

Ю. М. МАМЕДОВ

КРУЧЕНИЕ БРУСА ДВУСВЯЗНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ. ОБЛАДАЮЩЕГО ОСЯМИ СИММЕТРИИ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим однородный изотропный брус, ограниченный произвольной боковой поверхностью и двумя основаниями, перпендикулярными к боковой поверхности.

Пусть усилия, приложенные к основаниям, статически эквивалентны закручивающим парам, действующим в плоскостях оснований. Боковую поверхность бруса будем считать свободной от внешних усилий.

Поперечное сечение бруса представляет собой двусвязную область S , ограниченную изнутри окружностью L_1 радиуса R , а извне — гладким контуром L_2 произвольного очертания.

Возьмем одно из поперечных сечений бруса за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ и поместим начало координат в центре окружности L_1 .

За положительное направление обхода контуров L_1 и L_2 принимается такое направление, при котором ограниченная ими область S остается слева.

Как известно [1], задача определения напряжений в такой упругой среде сводится к нахождению функции $\varphi(z)$ регулярной в области S по переменной z из следующих краевых условий:

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(\bar{t})} = \bar{t}\bar{t} + 2C_1 \quad \text{на } L_1 \quad (1.1)$$

$$\varphi_2(t) + \overline{\varphi_2(\bar{t})} = t\bar{t} + 2C_2 \quad \text{на } L_2 \quad (1.2)$$

где t — аффикс точки кривой L_1 или L_2 , а C_1 и C_2 — некоторые постоянные; одна из них выбирается произвольно, а вторая определяется в процессе решения задачи.

Поскольку внутренним контуром является окружность, центр которой совпадает с началом координат, то на ней $\bar{t} = R^2/t$.

Учитывая это и принимая $2C_1 = -R^2$, приводим граничное условие (1.1) к следующему виду:

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(\bar{t})} = 0 \quad \text{на } L_1 \quad (1.3)$$

§ 2. Приведение задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

Следуя Д. И. Шерману [2—5], введем на кривой L_1 неизвестную чисто мнимую функцию $g(t)$ согласно равенству

$$\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)} = 2g(t) \quad \text{на } L_1 \quad (2.1)$$

Сложив почленно равенства (1.2) и (2.1), получим

$$\varphi_1(t) = g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t} + C_2 \quad (2.2)$$

Введем теперь наряду с имеющейся $\varphi_1(z)$ новую функцию $\varphi(z)$, также регулярную в области S и определяемую в ней равенством

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t-z} dt = C_2 \quad (2.3)$$

Функция $\varphi(z)$ в действительности регулярна не только в области S , но всюду вне (внутреннего) контура L_1 и, кроме того, исчезает на бесконечности, это следует из соблюдавшегося вне L_2 равенства, которое сопутствует (2.3)

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t-z} dt \quad (2.4)$$

Выражение для $\varphi_1(z)$ в области S , как следует из (2.3), будет таким:

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t-z} dt + C_2 \quad (2.5)$$

На основании теоремы Сохоцкого—Племеля последняя формула при $z \rightarrow t_0$ на L_2 записывается следующим образом:

$$\varphi_1(t_0) = \varphi(t_0) + \frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{4} t_0 \bar{t}_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t-t_0} dt + C_2 \quad \text{на } L_2 \quad (2.6)$$

Учитывая, что

$$\overline{g(t)} = -g(t) \quad (2.7)$$

выпишем выражение, сопряженное с (2.6). Будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1(t_0)} = \overline{\varphi(t_0)} - \frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{4} t_0 \bar{t}_0 - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{-g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t-t_0} d\bar{t} + C_2 \quad \text{на } L_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вычитая почленно равенство (2.8) из (2.6) и выполняя, учитывая (2.1), необходимые преобразования, получим для определения неизвестной функции уравнение Фредгольма II рода (в нем функция $\varphi(z)$ предполагается условно известной)

$$g(t_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} g(t) d \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-t_0} - [\bar{\tau}(t_0) - \overline{\tau(t_0)}] = \\ = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_2} t \bar{t} \left(\frac{dt}{t-t_0} + \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-t_0} \right) \quad (2.9)$$

Займемся решением уравнения (2.9) в предположении, что известна функция, конформно отображающая внешность единичного круга на внешность области, ограниченной контуром L_2 ; приближенное выражение для нее имеет вид следующего приведенного полинома [6]:

$$z = A \sum_{k=0}^s a_{kq} r^{-kq} \quad (2.10)$$

где

$$A = C_{-1}; a_{kq} = C_{kq-1}/C_{-1}; s = 2m_q - 1$$

Здесь C_{-1} , C_{kq-1} — коэффициенты отображающего полинома; m_q — число „узловых“ точек в секторе $0 < \theta < \frac{\pi}{q}$; q — число осей симметрии.

§ 3. Преобразование выведенного интегрального уравнения в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

Функцию $g(t) = g^*(\tau)$, где τ — аффикс точки единичной окружности, отображающей L_2 , назовем ее γ , разложим в комплексный ряд Фурье на окружности γ . Для упрощения примем условно

$$g^*(\tau) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\tau^k - \tau^{-k}) \quad (3.1)$$

где α_0 — чисто мнимая, а α_k — действительные величины (ниже станет ясно, что это допущение в последующем не приводит к противоречию).

Для определения неизвестных α_k ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) построим, исходя из интегрального уравнения (2.9), бесконечную систему линейных алгебраических уравнений.

Вычислим, используя (3.1), интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{g(t)}{t-z} dt \quad (3.2)$$

в котором точка z лежит внутри L_2 . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{g(t)}{t-z} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\alpha_0}{t-z} dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\tau^k}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau^{-k}}{t-z} dt \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

На основании свойств интегралов типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\alpha_0}{t-z} dt = \alpha_0 \quad (3.4)$$

Для вычисления интегралов, содержащихся под знаком суммы, обратим формулу (2.10) относительно переменной ζ ; при этом будем считать, что переменная z изменяется вне окружности наименьшего радиуса Γ , описанной вокруг L_2 . Это обращение может быть представлено в виде ряда

$$\zeta = \frac{z}{A} \sum_{k=0}^{\infty} C_{qk} \left(\frac{A}{z} \right)^{qk} \quad (3.5)$$

где постоянные C_{qk} однозначно определяются по заданным величинам. Возведем обе части равенства (3.5) в некую целую положительную степень ν . Найдем

$$\zeta^{(\nu)} = \left(\frac{z}{A} \right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} C_{qk}^{(\nu)} \left(\frac{A}{z} \right)^{qk} \quad (3.6)$$

Здесь $C_{qk}^{(\nu)}$ — некие новые постоянные; для их определения воспользуемся известной рекуррентной формулой [6]

$$C_{qk}^{(\nu)} = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k [(1+\nu)m - k] C_{qm} C_{q(k-m)}^{(\nu)} \quad (3.7)$$

После некоторых вычислений, сходных с выполненными в работах [4] и [6], получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\tau^k}{t-z} dt &= \sum_{n=k-qE(k/q)}^k C_{k-n}^{(k)} \left(\frac{z}{A} \right)^n \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau^{-k}}{t-z} dt &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $E\left(\frac{k}{q}\right)$ — целая часть $\frac{k}{q}$. Учитывая совместно равенства (3.8) и (3.4), преобразуем соотношение (3.3) к форме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t)}{t-z} dt = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=k-qE(k;q)}^k C_{k-n}^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^n \quad (3.9)$$

Перейдем теперь к вычислению содержащегося (справа) в уравнении (2.7) (и уже не зависящего от $g(t)$) интеграла. Имеем [6]

$$t\bar{t} = D_0 + \sum_{k=q}^{sq} D_k (\tau^k + \tau^{-k}) \quad (3.10)$$

где

$$D_0 = A^2 \sum_{m=0}^s a_{qm}^2 \quad (3.11)$$

$$D_k = A^2 \sum_{m=0}^{s-k/q} a_{qm} a_{q(m-k/q)}$$

Умножив почленно формулу (3.10) на ядро Коши и затем проинтегрировав по кривой L_1 , найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t\bar{t}}{t-z} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{D_0}{t-z} dt + \\ &+ \sum_{k=q}^{sq} D_k \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau^k}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau^{-k}}{t-z} dt \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рассуждая аналогично тому, как прежде, и учитывая выражение (3.8), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{2}{t-z} t\bar{t} dt = \frac{1}{2} \left[D_0 + \sum_{k=q}^{sq} D_k \sum_{n=k-qE(k;q)}^k C_{k-n}^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^n \right] \quad (3.13)$$

Беря во внимание формулы (3.9) и (3.13), преобразуем равенство (2.5) к следующему:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) = \varphi(z) + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=k-qE(k;q)}^k C_{k-n}^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^n + \\ + \frac{1}{2} \left[D_0 + \sum_{k=q}^{sq} D_k \sum_{n=k-qE(k;q)}^k C_{k-n}^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^n \right] + C_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Далее подставим это значение $\varphi_1(z)$ в краевое условие (1.3) и выполним ряд преобразований, в итоге приводящих к равенству, которому удовлетворяет функция $\varphi(z)$ на внутреннем контуре L_0 .

Оно выглядит так:

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{t}{A} \right)^n + \left(\frac{\bar{t}}{A} \right)^n \right] P_n - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=q}^{sq} \left[\left(\frac{t}{A} \right)^n + \left(\frac{\bar{t}}{A} \right)^n \right] L_n - 2 \sum_{k=q}^{\infty} a_k C_k^{(k)} - \\ & - \sum_{k=q}^{sq} D_k C_k^{(k)} - D_0 - 2C_2 \text{ на } L_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k C_{k-n}^{(k)} \\ L_n &= \sum_{k=n}^{sq} D_k C_{k-n}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из граничного условия (3.15) вытекает, что

$$\varphi(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{z} \right)^n \left(\frac{R}{A} \right)^n P_n - \frac{1}{2} \sum_{n=q}^{sq} \left(\frac{R}{z} \right)^n \left(\frac{R}{A} \right)^n L_n \quad (3.17)$$

при обязательном дополнительном соотношении

$$C_2 = - \sum_{k=q}^{\infty} a_k C_k^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{k=q}^{sq} D_k C_k^{(k)} - \frac{1}{2} D_0 \quad (3.18)$$

Преобразуем равенство (3.17) к переменной τ . Для этого используем формулу (2.10), предварительно сделав в ней соответствующую замену переменных (то есть, перейдя от точки z и $\bar{z}$ соответственно к t и $\bar{t}$); проделаем дополнительно некоторые вычисления, в результате получим

$$\varphi^*(\tau) = - \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_k^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_{k=q}^{\infty} \tau^{-k} M_k^{(2)} \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} M_k^{(1)} &= \sum_{n=k-qE\left(\frac{k-1}{q}\right)}^k P_n \left(\frac{R}{A} \right)^{2n} a_{k-n}^{(k-n)} \\ M_k^{(2)} &= \sum_{n=q}^{sq} L_n \left(\frac{R}{A} \right)^{2n} a_{k-n}^{(k-n)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Выпишем теперь равенство, сопряженное с (3.19). При этом

$$\overline{\varphi^*}(\tau) = - \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k M_k^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_{k=q}^{\infty} \tau^k M_k^{(2)} \quad (3.21)$$

Вычитая равенства (3.19) и (3.21) почленно одно из другого, находим

$$\varphi^*(\tau) - \overline{\varphi^*}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tau^k - \tau^{-k}) M_k^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=q}^{\infty} (\tau^k - \tau^{-k}) M_k^{(2)} \quad (3.22)$$

Вернемся сейчас к соотношению (3.9). Выполним в нем необходимые преобразования, связанные с переходом в правой части к переменной τ . Кроме того, примем во внимание равенство Сохоцкого-Племеля. Тогда найдем

$$\frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(t)}{t - t_0} dt = \Pi_n^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k \Pi_k^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} \Pi_k^{(4)} \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_n^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n a_n^{(n)} \\ \Pi_k^{(3)} &= \sum_{n=k}^{\infty} P_n a_{n-k}^{(n)} \\ \Pi_k^{(4)} &= \sum_{n=G(k)}^{\infty} P_n a_{n+k}^{(n)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь $G(k) = \frac{k+sq}{sq-1}$ и s — наименьшее целое положительное число, которое придает нижнему пределу суммы целое значение. Нижний предел суммирования для значений k , кратных q , обозначается через $G^*(k)$. При всех значениях k , кратных q , соблюдается неравенство $G^*(k) \leq k$ (в нем знак равенства имеет место лишь при $k=q$).

Далее приведем еще равенство, сопряженное с (3.23), помня, что в нем все коэффициенты — вещественные величины, $\bar{\tau} = \frac{1}{\tau}$ и $g(i)$ — чисто мнимая функция. Оно имеет вид

$$-\frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(t)}{t - t_0} d\bar{t} = \Pi_n^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} \Pi_k^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k \Pi_k^{(4)} \quad (3.25)$$

Вычитая же формулы (3.23) и (3.25) почленно одну из другой, получим

$$g(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} g(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-t_0} = \sum_{k=1}^{(q)} (\tau^k - \tau^{-k}) (\Pi_k^{(3)} - \Pi_k^{(4)}) \quad (3.26)$$

Рассуждая аналогично тому, как выше, из выражения (3.13) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi i} \int_{L_2} t \bar{t} \left[\frac{dt}{t-t_0} + \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_0} \right] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{sq} (\tau^k - \tau^{-k}) (M_k^{(2)} - M_k^{(n)}) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=2sq+q}^{sq(sq-1)} (\tau^k - \tau^{-k}) M_k^{(4)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

причем

$$\begin{aligned} M_k^{(3)} &= \sum_{n=G^*(k)}^{sq} L_n a_{n-k}^{(3)} \\ M_k^{(4)} &= \sum_{n=G^*(k)}^{sq} L_n a_{n-k}^{(n)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Наконец, в интегральном уравнении (2.9) учтем формулы (3.1), (3.22), (3.26), (3.27); проделав затем необходимые преобразования, получим бесконечную систему линейных уравнений для искомых неизвестных α_k с индексом, кратным q . Эта система достаточно проста и выглядит так:

$$4\alpha_k - 2 \sum_{p=q}^{\infty} a_p \Omega_{k,p} = T_k(G^*) - F_k(G^*) \quad (3.29)$$

При этом содержащиеся в ней коэффициенты находятся из равенств

$$\begin{aligned} \Omega_{k,p} &= \Omega_{k,p}^{(1)} + \Omega_{k,p}^{(2)} = \sum_{n=q}^{M(p,k)} \left(\frac{R}{A} \right)^{2n} a_{k-n}^{(p)} C_{p-n}^{(p)} + \\ &+ \sum_{n=G^*(k)}^p C_{p-n}^{(p)} [a_{n+k}^{(n)} - a_{n-k}^{(n)}] \\ T_k(G^*) &= M_k^{(3)} - M_k^{(4)} \\ F_k(G^*) &= M_k^{(2)} - M_k^{(1)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_{k,p}^{(2)} &= 0 \text{ для } p < G^*(k) \\ M(p,k) &= p \text{ для } p \leq k \\ M(p,k) &= k \text{ для } p > k \end{aligned}$$

Другие α_k (с индексами, не кратными q), как вытекает из (3.29), равны нулю.

Укоротим систему (3.29), сохранив в ней первые N уравнений. Решив так укороченную систему, можно определить первые N коэффициентов φ_k . Вообще говоря, входящие в укороченную систему φ_k ($k=1, 2, \dots, N$) отличны от нуля: $\varphi_k = 0$ для $k > Nq$.

В формуле (2.5) учтем значение функции $\varphi(z)$, а также интегралов, входящих в ее правую часть. Будем иметь

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=q}^{Nq} \left(\frac{z}{A}\right)^n P_n \left[1 - \left(\frac{R}{z}\right)^{2n}\right] + \frac{1}{2} \sum_{n=q}^{Nq} \left(\frac{z}{A}\right)^n L_n \left[1 - \left(\frac{R}{z}\right)^{2n}\right] + \tau_0 \quad (3.31)$$

§ 4. Вычисление жесткости при кручении

Для вычисления жесткости при кручении имеем [1]

$$D = \mu \int_{\Gamma} \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx dy \quad (4.1)$$

Применяя формулу Остроградского—Грина, получим

$$D = -\mu \int_{L_1, L_2} [\varphi(x, y)(x dx + y dy) + xy(x dx - y dy)] \quad (4.2)$$

Имея в виду, что

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \varphi(x, y) = -\frac{\varphi_1(z) - \overline{\varphi_1(z)}}{2i} \quad (4.3)$$

придадим формуле (4.2) следующий вид:

$$D = \mu \left\{ \frac{1}{4i} \int_{L_1, L_2} z \bar{z} dz + \frac{1}{4i} \int_{L_1, L_2} [\varphi_1(z) - \overline{\varphi_1(z)}] d(\bar{z}z) \right\} \quad (4.4)$$

Переходя в ней от переменного z к t и беря в расчет, что на L_2 произведение $i\bar{t} = R^2$, найдем

$$D = \mu \left\{ \frac{1}{4i} \oint_{L_1} [\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)}] d(\bar{t}t) + \frac{1}{4i} \oint_{L_1} \bar{t}^2 t dt + \frac{1}{4i} \oint_{L_1} \bar{t}^2 t dt \right\} \quad (4.5)$$

Так как

$$\frac{1}{4i} \oint_{L_1} \bar{t}^2 t dt = -\frac{\pi R^4}{2} \quad (4.6)$$

то выражение для жесткости принимает вид

^a Заметим, что интегрирование по контуру L_2 производится против часовой стрелки, а по контуру L_1 — по часовой стрелке.

$$D = \mu \left\{ \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} [\varphi_1'(z) - \overline{\varphi_1'(z)}] d[\omega(z) \overline{\omega(z)}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4i} \oint_{\Gamma} \overline{\omega^2(z)} \omega(z) d\omega(z) - \frac{\pi R^4}{2} \right\} \quad (4.7)$$

Здесь интегрирование производится против часовой стрелки.

С другой стороны, обратившись к формуле (3.31) и выполнив очевидные вычисления, придем к соотношению, справедливому на окружности γ (отображающей кривую L_*)

$$\varphi_1'(z) - \overline{\varphi_1'(z)} = \sum_{k=p}^{P_q(N, s)} (z^k - \overline{z}^k) \times \\ \times \left[E_k(G^*) + \frac{1}{2} T_k(G^*) \right] - \frac{1}{2} \sum_{k=2s_q+1}^{sq(s+1)} (z^k - \overline{z}^k) M_k^{(4)} + 2\alpha_0 \quad (4.8)$$

где введенные величины

$$E_k(G^*) = M_k^{(1)} + \frac{1}{2} M_k^{(2)} + \Pi_k^{(3)} - \Pi_k^{(4)} \quad (4.9)$$

причем верхние пределы суммирования в первой сумме таковы:

$$P_q(N, s) = Nq, \text{ если } N \geq s \\ P_q(N, s) = Sq, \text{ если } N < s \quad (4.10)$$

Взяв во внимание формулы (2.10) и (4.8), придадим равенству (4.7) после несложных промежуточных преобразований более удобную форму.

Окончательное выражение для жесткости при кручении примет вид

$$D = -\mu \pi \left\{ \frac{R^4}{2} + \frac{A^4}{4} \sum_{k=0}^{2s} (qk - 2) [a_{qk}^{(2)}]^2 + \right. \\ \left. + \sum_{k=q}^{sq} k D_k \left[E_k(G^*) + \frac{1}{2} T_k(G^*) \right] \right\} \quad (4.11)$$

§ 5. Вычисление касательных напряжений при кручении

Согласно работе [1] имеем

$$X_s - iY_s = \mu r \frac{M}{D} [\varphi'(z) - \overline{z}] \quad (5.1)$$

Воспользовавшись формулой (3.31), вычислим производную функцию $\varphi_1(z)$. Найдем

$$\varphi_1'(z) = \sum_{n=q}^{P_q(N, s)} \frac{n}{A^n} (z^{n-1} + R^{2n} z^{-(n+1)}) \left(P_n + \frac{1}{2} L_n \right) \quad (5.2)$$

Переходя здесь к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$, получим

$$\varphi_1'(z) = \sum_{n=q}^{P_q(N, s)} \left(P_n + \frac{1}{2} L_n \right) \frac{n}{A^n} \left\{ \left[r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \cos(n+1)\varphi \right] + i \left[r^{n-1} \sin(n-1)\varphi - \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \sin(n+1)\varphi \right] \right\} \quad (5.3)$$

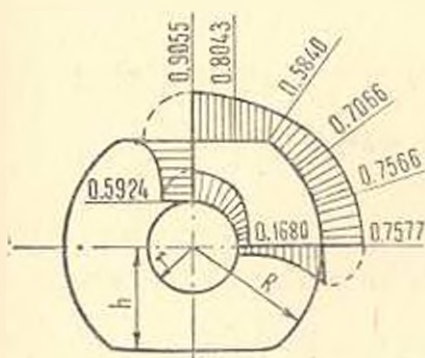
Подставляя значение $\varphi_1'(z)$ из формулы (5.3) в равенство (5.1) и отделяя в нем действительную и мнимую части, приходим к требуемым формулам для компонент касательных напряжений

$$X_z = -\mu \frac{M}{D} \left\{ r \sin \varphi + \sum_{n=q}^{P_q(N, s)} \frac{n}{A^n} \left(P_n + \frac{1}{2} L_n \right) \times \right. \\ \left. \times \left[r^{n-1} \sin(n-1)\varphi - \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \sin(n+1)\varphi \right] \right\} \quad (5.4)$$

$$Y_z = -\mu \frac{M}{D} \left\{ -r \cos \varphi + \sum_{n=q}^{P_q(N, s)} \frac{n}{A^n} \times \right. \\ \left. \times \left[r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \cos(n+1)\varphi \right] \right\} \quad (5.5)$$

здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{x}{y}$.

По формулам (5.4) и (5.5) могут быть вычислены составляющие напряжений в любой точке области, занимаемой поперечным сечением бруса.



Фиг. 1.

Вектор напряжения в точках контура области направлен по касательной к нему, и его величина дается формулой

$$T = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2} \quad (5.6)$$

Для решения задач кручения сплошных и полых призматических тел составлена программа на языке АЛГОЛ-60.

В качестве примера рассматривается кручение двукрышного вала с центральным круговым отверстием.

Геометрические параметры поперечного сечения вала

$$\frac{r}{R} = 0.4, \quad \frac{h}{R} = 0.7$$

Коэффициенты отображающего полинома при указанных геометрических размерах сечения содержатся в работе [6].

Жесткость при кручении $D/\mu R^4 = 1.156$.

Эпюра касательных напряжений, приведенных к единичному крутящему моменту ($M = 1 \text{ кг·см}$), представлена на фиг. 1.

Автор благодарит Д. И. Шермана за внимание, проявленное к настоящей работе.

Ждановский металлургический
институт

Поступила 20 VI 1977

ՅՈՒ. Մ. ՄԱՄԵԴՈՎ

ՍԻՄՏՐԻԱՅԻ ԱՌԱՆՑՔՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԵՐԿԿԱՊԱՆԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱՆՔԻ ԶՈՂԻ ՈՂՈՐՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո մ

Տրվում է բարդ ձևի երկկապանի լայնական կտրվածքով սնամեջ պրիզմաթիկ ձողերի սրոշ դասի խնդիրների լուծումը:

Փնտրվող ոլորման կոմպլեքս ֆունկցիան կառուցվում է Դ. Ի. Շերմանի եղանակով:

Ինժեներական կոնկրետ խնդիրների լուծման համար Ալյու—60-ի լեզվով կազմվել է ծրագիր:

Ենթվում է թվային օրինակ:

TORSION OF THE BEAM OF DOUBLY-CONNECTED CROSS-SECTION HAVING SYMMETRY AXES

Yu. M. MAMEDOV

S u m m a r y

The paper deals with the solution of a number of problems on torsion of hollow prismatic beams of doubly-connected cross-section of an intricate shape, the region occupied by the beam cross-section possessing symmetry axes.

The complex function of torsion sought for is found in terms of D. I. Sherman's method and represented as a transformed polynomial.

For solving particular engineering problems a program in the Algol-60 language is worked out providing a simple and universal method for numerical analysis of problems on torsion of solid and prismatic bodies with a specified form of cross-section.

A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мисхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966, стр. 496—504.
2. Шерман Д. И. Об одном методе решения некоторых задач теории упругости для двусвязных областей. Докл. АН СССР, 1947, т. V, № 8.
3. Шерман Д. И. Об одной задаче кручения. Докл. АН СССР, 1948, т. XIII, № 5.
4. Шерман Д. И. Про один метод розв'язання деяких задач кручення згину і плоскої теорії пружності для неоднотвірних областей. Прикл. механіка. В-во АН УССР, 1957, т. III, в. 4.
5. Шерман Д. И. Про напружений стан скручуваного квадратного бруса з симетричною круговою поперечною. Прикл. механіка. В-во АН УССР, 1958, т. IV, в. 3.
6. Ободовский Б. А., Урбанская В. С., Урбанский Р. Е. Кручение некруглых валов. М., «Высшая школа», 1974, стр. 112—168.