ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 5, 1978 Механика

А. Н. ГУЗЬ, А. В. НАВОЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСЖИМАЕМОГО СТЕРЖНЯ ПРИ РАВНОМЕРНОМ БОКОВОМ ДАВЛЕНИИ

Введение. Вопрос об устойчивости упругого тела, которое помещено без трения между двумя абсолютно жесткими стенками и загружено по боковой поверхности равномерным давлением, рассматривался в [1, 2]. В этих работах указанный вопрос исследован на примере задачи об устойчивости полосы из сжимаемого и несжимаемого материалов и получен следующий вывод. Состояние равновесия является устойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «следящей» нагрузки, и неустойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «мертвой» нагрузки. В последнем случае критическая нагрузка для тонкой полосы приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы при осевом сжатии. Эти результаты получены только для одной задачи (об устойчивости полосы), поэтому представляется целесообразным исследовать задачи для тел другой формы с целью проверки общности вышеизложенных выводов.

В настоящей статье исследуем задачу об устойчивости цилиндрического стержня произвольного поперечного сечения, который помещен без трения между двумя абсолютно жесткими стенками и к боковой поверхности которого приложено давление в виде «следящей» или «мертвой» нагрузки. Материал стержня будем считать несжимаемым, изотропным с произвольной формой упругого потенциала, а стержень будем считать сплошным, что обеспечивает существование однородного докритического состояния. Как и в [3—5], исследование проведем в общей форме для трехмерных линеаризированных теорий упругой устойчивости при конечных и малых докритических деформациях [6, 7]. Будем применять лагранжевы системы координат, которые в недеформированном состоянии совпадают с декартовыми (x_1, x_2, x_3) или круговыми цилиндрическими (r, θ, x_3) системами координат. Все величины, относящиеся к докритическому состоянию, отметим индексом «ноль».

Заметим, что в силу условия несжимаемости для докритического состояния при его определении приходим к задаче о всестороннем равномерном сжатии, следовательно, можно использовать основные уравнения и соотношения [3—5]. В случае же сжимаемых материалов [1] уже не приходим к задаче о всестороннем равномерном сжатии.

§ 1. Основные соотношения. Линеаризированные уравнения движения при отсутствии возмущений объемных сил, согласно [4, 5], можно представить в следующем виде:

$$\mu_0' \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{grad} p - \rho \ddot{\vec{u}} = 0 \qquad (1.1)$$

Линеаризированное условие несжимаемости запишем в таком виде:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \tag{1.2}$$

Линеаризированные граничные условия в напряжениях на части S_1 поверхности запишем в форме

$$\vec{Q}\big|_{S_1} = \vec{P}; \quad \vec{Q} = (2\mu_0 - \sigma_0)\vec{N}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} + (\mu_0 - \sigma_0)\vec{N}\times \operatorname{rot}\vec{u} + \vec{N}p \tag{1.3}$$

В выражениях (1.1) — (1.3) введены следующие обозначения: μ_0—величина, которая определяется через упругий потенциал, $\vec{u}$ — возмущение вектора перемещений; ρ — плотность материала в естественном состоянии; $\vec{N}$ — орт нормали к поверхности тела в естественном (недеформированном) состоянии; $\vec{P}$ — возмущения внешних нагрузок, действующих на S_1, p — возмущение величины, связанной с гидростатическим давлением; σ_0 — напряжение, соответствующее всестороннему равномерному сжатию. Заметим, что напряжение σ_0 является истинным и для теории конечных докритических деформаций, поскольку в силу условий несжимаемости при всестороннем равномерном сжатии площадь поверхности стержня не изменяется.

В случае, когда давление к боковой поверхности стержня приложено в виде «мертвой» нагрузки, $\vec{P} = 0$. Если давление к боковой поверхности приложено в виде «следящей» нагрузки, то для определения $\vec{P}$ в [3] получено следующее выражение (более точное, чем в других работах по теории малых докритических деформаций)

$$\vec{P} = -\sigma_0(\vec{N}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{N}\times\operatorname{rot}\vec{u})\big|_{S_1} \tag{1.4}$$

Совместим ось стержня с осью $0x_3$ $(0 \leqslant x_3 \leqslant l)$, где l — длина стержня. Учитывая, что по постановке задачи стержень при $x_3=0$ и $x_3=l$ соприкасается без трения с абсолютно жесткими стенками, из выражений (1.3) получаем следующие граничные условия при $x_3=0$ и $x_3=l$:

$$u_3 = 0; \quad Q_1 = 0; \quad Q_2 = 0 \tag{1.5}$$

Учитывая (1.3), граничные условия (1.5) можно сформулировать и через перемещения

$$u_3 = 0; \quad (2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = 0 \tag{1.6}$$

На боковой поверхности в случае действия «следящей» нагрузки согласно (1.3) и (1.4) должны выполняться следующие граничные условия:

$$2\mu_0\vec{N}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} + \mu_0\vec{N}\times\operatorname{rot}\vec{u} + \vec{N}p = 0 \tag{1.7}$$

В случае действия «мертвой» нагрузки, согласно (1.3), при $\vec{P} = 0$ на боковой поверхности получаем следующие граничные условия:

$$(2\mu_0 - \sigma_0)\,\vec{N}\cdot\nabla\vec{u} + (\mu_0 - \sigma_0)\,\vec{N}\times \operatorname{rot}\vec{u} + \vec{N}p = 0 \tag{1.8}$$

Необходимо отметить, что изложенная выше задача сформулирована относительно вектора $\vec{u}$ и скаляра p. Следуя [4], приведем выражения для вычисления величины μ_0 через упругий потенциал, считая последний функцией A_i^0 — алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина. В этом случае для теории конечных докритических деформаций имеет место выражение

$$\mu_0 = \left(\frac{\partial}{\partial A_1^0} + \frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0\Big|_{A_i^0 = 0}; \quad \Phi^0 = \Phi^0(A_1^0,\ A_2^0) \tag{1.9}$$

а в случае первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций — следующее выражение:

$$\mu_0 = \frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0\Big|_{A_i^0 = 0} + \sigma_0; \quad \Phi^0 = \Phi^0(A_2^0,\ A_3^0) \tag{1.10}$$

Рассмотрим вопрос о применимости статического метода (метода Эйлера) к рассматриваемой задаче.

Когда на боковую поверхность S_1 действует «мертвая» нагрузка ($\vec{P} = 0$), как известно [7], статический метод исследования можно применять. Рассмотрим случай действия «следящей» нагрузки на боковую поверхность. Будем считать, что боковая поверхность пересекается с плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = l$ по кривым L. В этом случае в [8] доказано, что достаточные условия применимости метода Эйлера выполняются, если на L обращается в нуль одна из величин u_3 или u_N (через u_N обозначено перемещение, направленное по нормали к поверхности S_1). Первое условие (1.6) обеспечивает выполнение следующего условия:

$$u_3\big|_L = 0 \tag{1.11}$$

Таким образом, как при действии «мертвой» нагрузки на боковую поверхность, так и при действии «следящей» нагрузки на боковую поверхность выполняются достаточные условия применимости метода Эйлера. В связи с этим будем применять уравнение (1.1) без инерционных членов в виде

$$\mu_0 \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \mu_0 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} + \operatorname{grad} p = 0 \tag{1.12}$$

Таким образом, при изложенной постановке приходим к задаче на собственные значения: в случае действия «следящей» нагрузки на боковую поверхность — к уравнениям (1.12) и (1.2), к граничным условиям на торцах

(1.6) и граничным условиям (1.7) на боковой поверхности: в случае действия «мертвой» нагрузки на боковую поверхность — к уравнениям (1.12) и (1.2), к граничным условиям на торцах (1.6) и граничным условиям (1.8) на боковой поверхности.

§ 2. *Исследование устойчивости.* При исследовании устойчивости необходимо учесть, что уравнения (1.12) и (1.2), граничные условия (1.7) полностью переходят в соответствующие выражения линейной классической теории упругости, если вместо постоянной Ляме μ ввести величину μ_0. Относительно величины μ_0, как и в [2—5], будем предполагать, что выполняется следующее неравенство:

$$\mu_0 > 0 \qquad (2.1)$$

которое обеспечивает устойчивость состояния равновесия упругого тела при всестороннем равномерном сжатии «следящей» нагрузкой, приложенной ко всей поверхности тела.

«Следящая нагрузка». В этом случае, как отмечалось выше, приходим к задаче на собственные значения (1.12), (1.2), (1.6) и (1.7), которая не совпадает с соответствующей линейной задачей классической теории упругости в силу структуры граничных условий (1.6). Представим решение уравнений (1.12) и (1.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1(x_1, x_2)\cos\pi\frac{m}{l}x_3; \quad u_2 = w_2(x_1, x_2)\cos\pi\frac{m}{l}x_3 \\ u_3 &= w_3(x_1, x_2)\sin\pi\frac{m}{l}x_3; \quad p = w_4(x_1, x_2)\cos\pi\frac{m}{l}x_3 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Выражения в виде (2.2) удовлетворяют граничным условиям (1.6) на торцах при $x_3=0$ и $x_3=l$.

Подставляя (2.2) в (1.12), (1.2) и (1.7), получаем двумерную однородную задачу относительно $w_i(x_1, x_2)$ $(i=1, 2, 3, 4)$, которая полностью совпадает с соответствующей однородной задачей линейной классической теории упругости, если в последней параметр Ляме μ заменить величиной μ_0.

Последняя задача, как известно, имеет единственное тривиальное решение, если выполняются условия (2.1). Поскольку принимаем, что условия (2.1) должны выполняться всегда, то в данном случае состояние равновесия будет устойчивым независимо от формы поперечного сечения стержня.

Таким образом, пришли к выводу, что состояние равновесия стержня произвольного поперечного сечения, который помещен без трения между двумя абсолютно жесткими стенками, будет устойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «следящей» нагрузки. Заметим, что этот вывод получен для материала с произвольным упругим потенциалом.

«Мертвая» нагрузка. В этом случае рассмотрим стержень кругового поперечного сечения $(0\leqslant r\leqslant R;\ 0\leqslant x_3\leqslant l)$. Общее решение уравнений (1.12) и (1.2), следуя [7], в данном случае представим в виде

$$
u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial x_3}; \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta\partial x_3}
$$

$$
u_3 = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi; \qquad p_0 = \Delta\frac{\partial}{\partial x_3}\chi \tag{2.3}
$$

где ψ — гармоническая, а χ — бигармоническая функции,

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}
$$

Из выражения (1.8) получаем граничные условия на боковой поверхности при $r=R$ в виде

$$
\left[(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_r}{\partial r} - p\right] = 0
$$

$$
\left[(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + (\mu_0 - \sigma_0)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r} r u_\theta\right)\right] = 0 \tag{2.4}
$$

$$
\left[(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_3}{\partial r} + (\mu_0 - \sigma_0)\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial r}\right)\right] = 0
$$

Функции ψ и χ, удовлетворяющие граничным условиям (1.6) на торцах, выберем в следующей форме:

$$
\psi = \cos m\frac{\pi}{l}x_3 A I_n\left(m\frac{\pi}{l}r\right)\sin n\theta
$$

$$
\chi = \sin m\frac{\pi}{l}x_3\left[B I_n\left(m\frac{\pi}{l}r\right) + C m\frac{\pi}{l} r I_{n+1}\left(m\frac{\pi}{l}r\right)\right]\cos n\theta \tag{2.5}
$$

В (2.5) и ниже через $I_n(\alpha)$ обозначена функция Бесселя первого рода n-ого порядка от чисто мнимого аргумента, через A, B и C обозначены произвольные постоянные.

Подставляя решение в форме (2.5) в граничные условия (2.4) и учитывая (2.3), в результате обычной процедуры получаем характеристический определитель, который по форме совпадает с характеристическим определителем задачи, рассмотренной в работе [9].

По аналогии с [9] рассмотрим «стержневую» форму потери устойчивости ($m=n=1$) и для длинного стержня $\left(\alpha = \pi\frac{R}{l} < 1\right)$ вычислим характеристический определитель с точностью до двух членов разложения по параметру α. Как и в [9], в результате вычислений получаем следующее выражение для характеристического уравнения:

$$
\xi = \frac{2\mu_0 - \sigma_0}{16}\frac{\alpha^2}{R^2}\Big\{\left[\mu_0(2\mu_0 + 3\sigma_0) - (\mu_0 + \sigma_0)(2\mu_0 - \sigma_0)\right] +
$$

$$
+ \frac{\alpha^2}{8}\left[2\mu_0(7\mu_0 + 6\sigma_0) - (2\mu_0 - \sigma_0)(4\mu_0 + 3\sigma_0)\right]\Big\} \tag{2.6}
$$

Как следует из граничных условий (1.7) и (1.8), граничные условия для «следящей» нагрузки (1.7) можно получить из граничных условий для «мертвой» нагрузки (1.8), если в последнем выражении формально положить $\sigma_0=0$, которое входит явно. Аналогичным образом из (2.6) получаем характеристический определитель для случая «следящей» нагрузки в следующем виде:

$$\delta=\frac{3\mu_0^3\alpha^{11}}{32R^3} \tag{2.7}$$

В силу (2.1) из (2.7) следует, что $\delta>0$, то есть $\delta\neq0$. Следовательно, при действии «следящей» нагрузки состояние равновесия является устойчивым. Это обстоятельство является иллюстрацией вышеизложенного результата для стержня произвольного поперечного сечения при действии «следящей» нагрузки.

§ 3. Пример. Рассмотрим в рамках теории конечных докритических деформаций пример для тела с потенциалом Трелоара (неогуковского типа) при действии «мертвой» нагрузки. В принятых здесь обозначениях потенциал для неогуковского тела представим [7] в следующей форме:

$$\Phi^0=2C_{10}A_1^0 \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (1.8), получаем следующее выражение для определения μ_0:

$$\mu_0=2C_{10} \tag{3.2}$$

Для тонкого стержня $\left(\alpha=\pi\dfrac{R}{l}<1\right)$ при „стержневой" форме потери устойчивости ($m=n=1$) представим σ_0 в следующем виде:

$$\sigma_0\approx\sigma_0^{(0)}+\alpha^2\sigma_0^{(1)} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (2.6), с точностью до α^2 получаем следующее выражение:

$$(\sigma_0)_{кр}\approx-\frac{1}{2}p_{эл};\qquad p_{эл}=\frac{3}{2}C_{10}\alpha^2 \tag{3.4}$$

В (3.4) через $p_{эл}$ обозначена эйлерова сила при осевом сжатии. Следовательно, в случае действия «мертвой» нагрузки состояние равновесия является неустойчивым.

Вывод. Вышеизложенные результаты дают возможность сделать следующий вывод, относящийся к устойчивости несжимаемого стержня, который помещен без трения между двумя абсолютно жесткими стенками и к боковой поверхности которого приложено равномерное давление. Вывод заключается в том, что состояние равновесия будет устойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «следящей» нагрузки, и неустойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «мертвой нагрузки. В последнем случае для тонкого стержня критическая нагрузка приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы при осевом сжатии.

Институт механики АН УССР
Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 19 XII 1977

Ա. Ն. ԳՈՒԶ, Ա. Վ. ՆԱՎՈՅԱՆ

ՉՍԵՂՄՎՈՂ ՁՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտված է չսեղմվող ձողի կայունությունը, երբ ձողը առանց շփման տեղավորված է երկու բացարձակ կոշտ պատերի միջև և նրա կողմնային մակերևույթին կիրառված է հավասարաչափ ճնշում։ Արդյունքները ստացված են ընդհանուր տեսքով եռաչափ գծայնացված կայունության տեսությունների համար վերջավոր և փոքր նախակրիտիկական դեֆորմացիաների դեպքում։ Ապացուցված է, որ հավասարակշռության վիճակը կլինի կայուն, երբ կողմնային մակերևույթի վրա կիրառված ճնշումը լինի «հետևող» բեռնավորման տեսքով, և անկայուն, երբ կողմնային մակերևույթի վրա կիրառված ճնշումը լինի «մեռած» բեռնավորման տեսքով։ Վերջին դեպքում, ցույց է տրված, որ բարակ ձողի համար, կրիտիկական բեռնավորումը մոտավորապես երկու անգամ փոքր է էյլերյան ուժից առանցքային սեղման դեպքում։

ON STABILITY OF AN INCOMPRESSIBLE BAR UNDER UNIFORM LATERAL PRESSURE

A. N. GOOZ, A. V. NAVOYAN

S u m m a r y

The stability of an incompressible bar placed between two absolutely rigid walls, its lateral surface being under uniform pressure, is examined. The results are obtained in general form for three-dimensional linearized theories of stability for finite and small critical deformations. It is proved that the equilibrium is stable when compressive forces are of „following" type and is unstable when the forces are of „nonfollowing" (dead) type. In the latter case for a slender bar the value of critical forces are about twice as lower comparing to Eyler's forces in the axial compression.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих сжимаемых тел при равномерном боковом давлении. Прикл. механика, 1977, т. 13, № 10.
2. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих несжимаемых тел при равномерном боковом давлении. Прикл. механика, 1977, т. 13, № 11.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 6.
4. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих несжимаемых тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 11.
5. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии «мертвой» нагрузкой. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 12.
6. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. К., «Наукова думка», 1971, 276 с.
7. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. К., «Наукова думка», 1973, 270 с.
8. *Гузь А. Н.* Достаточные условия применимости метода Эйлера для случая «следящей» нагрузки, заданной на части поверхности тела. Докл. АН УССР, сер. А, 1977, № 10.
9. *Гузь А. Н.* Устойчивость несжимаемых цилиндров при всестороннем сжатии. Докл. АН УССР, сер. А, 1978, № 2.