ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 3, 1978 Механика

И. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Во многих явлениях природы и в многочисленных технических приложениях теория распределения позволяет записывать одинаковые выражения и составить некоторые общие методы для изучения явлений, существенно облегчая вычисления.

Целью настоящей работы является уточнение определенных зависимостей теории поля, представление электрических (или тяготение) силовых полей однородными выражениями, независящими от формы тела, создающего поля (точки, конечная система точек, кривая или поверхность). Преимущество этого обобщенного представления очевидно. Оно состоит в получении обобщенных соотношений, включающих возможные частные случаи.

1. *Выражение силы в поле нагрузки, распределенной по некоторому объему.*

Пусть электростатически нагруженное трехмерное тело занимает объем V. Предполагается, что в точке P, когда $P(\alpha, \beta, \gamma) \in V$, приложена нагрузка dq

$$dq = [\rho(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha d\beta d\gamma] \tag{1.1}$$

где $\rho(\alpha, \beta, \gamma)$ — плотность нагрузки в точке $P(\alpha, \beta, \gamma)$ из области V.

Если обозначить через $U(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)$ силовую функцию для единичной нагрузки, то элементарная нагрузка dq будет создавать силовое поле в точке M пространства с координатами x, y, z, характеризуемое силой

$$d\overline{F} = \operatorname{grad} U \cdot dq \tag{1.2}$$

Согласно (1.1) можно записать в общепринятой терминологии

$$d\overline{F} = \left(\overline{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}\right)\rho(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha d\beta d\gamma \tag{1.3}$$

Итак, в текущей точке $M(x, y, z)$ пространства совокупность нагрузок, занимающих неизменный сплошной объем V, будет вызывать силу поля

$$\overline{F} = \int\limits_{(V)} d\overline{F} = \iiint\limits_{(V)} \left(\overline{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}\right)\rho(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha d\beta d\gamma \tag{1.4}$$

Это равенство верно только для рассматриваемого случая, а именно, для случая, когда нагрузки ,создающие силовое поле, занимают объем V.

2. *Введение распределения Дирака в силовых полях.*

Задаваясь любыми α_s, β_s, γ_s, легко получить, что

$$U(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)\,\delta(\alpha-\alpha_s, \beta-\beta_s, \gamma-\gamma_s) =$$

$$= U(x-\alpha_s, y-\beta_s, z-\gamma_s)\,\delta(\alpha-\alpha_s, \beta-\beta_s, \gamma-\gamma_s) \qquad (2.1)$$

где $\delta(\alpha-\alpha_s, \beta-\beta_s, \gamma-\gamma_s)$ — распределение Дирака, а α, β, γ — координаты текущей точки, принадлежащей объему V. Отсюда следует, что

$$\overline{\nabla}\,[U(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)\,\delta(\alpha-\alpha_s, \beta-\beta_s, \gamma-\gamma_s)] =$$

$$= \overline{\nabla}\,[U(x-\alpha_s, y-\beta_s, z-\gamma_s)\,\delta(\alpha-\alpha_s, \beta-\beta_s, \gamma-\gamma_s)] \qquad (2.2)$$

где оператор

$$\overline{\nabla} = \overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Равенства (2.1), (2.2) и (1.4) могут быть использованы в следующих случаях:

а) случай конечного множества нагрузок. При этом нагрузки q_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ расположены в точках $P_s(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$.

В этом случае плотность будет

$$\overline{\rho} = \sum_{s=1}^{n} q_s\,\delta(\alpha-\alpha_s, \beta-\beta_s, \gamma-\gamma_s) \qquad (2.3)$$

Подставляя это выражение в (1.4) и учитывая (2.1) и (2.2), получим

$$\overline{F} = \iiint\limits_{(V)} \left[\overline{\nabla} U(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma) \sum_{s=1}^{n} \delta(\alpha-\alpha_s, \beta-\beta_s, \gamma-\gamma_s)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\right] \qquad (2.4)$$

откуда

$$\overline{F} = \sum_{s=1}^{n} q_s\,[\overline{\nabla} U(x-\alpha_s, y-\beta_s, z-\gamma_s)] \qquad (2.5)$$

б) нагрузка составляет одномерную постоянную систему (кривая). Пусть

$$\alpha = \varphi(t), \quad \beta = \psi(t), \quad \gamma = \theta(t) \qquad (2.6)$$

— параметрическое уравнение этой кривой.

Для криволинейной координаты s имеем:

$$s = \int_{0}^{t} \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (2.7)$$

Допустим, что плотность нагрузки изменяется вдоль кривой по закону $q=q(s)$.

Следовательно,

$$d\rho = q(s)\,\delta[\alpha - \varphi(t),\ \beta - \psi(t),\ \gamma - \theta(t)]\,ds \tag{2.8}$$

или на основании равенства (2.7)

$$\rho = \int\limits_{(C)} g(t)\,\delta[\alpha - \varphi(t),\ \beta - \psi(t),\ \gamma - \theta(t)]\,dt \tag{2.9}$$

где

$$g(t) = q\left[\int\limits_0^t \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\,dt\right] \times$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \tag{2.10}$$

Интеграл (2.9) берется по кривой C, заданной уравнениями (2.6). Тогда

$$\overline{F} = \iiint\limits_{(V)} \nabla U\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \left[\nabla U(x-\varphi,\ y-\psi,\ z-\theta)\int\limits_{(C)} g(t)\,\delta(\alpha-\varphi,\ \beta-\psi,\ \gamma-\theta)\,dt\right] d\alpha\,d\beta\,d\gamma \tag{2.11}$$

то есть

$$\overline{F} = \int\limits_{(C)} \{\nabla U[x-\varphi(t),\ y-\psi(t),\ z-\theta(t)]\}\,g(t)\,dt \tag{2.12}$$

в) материальная система, создающая поле, размещена по поверхности. Пусть параметрическое уравнение поверхности будет:

$$\alpha = \sigma(\lambda,\nu),\ \beta = \zeta(\lambda,\nu),\ \gamma = \mu(\lambda,\nu) \tag{2.13}$$

где λ и ν — криволинейные координаты поверхности.

Если $\eta(\lambda,\nu)$ — нагрузка единицы поверхности, то

$$\rho = \iint\limits_{(A)} \eta(\lambda,\nu)\left\{\left|\frac{\partial(\zeta,\mu)}{\partial(\lambda,\nu)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\mu,\sigma)}{\partial(\lambda,\nu)}\right|^2 +\right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial(\sigma,\zeta)}{\partial(\lambda,\nu)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \delta(\alpha-\sigma,\ \beta-\zeta,\ \gamma-\mu)\,d\lambda\,d\nu \tag{2.14}$$

где A — поверхность, по которой распределена нагрузка.

Тогда

$$\bar{F} = \iiint\limits_{(V)} \bar{\nabla} U(x-\alpha,\ y-\beta,\ z-\gamma)\,\rho\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \tag{2.15}$$

примет вид

$$\bar{F} = \iint\limits_{(A)} \{\bar{\nabla} U[x-\xi(\lambda,\nu),\ y-\zeta(\lambda,\nu),\ z-\eta(\lambda,\nu)]\}\, f(\lambda,\nu)\, d\lambda\, d\nu \tag{2.16}$$

где

$$f(\lambda,\nu) = \rho(\lambda,\nu)\left\{\left|\frac{\partial(\zeta,\eta)}{\partial(\lambda,\nu)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\eta,\xi)}{\partial(\lambda,\nu)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\xi,\zeta)}{\partial(\lambda,\nu)}\right|^2\right\}^{1/2}$$

* * *

Вышеприведенные соотношения могут быть использованы в случаях, когда материальная система состоит из электрических нагрузок, составленных объединением нагрузок, распределенных по объему, поверхности, кривой (а именно, конечные трехмерные, двумерные и одномерные множества). Таким образом, предложенный метод выражения силовых полей является достаточно общим.

Петрошанский горный институт
(Румыния)

Поступила 2 XII 1977

Ի. Ն. ԿՈՆՍՏԱՆՏԻՆԵՍԿՈՒ

ՈՒԺԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԲԱՇԽՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՕԳՏԱԳՈՐԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում են վերջավոր մարմնի վրա էլեկտրական դաշտի ազդեցության կառուցման հարցերը մարմնի մեջ էլեկտրական լիցքերի տարբեր բաշխումների ժամանակ։

Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ բեռի խտությունը արտահայտվում է Դիրակի ֆունկցիաներով և բեռը կիրառված է մարմնի տարբեր կետերում։

Ուժի ազդեցությունը կառուցվել է, երբ լիցքերը բաշխված են վերջավոր թվով կետերում, ողորկ կորի կամ ողորկ մակերևույթի վրա, Ստացված արդյունքները կարելի է տարածել բավական լայն դասի դաշտերի վրա։

ON THE USE OF THE DISTRIBUTION THEORY FOR THE STUDY OF SOME FORCE FIELDS

I. N. CONSTANTINESCU

Summary

Using the theory of distribution, the treatment of some energetic fields with discontinuous characteristics is discussed. The results obtained are applied to the study of impacts of some particles in contact with rigid surfaces, as well as to traversing some media formed in strata with different resistances opposed to the entrance of the particles that cross them, underlining also the connection of the above with some aspects in optics.

Some numerical examples are given.