

Н. О. ГУЛКАНЯН, А. М. МКРТЧЯН

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА БЕЗ УЧЕТА ТРЕНИЯ

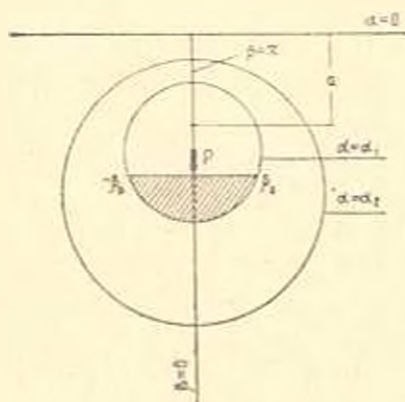
Первая основная задача для эксцентрического кольца в биполярных координатах решалась в [1, 2].

Смешанные задачи решались для частного случая эксцентрического кольца, а именно для полуплоскости с круговым отверстием [3, 4]. В обеих этих работах было принято, что штамп приложен к границе полуплоскости.

В данной статье рассматривается задача о вдавливании штампа в упругое эксцентрическое кольцо, когда между штампом и материалом кольца отсутствует трение. В частном случае получено решение для полуплоскости с круговым отверстием, внутри которого приложен штамп.

1. Задача решается в биполярной координатной системе, в которой эксцентрическое кольцо занимает область $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $-\pi \leq \beta \leq \pi$ (фиг. 1).

Вдоль дуги внутренней окружности $\alpha = \alpha_1$ по участку $|\beta| \leq \beta_1$ приложен жесткий гладкий штамп, а на остальной части контура кольца заданы нормальные напряжения. Принято, что касательные напряжения по всему контуру равны нулю.



Фиг. 1.

В силу симметрии будем рассматривать только половину основной области ($\beta \geq 0$), требуя при этом выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta) = \tau_{\alpha\beta}(\alpha_2, \beta) &= 0 & (0 \leq \beta \leq \pi) \\ \tau_{\alpha\beta}(\alpha, 0) = \tau_{\alpha\beta}(\alpha, \pi) &= 0 & (\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2) \\ V(\alpha, 0) = V(\alpha, \pi) &= 0 & (\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\alpha z_0(z_2, \beta) = f_2(\beta) \quad (0 \leq \beta \leq \pi) \quad (1.2)$$

$$2\mu U(z_2, \beta) = q(\beta) \quad (0 < \beta < \beta_0) \quad (1.3)$$

$$\alpha z_0(z_1, \beta) = f_1(\beta) \quad (\beta_0 < \beta < \pi)$$

a — половина расстояния между полюсами системы.

Функцию напряжений $\Phi(\alpha, \beta)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \Phi = 0 \quad (1.4)$$

при $ag = \operatorname{ch} \alpha - \cos \beta$ ищем в виде

$$g\Phi(\alpha, \beta) = A\beta \sin \beta + E_0 \operatorname{sh} \alpha + F_0 \alpha \operatorname{sh} \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha) \cos k\beta \quad (1.5)$$

На основании (1.5), используя связи напряжений и перемещений с функцией $g\Phi$ [1], находим

$$\begin{aligned} \alpha z_0 &= A[2 \cos \beta (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) - \sin^2 \beta] - F_0 \operatorname{sh}^2 \alpha - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} [k^2 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) - \operatorname{ch} \alpha] \Psi_k(\alpha) \cos k\beta + \\ &+ \sin \beta \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k(\alpha) \sin k\beta - \operatorname{ch} \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha) \cos k\beta \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\alpha z_{0\beta} = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k'(\alpha) \sin k\beta \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} 2\mu U &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left\{ A \frac{\beta \operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + E_0 \left(\operatorname{ch} \alpha - \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \right) + \right. \\ &+ F_0 \left(\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha - \frac{\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \right) \Big\} - \\ &- \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left\{ A \left(\frac{\alpha \sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} - \alpha \cos \beta \right) + F_0 \left(\operatorname{sh} \alpha - \frac{\beta \operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \right) \right\} + \\ &+ \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Psi_k'(\alpha) - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \Psi_k(\alpha) \right] \cos k\beta - \\ &- \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Psi_k'(\alpha) + (k^2 - 1) \int \Psi_k(x) dx \right] \cos k\beta - \right. \\ &- \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Psi_k'(\alpha) + (k^2 - 1) \int \Psi_k(x) dx \right] \frac{\sin k\beta}{k} \Big\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
2\mu V = & \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[\left(\sin \beta - \frac{\beta \sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + \beta \cos \beta \right) A - \right. \\
& \left. - \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} (F_0 + \alpha E_0) \right] + \\
& + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left[A \left(\frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} - \sin \beta \right) + F_0 \left(\beta \operatorname{ch} \alpha - \frac{\beta \operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \right) \right] - \\
& - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k(\alpha) \sin k\beta + \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha) \cos k\beta \right] + \\
& + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Psi'_k(\alpha) + \frac{k^2 - 1}{k} \Psi_k(\alpha) - \right. \\
& \left. - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \left[\Psi'_k(\alpha) + \frac{k^2 - 1}{k} \int_0^{\alpha} \Psi_k(x) dx \right] \right) \frac{\sin k\beta}{k} \quad (1.9)
\end{aligned}$$

λ, μ — постоянные Ламе.

Функцию $\Psi_k(\alpha)$ удобно представить в виде

$$\begin{aligned}
\Psi_k(\alpha) = & E_k \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha) \operatorname{sh} k(\alpha_1 - \alpha) + G_k \operatorname{sh} k(\alpha_1 - \alpha) \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_2) + \\
& + F_k \operatorname{sh} k(\alpha - \alpha_2) \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha) + H_k \operatorname{sh} k(\alpha - \alpha_2) \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_2) \quad k \geq 2 \quad (1.10)
\end{aligned}$$

$$\Psi_1(\alpha) = E_1 \operatorname{sh} 2(\alpha - \alpha_2) + G_1 \operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_2) + F_1(\alpha - \alpha_2) + H_1$$

Выбор функции $\Psi_k(\alpha)$ в таком виде обеспечивает автоматическое удовлетворение трех условий (1.1). Из остальных условий (1.1) имеем:

$$\Psi_k(\alpha_1) = 0, \quad \Psi_k(\alpha_2) = 0, \quad F_0 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} A \quad (1.11)$$

что равносильно

$$\begin{aligned}
H_k = E_k = 0 \quad \text{при} \quad k \geq 2 \\
2E_1 = -F_1, \quad F_1 = G_1 \operatorname{cth}(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (1.12)
\end{aligned}$$

С учетом (1.11) условие (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
- (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \beta) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(\alpha_2) \cos k\beta + \sin \beta \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k(\alpha_2) \sin k\beta + \\
+ \operatorname{ch} \alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha_2) \cos k\beta = f_2(\beta) - Q_2(\beta) \quad (0 < \beta \leq \pi) \quad (1.13)
\end{aligned}$$

где

$$Q_2(\beta) = A \left[2 \cos \beta (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \beta) - \sin^2 \beta - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \operatorname{sh}^2 \alpha_2 \right] \quad (1.14)$$

Рассматривая (1.13) как интегральное уравнение относительно

$$\varphi(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(z_2) \cos k\beta$$

находим решение этого уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(z_2) \cos k\beta &= \frac{\cos \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} z_2}{\operatorname{ch} z_2 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z_2) - \frac{R(\beta)}{\operatorname{ch} z_2 - \cos \beta} - \\ &- \int_0^{\beta} \frac{R(y) dy}{(\operatorname{ch} z_2 - \cos y)^2} [\sin y \operatorname{ch} z_2 \cos \beta + \sin \beta (1 - \operatorname{ch} z_2 \cos y)] \quad (1.15) \\ &(0 < \beta < \pi) \end{aligned}$$

где

$$R(y) = f_2(y) - Q_2(\beta) \quad (1.16)$$

Из (1.15) с учетом (1.16) получим

$$A = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f_2(y) (1 - \operatorname{ch} z_2 \cos y) dy}{(\operatorname{ch} z_2 - \cos y)^2} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \Psi_k(z_2) &= -\frac{2}{\pi k (k^2 - 1)} \int_0^{\pi} \frac{f_2(\beta) [k (\operatorname{ch} z_2 - \cos \beta) \cos k\beta - \sin \beta \sin k\beta] d\beta}{(\operatorname{ch} z_2 - \cos \beta)^2} \\ &(k \geq 2) \end{aligned}$$

$$\Psi_1(z_2) = \frac{1 - \operatorname{ch} z_2}{2} A + \frac{\operatorname{ch} z_2 - 1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f_2(\beta) Z(\beta) d\beta}{(\operatorname{ch} z_2 - \cos \beta)^2} \quad (1.18)$$

$$Z(\beta) = (\pi - \beta) \operatorname{ch} z_2 \sin \beta + \frac{\pi (1 + \operatorname{ch} z_2)}{1 + 2u} (\operatorname{ch} z_2 - \cos \beta)$$

Постоянные G_1 , H_1 , F_k и G_k выражаем через функции $\Psi_1(z_1)$ и $\Psi_1(z_2)$

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\Psi_1(z_1) - \Psi_1(z_2)}{\Delta_1}, \quad H_1 = \frac{\Psi_1(z_2) [1 + 2(\alpha_1 - z_2) \operatorname{cth}(\alpha_1 - z_2)] - \Psi_1(z_1)}{\Delta_1} \\ G_k &= \frac{k^2 - 1}{\Delta_k} [-\Psi_k(z_2) \operatorname{sh} k(\alpha_1 - z_2) + \Psi_k(z_1) k \operatorname{sh}(z_1 - z_2)] \quad (1.19) \\ F_k &= \frac{k^2 - 1}{\Delta_k} [\Psi_k(z_1) \operatorname{sh} k(\alpha_1 - z_2) - \Psi_k(z_2) k \operatorname{sh}(\alpha_1 - z_2)] \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = 2[(\alpha_1 - z_2) \operatorname{cth}(\alpha_1 - z_2) - 1], \quad \Delta_k = \operatorname{sh}^2 k(\alpha_1 - z_2) - k^2 \operatorname{sh}^2(z_1 - z_2) \quad (k > 1)$$

Смешанные условия (1.13) приводят к парным уравнениям ($k \geq 0$)

$$-\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} E_0 \operatorname{ch} x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k(x_1) \cos k\beta = G(\beta) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} q(\beta) \quad (0 < \beta < \beta_0) \quad (1.20)$$

$$2A \operatorname{ch} x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(x_1) \cos k\beta = \frac{T(\beta)}{\operatorname{ch} x_1 - \cos \beta} - \frac{f_1(\beta)}{\operatorname{ch} x_1 - \cos \beta} \quad (\beta_0 < \beta < \pi)$$

где $q(\beta)$ и $f_1(\beta)$ — заданные граничные функции, а $G(\beta)$, $T(\beta)$ — регулярные части в выражениях перемещения $U(x, \beta)$ и напряжения $\sigma_r(x_1, \beta)$.

Для дальнейшего удобно пользоваться разложениями

$$G(\beta) = \frac{\bar{G}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k \cos k\beta, \quad \frac{T(\beta)}{\operatorname{ch} x_1 - \cos \beta} = \frac{T_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} T_k \cos k\beta \quad (1.21)$$

$\bar{G}_k$ и T_k легко вычисляются при помощи интегралов [1]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta d\beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} = \frac{2\pi}{\operatorname{sh} \alpha} e^{-n\alpha} \quad (1.22)$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{G}_0 &= -2\lambda \left[\delta \operatorname{sh} x_1 E_0 + \frac{\mu \operatorname{sh} x_1}{\lambda + 2\mu} A + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(x_1) e^{-kx_1} \right] \\ &\quad + 2 \sum_{k=2}^{\infty} [(1 - N_k) \Psi_k(x_1) - M_k \Psi_k(x_2)] e^{-kx_1}, \\ \bar{G}_1 &= \Psi_1(x_1) - 2\lambda \left[\delta \operatorname{sh} x_1 e^{-x_1} E_0 - \frac{x_1(\lambda + 3\mu) e^{-x_1} \operatorname{sh} x_1}{\lambda + 2\mu} A + \right. \\ &\quad \left. + \delta \operatorname{ch} x_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(x_1) e^{-kx_1} \right] + 2 \operatorname{ch} x_1 \sum_{k=2}^{\infty} [(1 - N_k) \Psi_k(x_1) - M_k \Psi_k(x_2)] e^{-kx_1}, \\ \bar{G}_n &= -2\lambda \delta \operatorname{sh} x_1 e^{-nx_1} E_0 + \frac{2nx_1(\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} \operatorname{sh} x_1 e^{-nx_1} A + \\ &\quad + \delta x_1 \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} \Psi_k(x_1) + n [\Psi_n(x_1) N_n + M_n \Psi_n(x_2)] + [(1 - N_n) \Psi_n(x_1) - \\ &\quad - M_n \Psi_n(x_2)] e^{-2nx_1} + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq n}}^{\infty} [(1 - N_k) \Psi_k(x_1) - M_k \Psi_k(x_2)] b_{n,k} \quad (1.23) \end{aligned}$$

($n \geq 2$)

$$\begin{aligned}
T_0 &= 2 \left[e^{-z_1} + \left(2 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \operatorname{sh} z_1 \right] A + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (k + \operatorname{cth} z_1) \Psi_k(z_1) e^{-kz_1} \\
T_1 &= \left[e^{-2z_1} + 2 \left(2 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \operatorname{sh} z_1 e^{-z_1} \right] A + \\
&\quad + 2 \operatorname{ch} z_1 \sum_{k=2}^{\infty} k \Psi_k(z_1) e^{-kz_1} + \Psi_1(z_1) e^{-2z_1} + \operatorname{cth} z_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z_1) b_{k1} \quad (1.24) \\
T_n &= 2 \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \operatorname{sh} z_1 e^{-nz_1} A + n \Psi_n(z_1) e^{-2nz_1} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k(z_1) b_{kn} + \operatorname{cth} z_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z_1) b_{kn} \quad (n \geq 2)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
2\Delta_k N_k &= -2k^2 \operatorname{sh}^2 z + 2k \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z - 1 + e^{-2kz} \\
b_{kn} &= e^{-(n+k)z_1} + e^{-(|k-n|)z_1}, \quad z = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \\
\delta &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad \Delta_k M_k = \operatorname{ch} z \operatorname{sh} kz + k \operatorname{sh} z \operatorname{ch} kz
\end{aligned} \quad (1.25)$$

Используя результаты [5], решение уравнений (1.20), с учетом разложений (1.21), получим в виде

$$\begin{aligned}
p \Psi_p(z_1) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{G}_k J_{pk}(\cos \beta_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} T_k I_{pk}(\cos \beta_0) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\cos \theta) z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q(\cos \theta) z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \\
&\quad + \frac{1}{2p} (4 \operatorname{ch} z_1 A - T_0) y_p(\cos \beta_0) \quad (1.26)
\end{aligned}$$

Здесь

$$J_{pk}(\cos \beta_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_p(\cos \theta) z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$F(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{f(\beta) \sin \frac{\beta}{2} d\beta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \beta}}, \quad Q(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{g(\beta) \sin \frac{\beta}{2} d\beta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \theta}}$$

$$I_{pk}(\cos \beta_0) = \int_{\beta_0}^{\beta} z_p(\cos \theta) z_k(\cos \beta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta, \quad f(\beta) = \frac{f_1(\beta)}{\operatorname{ch} z_1 - \cos \beta} \quad (1.27)$$

$$z_p(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x), \quad y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x)$$

а $P_k(x)$ — полиномы Лежандра.

Подставляя (1.26) в первое уравнение (1.20), определим постоянную E_0 .

$$\frac{\mu \operatorname{ch} z_1}{\lambda + 2\mu} E_0 = (T_0 - 4A \operatorname{ch} z_1) \ln \sin \frac{\beta_0}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{G}_k - \frac{T_k}{k} \right) y_k(\cos \beta_0) -$$

$$- \frac{G_0}{2} + g(0) + \frac{1}{2} \int_{\beta_0}^{\beta} F(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\beta_0} Q(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (1.28)$$

Как видно из (1.23–1.25), $\bar{G}_k$ и T_k выражаются через $\Psi_p(z_1)$, следовательно, (1.26) и (1.28) можно рассматривать как бесконечную систему относительно $p \Psi_p(z_1)$ и E_0 . Сумма модулей коэффициентов при $p \Psi_p(z_1)$ в (1.26) стремится к нулю, как $\frac{\ln p}{\sqrt{p}}$, а свободные члены

бесконечной системы ограничены и стремятся к нулю как $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Следовательно, система (1.26) квазивполне регулярна.

Подставляя (1.26) в (1.6) при $\alpha = \alpha_1$ с использованием значения ряда

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(\cos \theta) \cos k\beta = \begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{\beta}{2} (\cos \beta - \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} & (\theta > \beta) \\ 0 & (\theta < \beta) \end{cases} \quad (1.29)$$

получим

$$u z_k(z_1, \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\beta}{2} (\operatorname{ch} z_1 - \cos \beta) \left[\frac{R}{\sqrt{\cos \beta - \cos \beta_0}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\beta} \frac{Q(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \theta}} + \sum_{k=1}^{\infty} k [k \bar{G}_k - T_k] \int_0^{\beta} \frac{y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{(\cos \beta - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\beta} \frac{F(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \theta}} \right] + \frac{F(-1)}{2} (\operatorname{ch} z_1 - \cos \beta) \quad (0 < \beta < \beta_0) \quad (1.30)$$

R — постоянная, входящая в коэффициент особенности контактного напряжения при $\beta = \beta_0$, которая определяется формулой

$$R = 4A \operatorname{ch} \alpha_1 - T_0 + F(\cos \beta_0) - Q(\cos \beta_0) - \sum_{k=1}^{\infty} [kG_k - T_k] z_k(\cos \beta_0) \quad (1.31)$$

2. Численный пример.

Рассматривается случай, когда фиксированы параметры:

$$\alpha_1 = 1.009, \quad \alpha = 1, \quad f_1(\beta) = 0, \quad \nu = 0.35, \quad E = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad g(\beta) = 0$$

$$f_2(\beta) = \begin{cases} -q_0 & 0 < \beta < \beta_2 \\ 0 & \beta_2 < \beta < \pi \end{cases}$$

и варьируются геометрические параметры: внешний радиус α_1 , область задания равномерно распределенной нагрузки на внешнем контуре β_1 , область приложения гладкого штампа на внутреннем контуре β_0 .

В табл. 1—3 приведены значения коэффициента при особенности $(\cos \beta - \cos \beta_0)^{-1/2}$

$$R^*/q_0 = \frac{1.2}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta_0) R$$

причем в табл. 1 и 2 фиксировано α_1 , а в табл. 3 фиксировано β_0 .

Таблица 1

$\alpha_2 = 0.25$			
$\beta_1 \backslash \beta_0$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/10$
$\pi/10$	1.2394	0.3325	0.2974
$3\pi/10$	-1.3521	0.7203	-0.2107

Таблица 2

$\alpha_2 = 0.5$			
$\beta_1 \backslash \beta_0$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/10$
$\pi/20$	1.3961	0.3631	0.2632
$2\pi/20$	1.04762	0.7044	0.5737
$3\pi/20$	1.7916	1.4957	1.3639

Таблица 3

$\beta_0 = \pi/10$			
$\alpha_1 \backslash \beta_1$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/10$
0.5	1.0475	0.7043	0.5737
0.8	-0.8491	-0.3679	-0.2997

3. Частные случаи.

а) Подставляя в решение задачи $\alpha_1 = 0$, получим решение контактной задачи для полуплоскости, ослабленной круговым отверстием, на границе которой действует гладкий жесткий штамп. При этом $f_2(\beta)$ при $\beta \rightarrow 0$ должно стремиться к нулю как β . Иными словами, граница полуплоскости ($\alpha_1 = 0$) на бесконечности должна быть свободна от нагрузок.

б) Из решения данной задачи можно получить решение задачи, когда штамп приложен к внешнему контуру кольца. Для этого достаточно в соответствующих формулах поменять местами α_1 и α_2 . Если, кроме этого, принять радиус внешней окружности равным бесконечности (то есть принять $\alpha_2 = 0$), то получаем решение для полуплоскости с круговой полостью, когда на границе полуплоскости приложено два симметрично расположенных полубесконечных штампа. Решение такой задачи ранее было получено в работе [4].

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 17 III 1978

Ա. Ո. ԳՈՒԼԿԱՆԻԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉԻԱՆ

ՍՐՏԱԿՆՏՐՈՆ ՈՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ԱՌԱՆՑ ՇՓՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ

Ա մ փ ո լ ի ո մ

Դիտարկված է արտակենտրոն օղակի համար հարթ կոնտակտային խնդիր, երբ ներքին (արտաքին) հղրագծի վրա ազդում է կոշտ ողորկ դրոշմ:

Երկրենի կոսրղինասային սիստեմում, ֆուրյեի շարքերի օգնությամբ, խնդրի լուծումը բերվում է նախ դույզ շարքեր հավասարումների, այնուհետև բավարարվող լիովին ուղղվար հանրահաշվական հավասարումների սիստեմի:

Մասնավոր դիպրում ստացվում է կոշտ անցրով թուլացված կիսահարթության համար կոնտակտային խնդրի լուծումը, երբ անցքի ներսում ազդում է դրոշմ:

Դիտարկված է թվալին օրինակ:

A PLANE CONTACT PROBLEM FOR AN ECCENTRIC RING TAKING NO ACCOUNT OF FRICTION

N. O. GULKANIAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A problem on pressing a punch into an elastic eccentric ring with no friction between the punch and the ring's material is considered. In the particular case a solution is obtained for a semi-plane with a circular hole to which the punch is applied. The problem is reduced to dual series-equations which in their turn are reduced to a quasi-regular infinite system of linear equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.—Л., 1950.
2. Езян В. В. Плоская задача теории упругости для эксцентричного кольца. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 1964, т. 17, № 1.
3. Араманович И. Г. Задача о давлении штампа на упругую полуплоскость с круговым отверстием. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 4.
4. Александриян М. А. Контактная задача для полуплоскости, ослабленной круговой полостью. Докл. АН Арм. ССР, 1968, т. XVI, № 5.
5. Баблюк А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, 1967, т. 31, в. 4.