) \sin(t-\beta) - \\ - 2_0 g_0 \sin(t-\beta) + 2_0 g_0 [1 - \cos(t-\beta)]$$

Здесь введены также безразмерные величины:

$$P_{10} = r_2 P_1 / 4 \pi \mu_2 r_1^2, \quad P_{20} = r_2 P_2 / 4 \pi \mu_2 r_1^2, \quad M_0 = r_2 M / 4 \pi \mu_2 r_1^2 \\ \beta_0 = \beta / 2, \quad \psi_0 = r_1 \psi / 2, \quad g_0 = r_2 \mu_1 / r_1 \mu_2 (1 + x_1)$$

Ядра $K_j(t-s)$ ($j = 1, 2$) непрерывны в квадрате — $\alpha \leq t, s \leq \alpha$ и имеют квадратично суммируемые первые частные производные.

В частном случае, когда усиливающее покрытие отсутствует ($h = 0$), будем иметь следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{t-s}{2} \right|} - i \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi_1 \operatorname{sign}(t-s) \left| \gamma_0(s) ds + \right. \\ \left. + \int_{-\alpha}^{\alpha} K_0(t-s) \gamma_0(s) ds = \right. \\ \left. - \frac{2}{(1+x_1)[1+(1+x_2)g_0]} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(t-s) \overline{\gamma_0(s)} ds = f^{(0)}(t) \right.$$

имеющее вполне аналогичную к (1.7) структуру. Здесь

$$\operatorname{th} \pi_1 = (x_1 - 1)[(x_2 - 1)r_2 \mu_1 / (x_1 - 1)r_1 \mu_2 - 1] / [1 + (1+x_2)g_0](1+x_1) = \beta_0 \\ 2K_0(t-s) = 2R_{12}(t-s) - \beta_0 R_{22}(t-s) + \\ + i[2R_{01}(t-s) - \beta_0 R_{20}(t-s) + (t-s)\beta_0] \\ f^{(0)}(t) = [f_0^{(1)}(t) + if_0^{(2)}(t) - 1/2(P_{10} + P_{20})g_0 \cos(t-\beta) + \\ + g_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} F_0(t) dt + i[M_0 g_0 + 1/2(P_{10} + P_{20})g_0 \sin(t-\beta)] / [1 + (1+x_2)g_0]$$

В заключение приведем определяющие уравнения также в том случае, когда при контактном взаимодействии указанных тел возникают силы кулоновского трения, то есть когда $\tau(t) = \lambda \rho(t)$ [8], где λ — коэффициент трения. Эти уравнения будут иметь вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{t-s}{2} \right|} + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \pi^{(1)} \operatorname{sign}(t-s) \left| p_0(s) ds + \right. \\ \left. + \int_{-\alpha}^{\alpha} K_j(t-s) p_0(s) ds = f_j^*(t) \right. \quad (1.8)$$

Здесь $j = 1$ — для общего случая, а $j = 2$ — для случая $h = 0$. Кроме того,

$$K_1^*(t-s) = \operatorname{Re} [K_1(t-s)] + K_2(t-s) - i \operatorname{Im} [K_1(t-s)]$$

$$K_2^*(t-s) = \operatorname{Re} [K_0(t-s)] - 2 \cos(t-s) \{1 + (1 + \alpha_1) g_0\} (i + \alpha_1) - \\ - i \operatorname{Im} [K_0(t-s)]$$

$$f_1^*(t) = \operatorname{Re} [f_0(t)], \quad f_2^*(t) = \operatorname{Re} [f^{(0)}(t)]$$

$$\operatorname{tg} \pi \nu^{(1)} = -i(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 + 1), \quad \operatorname{tg} \pi \nu^{(2)} = i\beta_0$$

Легко заметить, что формальной заменой μ на $i\mu$ главная часть уравнения (1.7) перейдет в главную часть уравнения (1.8). Последнее дает возможность их решение построить единым аналитическим методом.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи свелось к решению интегрального уравнения (1.7), откуда определятся законы распределения неизвестных контактных напряжений $p_0(t)$ и $t_0(t)$. Подлежат определению также размеры области контакта α , β , жесткое смещение δ и угол относительного поворота ψ диска. Поэтому к уравнению (1.7) должны быть добавлены условия равновесия диска (1.4) и условия ограниченности контактных напряжений на концах зоны контакта [1, 3, 9].

$$\chi_0(\pm a) = 0 \quad (1.9)$$

§ 2. Сведение интегрального уравнения (1.7) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений и ее исследование. Возможные особенности контактных напряжений на концах зоны контакта должны иметь вид [5, 10—12]

$$\chi_0(t) = O[(a-t)^{\frac{1}{2}}(a+t)^{\frac{1}{2}}] \quad \text{при} \quad t \rightarrow \pm a$$

Следовательно, $\chi_0(t)$ можно представить в виде

$$\chi_0(t) = (a-t)^{\frac{1}{2}}(a+t)^{\frac{1}{2}} \chi_0^*(t) = \left(\sin \frac{a-t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{a+t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \chi_0^{**}(t) \quad (2.1)$$

где $\alpha = \alpha_0 - 1 = -1/2 - i\mu$, $\beta = \beta_0 - 1 = -1/2 + i\mu$, а $\chi_0^*(t)$, $\chi_0^{**}(t)$ — регулярные функции на отрезке $[-a, a]$, притом $\chi_0^{**}(t) = O(a^2 - t^2)$ при $t \rightarrow \pm a$.

Исходя из формулы (2.1), решение уравнения (1.7) представим рядом

$$\chi_0(t) = w(t) \sum_{n=0}^{\infty} Z_n P_n^{(\alpha-1)}(x) \quad (2.2)$$

с неизвестными коэффициентами $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$. При этом, ввиду (1.9), должны иметь место условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z_n P_n^{(\alpha-1)}(\pm 1) = 0$$

Здесь

$$w(t) = \frac{1}{2} \left(\sec \frac{t}{2} \right)^{2+\sigma+\rho} \left(\sin \frac{\alpha-t}{2} \right)^{\sigma} \left(\sin \frac{\alpha+t}{2} \right)^{\rho}, \quad x = \operatorname{tg} \frac{t}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$\{P_m^{(\sigma, \rho)}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ ($\operatorname{Re}(\sigma, \rho) > -1$) — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x)^{\sigma}(1+x)^{\rho}$.

При сведении задачи к бесконечной системе нам понадобится соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{t-s}{2} \right|} - i \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi t \operatorname{sign}(t-s) \Big| w(s) P_m^{(\sigma, \rho)}(y) ds = \\ & = \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^{1+\sigma+\rho} \sec \frac{\alpha}{2} \left[\gamma_m P_m^{(\rho, \sigma)}(x) - \eta_m \ln \left(2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{t}{2} \right) - J_m^{(\sigma, \rho)} \right] \quad (2.3) \\ & (m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

которое следует из результатов работы [13].

Здесь

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} \frac{s}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad 2\gamma_0 = -i\pi^{\sigma} \operatorname{th} \pi \mu \operatorname{sech} \pi \mu - \\ & - 2\pi \operatorname{sech} \pi \mu [\ln 2 + \psi(0.5 - i\mu) - \psi(1)] \\ \gamma_m &= \pi m^{-1} \operatorname{sech} \pi \mu, \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\eta_m = \begin{cases} h_0 & \text{при } m = 0 \\ 0 & \text{при } m = 1, 2, \dots \end{cases}; \quad h_0 = \frac{2^{1+\sigma+\rho} \Gamma(1+\sigma) \Gamma(1+\rho)}{(1+\sigma+\rho) \Gamma(1+\sigma+\rho)} = \pi \operatorname{sech} \pi \mu$$

$$\begin{aligned} J_m^{(\sigma, \rho)} &= \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^{-1-\sigma-\rho} \cos \frac{\alpha}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \left(\cos \frac{t}{2} \right) w(t) P_m^{(\sigma, \rho)}(x) dt \\ & (m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\psi(z)$ — пси-функция Эйлера.

Подставляя (2.2) в (1.7) и учитывая (2.3), уравнение (1.7) известным способом сведем к бесконечной системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} Z_n + H_n \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} Z_m K_{n,m}^{(1)} + H_n \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \bar{Z}_m K_{n,m}^{(2)} &= H_n n^{-1} b_n \quad (2.4) \\ (n &= 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Кроме того, получим соотношение

$$Z_0 \left[1 - \gamma_0^{-1} h_0 \ln \left(2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \gamma_0^{-1} f_0^{(p, \sigma)} \right] - \\ - \gamma_0^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} Z_m f_m^{(p, \sigma)} + \sum_{m=0}^{\infty} Z_m K_{0, m}^{(1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{Z}_m K_{0, m}^{(2)} = b_0$$

откуда можем определить коэффициент Z_0 .

Здесь введены следующие обозначения:

$$K_{n, m}^{(1)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \overline{w(t)} P_n^{(p, \sigma)}(x) dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial s} [K_1(t-s)] w_0(s) P_{m-1}^{(p+1, \sigma+1)}(y) ds$$

$$K_{n, m}^{(2)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \overline{w(t)} P_n^{(p, \sigma)}(x) dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial s} [K_2(t-s)] \overline{w_0(s)} P_{m-1}^{(p+1, \sigma+1)}(y) ds$$

$$(n, m = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d}{dt} [f_0(t)] \overline{w_0(t)} P_{n-1}^{(p+1, \sigma+1)}(x) dt - Z_0 K_{n, 0}^{(1)} - \bar{Z}_0 \bar{K}_{n, 0}^{(2)} -$$

$$- Z_0 h_0 \sec \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^{1+\sigma+p} \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \overline{w_0(t)} P_{n-1}^{(p+1, \sigma+1)}(x) dt$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

$$H_n = n^{\sigma-1} \operatorname{ch} \pi u \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^{-3-2\sigma-2p} (h_n)^{-1}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$K_{0, m}^{(1)} = H_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \overline{w(t)} dt \int_{-\alpha}^{\alpha} K_1(t-s) w(s) P_m^{(p, \sigma)}(y) ds$$

$$K_{0, m}^{(2)} = H_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \overline{w(t)} dt \int_{-\alpha}^{\alpha} K_2(t-s) \overline{w(s)} P_m^{(p, \sigma)}(y) ds, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_0 = H_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} f_0(t) \overline{w(t)} dt$$

где

$$K_{n, 0}^{(1)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \overline{w_0(t)} P_{n-1}^{(p+1, \sigma+1)}(x) dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [K_1(t-s)] w(s) ds$$

$$K_{n,0}^{(2)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \overline{w_0(t)} P_{n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(1+\sigma, \rho)}(x) dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} |K_n(t-s)| \overline{w(s)} ds, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$w_0(t) = \frac{1}{2} (\cos t - \cos \alpha) w(t), \quad H_0 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^{-2(1+\sigma+\rho)} (\gamma_0 h_0)^{-1}$$

$$h_n = \frac{2^{1+\sigma+\rho} \Gamma(n+1+\sigma) \Gamma(n+1+\rho)}{n! (2n+1+\sigma+\rho)! (n+1+\sigma+\rho)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$x = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Исследуем систему (2.4) на регулярность. С этой целью введем новые неизвестные по формуле

$$Z_n = n^{1-\varepsilon} z_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

где ε — сколь угодно малое положительное фиксированное число. Тогда приходим к бесконечной системе

$$z_n + \frac{H_n}{n} n^{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_m}{m^{\varepsilon}} K_{n,m}^{(1)} + \frac{H_n}{n} n^{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_m}{m^{\varepsilon}} K_{n,m}^{(2)} = \frac{H_n}{n^{\varepsilon}} n^{\varepsilon} b_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

которая квазивполнерегулярна, то есть $S_n^{(1)}, S_n^{(2)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где

$$S_n^{(1)} = \frac{H_n}{n} n^{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\varepsilon} |K_{n,m}^{(1)}|, \quad S_n^{(2)} = \frac{H_n}{n} n^{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\varepsilon} |K_{n,m}^{(2)}|$$

Действительно, пользуясь известным асимптотическим представлением для функции $I(z)$ [14], легко показать, что

$$H_n/n = 2^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \pi n [1 + O(n^{-1})] \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

С другой стороны, следуя [12, 15], на основе асимптотического представления многочленов Якоби [16]

$$P_n^{(\sigma, \rho)}(\cos \tau) \approx \frac{\cos \{ [n + (1 + \sigma + \rho)/2] \tau - (1 + 2\sigma) \pi/4 \}}{\sqrt{\pi n (\sin \tau/2)^{1+\sigma} (\cos \tau/2)^{1+\rho}}} + O(n^{-3/2})$$

($n \rightarrow \infty$)

$$\operatorname{Re}(\sigma, \rho) > -1, \quad 0 < \tau < \pi$$

и с учетом (2.5) для достаточно больших n, m будем иметь

$$S_n^{(1)} = H_n n^{1/2+\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1/2+\varepsilon}} |K_{n,m}^{(1)}| \leq N_1 n^{1/2+\varepsilon} \sum_{j=1}^4 \left| \sum_{m=1}^{\infty} (A_{n,m}^{(j)})^2 \right|^{1/2}$$

Здесь N_1, N_2 — некоторые постоянные, а через $K_{n,m}^{(1)\infty}$ обозначены значения $K_{n,m}^{(1)}$ для больших n и m , которые здесь в явном виде не приводятся. Отметим лишь, что их можно представить формулой

$$K_{n,m}^{(1)\infty} = \sum_{j=1}^4 A_{n,m}^{(j)}$$

где $A_{n,m}^{(j)}$ — коэффициенты Фурье некоторых квадратично суммируемых функций $f_j(t, s)$ ($j = 1-4$) ($-\alpha \leq t, s \leq \alpha$) по полным ортогональным системам многочленов

$$\{U_n(x) U_m(y); U_n(x) T_m(y); T_n(x) U_m(y); T_n(x) T_m(y)\}_{n,m=0}^{\infty}$$

где $T_n(x)$ и $U_n(x)$ — соответственно многочлены Чебышева первого и второго рода. Следовательно, для каждого разложения будет иметь место равенство Парсеваля, откуда будет вытекать сходимость рядов

$$\sum_{n,m} (A_{n,m}^{(j)})^2, \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

Тогда сходятся и ряды [17]

$$\sum_n \left| \sum_m (A_{n,m}^{(j)})^2 \right|$$

Следовательно, по крайней мере,

$$\sum_{n,m} (A_{n,m}^{(j)})^2 = O[n_{\varepsilon_1}^{-(1+2\varepsilon_1)}], \quad n \rightarrow \infty$$

где ε_1 — малое положительное, но фиксированное число. Отсюда следует, что

$$S_n^{(1)} = O(n^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}), \quad n \rightarrow \infty$$

Выбрав $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, будем иметь $S_n^{(1)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогичным образом можно показать, что $S_n^{(2)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а

$$H_n n^{\varepsilon_1} b_n / n^{\varepsilon_2} = O(n^{-1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

§ 3. Конкретный пример. В качестве конкретного примера рассмотрим два случая:

1) когда усиливающее покрытие настолько гибкое, что можно пренебречь его изгибной жесткостью ($D = 0$);

2) когда толщина усиливающего покрытия $h = 0$, то есть граница бесконечной пластины не усилена покрытием.

В обоих случаях считается, что отсутствуют тангенциальные контактные напряжения, вследствие чего следует принять $M = 0$. Тогда в зоне

контакта будет действовать только нормальное контактное давление $p(t)$, причем $p(-t) = p(t)$, и область контакта становится симметричной относительно оси OX ($\beta = 0, \psi = 0$). Условие равновесия диска (при $P_1 = 0$) примет вид

$$\int_{-a}^a p_0(s) \cos s ds = P_{z0}$$

В обоих случаях задача сводится к следующему интегральному уравнению:

$$\int_{-a}^a \left[\ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{t-s}{2} \right|} + K_0^{(j)}(t-s) \right] p_0(s) ds = f^{(j)}(t), \quad (-a \leq t \leq a) \quad (3.1)$$

где $j = 1, 2$ соответственно случаям 1) и 2), а

$$K_0^{(1)}(t-s) = R_{11}(t-s) + \beta_1 R_{12}(t-s) + \beta_2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos k(t-s)$$

$$2K_0^{(2)}(t-s) = 2R_{11}(t-s) - \beta_0 R_{12}(t-s)$$

$$\begin{aligned} A^{(1)} f^{(1)}(t) = & P_{z0} [g_0/2(1+b) - 2/(1+x_1)^2 + 2/(1+x_1) - \\ & - x_2 g_0/(1+x_2)] \cos t + (\beta_0 + 1) g_0 \cos t + \\ & + [1/2 - g_0/(1+b) + 2x_2 g_0/(1+x_2)] \int_{-a}^a p_0(t) dt - g_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{(2)} f^{(2)}(t) = & P_{z0} [2/(1+x_1) - 2/(1+x_1)^2] \cos t + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-a}^a p_1(t) dt - g_0 + (\beta_0 + 1) g_0 \cos t \end{aligned}$$

$$a_k = (2x_2^2 b k - 2x_2 b k + x_2^2 k - 2x_2 k + k + x_2^2 - 1)/(k^2 - 1) dk_0$$

Здесь

$$\beta_1 = (x_1 - 1)/2(1+x_1) A^{(1)}, \quad \beta_2 = 2g_0/(1+x_2) A^{(1)}, \quad A^{(1)} = 1 + 4x_2 g_0/(1+x_2)$$

$$A^{(2)} = 1 + (1+x_2) g_0, \quad d_{k0} = x_2 b(k-1) + b(k+1) + 2$$

Решение интегрального уравнения (3.1), к которому сводится рассматриваемая задача при отсутствии тангенциальных контактных напряжений, и схема получения численных результатов даны в статье [6], поэтому на этих вопросах здесь не будем останавливаться.

В обсуждаемых случаях 1) и 2) числовые расчеты для различных значений α были проведены при плоской деформации, когда упругие постоянные диска и бесконечной пластины одинаковы $E_1 = E_2$. Затем было принято $E_1/E_2 = 1/2$, $h/r_2 = 0.05$, а коэффициент Пуассона $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Кроме того, положено $r_1 \approx r_0$, в то время как принимается $e \neq 0$.

При указанных значениях параметров вычисления проводились на ЭМВ «Наир-2». Бесконечные системы решались методом редукции, причем, чтобы получить максимальные контактные напряжения с тремя верными знаками, достаточно было, как выяснилось, брать четыре уравнения из бесконечной системы.

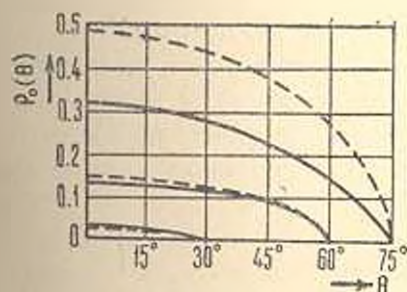
Таблица 1

	Случай 1) ($h \neq 0$)			Случай 2) ($h = 0$)		
	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 75^\circ$
P_{2a}	0.0295	0.2003	0.4972	0.0281	0.2110	0.7778
δ_a	0.2144	0.7686	1.5370	0.1938	0.8904	2.6330
X_0	0.0097	0.0730	0.1911	0.0093	0.0770	0.3037
X_1	-0.0096	-0.0710	-0.1966	-0.0093	-0.0750	-0.2965
X_2	-0.0001	-0.0018	0.0060	0	-0.0020	-0.0084
X_3	0	-0.0002	-0.0005	0	0	-0.0008
$p_0(b)_{\max}$	0.0371	0.1420	0.3225	0.0359	0.1500	0.4865

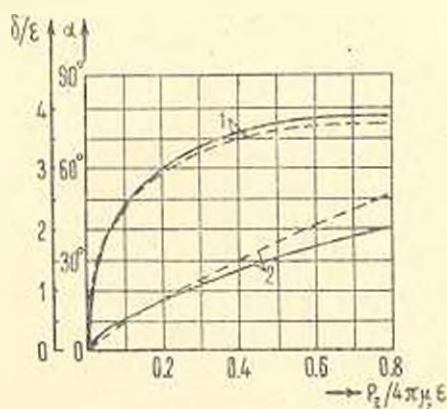
Значения постоянных P_{2a} , δ_a , коэффициентов X_n ($n = 0, 1, 2, 3$) и максимальных контактных напряжений $p_0(b)_{\max}$ при $\alpha = 30^\circ, 60^\circ$ и 75° приведены в табл. 1, а на графиках фиг. 2 показано влияние изменения длины участка контакта на закон распределения нормального контактного давления $p_n(b)$ (сплошные и пунктирные линии соответствуют случаям 1) и 2)).

При больших значениях α контактные напряжения резко возрастают, то есть существует критическое значение $\alpha < 90^\circ$ [5].

На фиг. 3 приведены зависимости длины участка контакта 2α и величины жесткого смещения диска δ от прижимающей силы P_2 . Эти зависимости на фиг. 3 даны соответственно кривыми 1 и 2.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

При отсутствии тангенциальных контактных напряжений результаты работы [5] в основном совпадают с изложенными здесь применительно к случаю 2).

Институт механики АН Армянской ССР
Ленинградский филиал ЕРПИ им. К. Маркса

Поступила 23 IX 1977

Ս. Մ. ՄԻԽԱՐՅԱՆ, Ֆ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԱՆՈՒՆ ՍԿԱԼԱՌԱԿԻ ԵՎ ԲԱՐԱԿ ՈՂԱԿԱՆՈՒ ՄԱՆԿՈՒՅԹՈՎ
ՈՒԹԵՂԱՑՎԱԾ ԿՆՐ ԱՆՑՔՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԿԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՑԻՆ
ՓՈՆԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ա Փ Ա Վ

Աշխատանքում դիտարկվում է շրջանային առաձգական սկալառակի և կլոր անցքով անվերջ սալի կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, երբ սալի և դրադիծր ուժեղացված է օգակային բարակ առաձգական ծածկույթով: Առաձգական ծածկույթի համար օգտագործվում են գլանային թաղանթների տեսության որոշիչ հավասարումները՝ Կիրխոֆ-Լյավի հայտնի հիպոթեզների շրջանակներում:

Նշված խնդրի լուծումը բերված է ֆրեդհոլմի առաջին սերի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը: Յակոբիի օրթոգոնալ բաղմանդամների մաթեմատիկական աղարատի օգնությամբ այդ հավասարման համար ստացված է էֆեկտիվ լուծում: Թվային արդյունքները ներկայացված են աղջուսակով և գծադրերով:

ON CONTACT INTERACTION OF A ROUND DISK AND AN INFINITE PLATE WITH A CIRCULAR HOLE SUPPORTED BY A THIN CIRCULAR SURFACE

S. M. MKHITARIAN, F. S. TOROSSIAN

S u m m a r y

A contact problem on the pressure of an elastic round disk on the contour of an infinite plate with a circular hole where its boundary is supported by a thin element in the shape of an elastic circular surface attached to it, is considered. The supporting thin surface is interpreted in terms of the theory of thin cylindrical shells based on the well-known Kirchhoff-Love hypothesis.

The solution of the above problem is reduced to that of the first kind Fredholm integral equation. Its effective solution is presented. The numerical results are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штасерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л. Гостехиздат, 1949.
2. Коровацкий М. В. О некоторых вопросах эластореологии, имеющих приложение в теории трения. Сб. «Трение и износ в машинах». XV. М., ин-т. Машиноведения, 1962.
3. Кочанов Ф. П. Решение обобщенной задачи И. Я. Штасермана. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 5.
4. Панасюк В. В., Теплый М. И. Об одной контактной задаче с учетом сил трения. Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 7.
5. Марарь Г. А., Попов Г. Я. К теории контактных задач для цилиндрических тел с учетом сил трения. МТТ, 1976, № 2.
6. Тарасян Ф. С. Об одной контактной задаче для цилиндрических тел. Уч. записки ЕрГУ, сер. естественных наук, 1977, № 1.
7. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
8. Мусхелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
9. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
10. Arutunian N. Kh. and Mkhitarian S. M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity. Witold Nowacki Anniversary Volume, Groningen, Walters-Noordhoff Publ., 1971, p. 3—20.
11. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 2.
12. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
13. Попов Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
14. Бейтмен Г., Эрдеси А. Высшие трансцендентные функции. т. 1. М., «Наука», 1973.
15. Гулян К. Г. Передача нагрузки от стержня конечной длины к двум клиновидным упругим пластинам. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 4.
16. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
17. Уиттекер Э., Ватсон Г. Курс современного анализа. т. 3. М., Физматгиз, 1963.