

Г. Г. ОГАНЯН

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКИ ГАЗА

Рассматривается задача о распространении слабых ударных волн в химически активной жидкости, содержащей пузырьки инертного газа, причем изменение состава смеси определяется протеканием одной химической реакции. В зависимости от отношения времени протекания реакции к макроскопическому времени различают квазизамороженный и квазиравновесный предельные процессы распространения возмущений [1]. Ударные волны в химически инертных газожидкостных смесях рассматривались в [2—5].

В настоящей работе для предельных процессов методом коротких волн выводятся нелинейные уравнения, описывающие течение смеси в окрестности ударных волн. В линейной постановке формулируются и решаются задачи о поршне, вдвигаемом в смесь с постоянной скоростью, а затем исследуются асимптотические поведения решений вдали от фронта волны.

Отдельному рассмотрению подвергаются среды, в которых предельные скорости распространения возмущений по величине близки друг к другу. Выводится нелинейное уравнение, описывающее распределение скорости частиц смеси в окрестности ударной волны.

1. Предположим, что в потоке химически активной многокомпонентной смеси вязких жидкостей с газовыми включениями (пузырьками) происходит только одна химическая реакция типа

$$\sum_{k=1}^n \nu_k A_k \rightleftharpoons \sum_{k=1}^n \nu_k' A_k$$

где слева стоят реагенты, а справа — продукты реакции, ν_k, ν_k' — стехиометрические коэффициенты, A_k — символы химических элементов. Допустим, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью, так что распределение пузырьков можно не детализировать. Считая, что расстояние между пузырьками намного больше радиуса R пузырька, можно пренебречь взаимодействием между пузырьками, и пульсации одиночного пузырька описать уравнением Херринга-Флинна, учитывающим сжимаемость жидкой фазы, причем газовая фаза рассматриваемой газожидкостной смеси химически инертна и изотермична. Тогда изменение состава газожидкостной смеси будет обусловлено изменением состава жидкой фазы посредством параметра η , называемым полнотой химической реакции.

Систему уравнений, описывающую движение смеси, возьмем в виде [3, 6], причем параметры течения, отнесенные к жидкой фазе, обозна-

чены индексом «1», к газовой фазе, — индексом «2», а ко всей смеси — без индекса

$$\frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dx} = 0, \quad v \frac{du}{dt} - \frac{dP}{dx} - \frac{4}{3} \lambda_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$v \left(T \frac{ds}{dt} + Q \frac{dq}{dt} \right) = \frac{4}{3} \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\tau_*} H_1 Q \quad (1.2)$$

$$P_2 - P = \lambda_1 R \left(1 - \frac{2}{a_{10}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \lambda_1 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1}{a_{10}} \frac{dR}{dt} \right) \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\lambda_1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{k}{a_{10}} \left(1 - \frac{1}{a_{10}} \frac{d}{dt} \right) \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\lambda_1}{R} \frac{dR}{dt} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{P_2^2}{\lambda_1 (1 - \beta)} = \text{const}, \quad \lambda = \lambda_1 (1 - \beta), \quad P_2 R^2 = \text{const} \quad (1.4)$$

Здесь t — время, x — координата, u — скорость частиц смеси, ρ — плотность, P — давление, T — температура, s — энтропия, λ_1 — динамический коэффициент вязкости, Q — сродство химической реакции, a_{10} — невозмущенная скорость звука в жидкой фазе, β — объем газа в единице объема смеси, τ_* — время протекания химической реакции, феноменологический коэффициент $H_1 > 0$ согласно второму закону термодинамики для необратимых процессов.

Предположим, что в любой момент времени и в каждой точке пространства параметры течения мало отклоняются от соответствующих параметров в состоянии покоя, представляющего собой состояние полного термодинамического равновесия

$$P_2 = P_0 + \varepsilon P', \quad v = v_0 + \varepsilon v', \quad \lambda_1 = \lambda_{10} + \varepsilon \lambda_1', \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \beta', \quad R = \varepsilon^{1/2} (R_0 + \varepsilon R') \quad (1.5)$$

$$q = q_0 + \varepsilon q', \quad s = s_0 + \varepsilon s', \quad T = T_0 + \varepsilon T', \quad Q = \varepsilon Q', \quad u = \varepsilon u', \quad \lambda_1 = \varepsilon^2 \lambda_1'$$

Здесь ε — безразмерный малый параметр, индекс «0» относится к невозмущенным величинам.

Рассматриваемую область течения релаксирующей газожидкостной смеси будем считать областью коротких волн. Поэтому за независимые переменные принимаются

$$t = t', \quad x = a_0 t' + \varepsilon r \quad (1.6)$$

где a_0 — зависящая от процесса распространения возмущений невозмущенная скорость звука в смеси.

В дальнейшем при упрощении исходных уравнений (1.1)–(1.4) будут удержаны лишь главные члены, причем штрихи над возмущениями характеристик течения опускаются.

Упрощая первое и второе уравнения из (1.4) и комбинируя их друг с другом, в основном порядке получаем

$$\beta = \frac{\beta_0}{\rho_0} \rho + \frac{\beta_0}{P_0} P, \quad \beta_1 = \frac{1}{(1 - \beta_0)^2} \left(\rho - \frac{\beta_0 \rho_0}{P_0} P \right) \quad (1.7)$$

Аналогичное упрощение третьего уравнения (1.4) дает

$$R = - \frac{R_0}{3P_0} P \quad (1.8)$$

Теперь преобразуем уравнение неразрывности из (1.1). С помощью уравнений (1.4) легко показать [3], что рассматриваемое уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + u \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{P_2}{\beta} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{P_2 (1 - \beta)^2}{\beta \rho} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.9)$$

В случае несжимаемой жидкости ($\rho_1 = \text{const}$) уравнение (1.9) совпадает с уравнением, полученным в [4].

Из первых двух уравнений (1.4) нетрудно получить связь между скоростью звука и смеси a_0 и скоростью звука a_{10} в жидкой фазе [3]

$$\frac{1}{a_0^2} = \frac{\beta_0 \rho_0}{P_0} + \frac{(1 - \beta_0)^2}{a_{10}^2} \quad (1.10)$$

2. Квазиравновесный процесс

Ввиду того, что вид процесса распространения возмущений определяется химической реакцией, протекающей в жидкой фазе, примем за независимые термодинамические переменные давление P_1 , плотность ρ_1 , средство Q . Из самой постановки задачи следует, что $P_1 = P(\rho_1, Q, s)$, $s_1 = s$, поэтому приращение удельной энтропии можно записать в виде

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho_1} \right)_{PQ} \left[d\rho_1 - \frac{1}{a_{1e}^2} dP - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial Q} \right)_{P_s} dQ \right], \quad a_{1e}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{Qs} \quad (2.1)$$

где a_{1e} — равновесная скорость звука в жидкой фазе. Имея в виду соотношение (2.1), преобразованное уравнение неразрывности (1.9) можно записать как

$$\begin{aligned} & \frac{dP_2}{dt} + \frac{P_2}{\beta} \frac{du}{dx} + \frac{P_2 (1 - \beta)^2}{\beta \rho a_{1e}^2} \frac{dP_2}{dt} = \\ & = - \frac{P_2 (1 - \beta)^2}{\beta \rho} \left[\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial s} \right)_{PQ} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial Q} \right)_{P_s} \frac{dQ}{dt} \right] \end{aligned}$$

Комбинирование полученного соотношения с уравнениями потока тепла (1.2) и пульсации пузырька (1.3) дает

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{P_2 (1 - \beta)^2}{\beta \rho a_{1e}^2} \right] \frac{dP_2}{dt} + \frac{P_2}{\beta} \frac{du}{dx} - \\ & - \frac{P_2 (1 - \beta)^2}{\beta \rho a_{1e}^2} \frac{d}{dt} \left[\gamma_1 R \left(1 - \frac{2}{a_{1e0}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{d^2 R}{dt^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3}{2} \gamma_1 \left(1 - \frac{i}{3a_{1e0}} \frac{dR}{dt} \right) \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4i_1}{R} \frac{dR}{dt} - \\
 & - \frac{R}{a_{1e0}} \left(1 - \frac{1}{a_{1e0}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(P_2 - \frac{4i_2}{R} \frac{dR}{dt} \right) \Big| = \\
 & = \frac{P_2(1-\beta)^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial s} \right)_{pQ} \left[\frac{Q}{T} \frac{dq}{dt} - \frac{1}{\rho T} \frac{4}{3} i_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
 & + \frac{P_2(1-\beta)^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial Q} \right)_{p_s} \frac{dQ}{dt} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Комбинируя уравнение движения (1.1) с (1.3), находим

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{4}{3} i_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \Big| \gamma_1 R \left(1 - \frac{2}{a_{1e0}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{dR}{dt} + \\
 + \frac{3}{2} \gamma_1 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1}{a_{1e0}} \frac{dR}{dt} \right) \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{4i_1}{R} \frac{dR}{dt} - \\
 - \frac{R}{a_{1e0}} \left(1 - \frac{1}{a_{1e0}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(P_2 - \frac{4i_2}{R} \frac{dR}{dt} \right) \Big| \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Таким образом, исходная система уравнений (1.1)–(1.4) свелась к двум уравнениям (2.2) и (2.3).

Пусть рассматриваемая короткая волна с узкой возмущенной зоной движется с равновесной скоростью звука в покоящейся смеси, то есть $a_0 = a_{e0}$ и $a_{10} = a_{1e0}$. Примем

$$a_e = a_{e0} + \varepsilon a_e, \quad a_{1e} = a_{1e0} + \varepsilon a_{1e} \quad (2.4)$$

Применяя преобразования (1.5) и (1.6) к уравнениям (1.1), получим в порядке $\varepsilon^0 = 1$

$$\rho = \rho_0(a_{e0}), \quad P = P_0(a_{e0}) \quad (2.5)$$

Аналогичное преобразование над первым уравнением из (1.2) в порядке ε дает $s=0$. Разлагая $P = P(p, Q, s)$ вблизи положения равновесия в ряд Тейлора и сравнивая его со вторым соотношением в (2.5), в порядке ε получим

$$s = 0, \quad Q = 0 \quad (2.6)$$

Соотношения (2.5) и (2.6) показывают, что в рассматриваемом приближении сжатие газожидкостной смеси происходит обратимо. Согласно (2.5) соотношения (1.7) и (1.8) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 R = - \frac{R_0 \rho_0 a_{e0}}{3P_0} u, \quad \beta = \frac{\beta_0}{a_e} \left(1 - \frac{\beta_0 a_{e0}^2}{P_0} \right) u \\
 \rho_1 = \frac{\rho_0}{a_{e0}(1-\beta_0)} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right) u \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится зависимость возмущения скорости a_{1e} в жидкой фазе от возмущенной скорости u смеси. Поэтому, разлагая $a_{1e} = a_{1e}(P, s, Q)$ вблизи положения равновесия в ряд Тейлора и учитывая (2.6), получим

$$a_{1e} = \frac{(1 - \beta_0) a_{e0}}{a_{1e0}} (z_{1e} - 1) u, \quad z_{1e} = \frac{1}{a_{1e0}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 a_{1e}) \right]_0 \quad (2.8)$$

Аналогичное разложение $q = q(\rho_1, Q, s)$ дает

$$q = \left(\frac{\partial q}{\partial \rho_{10}} \right)_{Q, s} \rho_1 = \left(\frac{\partial q}{\partial \rho_{10}} \right)_{Q, s} \frac{\rho_0}{a_{e0} (1 - \beta_0)^2} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right) u \quad (2.9)$$

Применяя преобразования (1.5) и (1.6) ко второму уравнению из (1.2) и удерживая главные члены, находим в порядке ε

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \varepsilon \frac{H_{10}}{\tau_0 a_{e0}} Q \quad (2.10)$$

Если ввести размерную величину L ($|L| \sim \varepsilon$), например, ширину боковой области, то из (2.10) следует, что при квазиравновесном процессе распространения возмущений время протекания химической реакции τ_0 намного меньше макроскопического времени L/a_{e0} , то есть $|\tau_0| \sim \varepsilon^2$.

Преобразуем посредством (1.5) и (1.6) уравнения (2.2) и (2.3) и удержим главные члены порядка ε , причем в первом из них будут содержаться также члены порядка $\varepsilon^2 = 1$. Комбинируя друг с другом полученные упрощенные уравнения с целью исключения членов порядка $\varepsilon^2 = 1$ и имея в виду соотношения (1.10), (2.5) — (2.10), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + z_e a_{e0}^2 \frac{\partial u}{\partial r} - (\delta_e + m_e + \varepsilon^2 z_e) \frac{a_{e0}^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_{e0}^2}{\varepsilon^2} z_e \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0 \quad (2.11)$$

где введены коэффициенты

$$\begin{aligned} z_e &= \frac{\beta_0}{a_{e0}^2} \left(\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right)^2 + \frac{z_{1e}}{a_{e0}^2 (1 - \beta_0)} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right)^2 \\ \tau_e &= \frac{\beta_0 R_0^2 \rho_0^2 a_{e0}}{6 (1 - \beta_0) P_0^2}, \quad \delta_e = \frac{2}{3} \lambda_1 \frac{1}{\rho_0 a_{e0}^2} \left[1 + \beta_0 \left(\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right)^2 \right] \\ z_e &= \frac{\beta_0 R_0^2 \rho_0 a_{e0}}{2 P_0 a_{1e0}}, \quad m_e = \frac{\tau_e}{H_{10}} \left(\frac{\partial q}{\partial Q_0} \right)_{Q, s} \frac{a_{1e0}^2 - a_{1e0}^2}{2 a_{e0}^2 (1 - \beta_0)^2} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

В случае релаксационных явлений в потоках газов и жидкостей различают четыре времени протекания химической реакции: $\tau_{V*}, \tau_{P*}, \tau_{V**}, \tau_{P**}$, где индексы показывают, какие характеристики течения фиксированы. Можно показать что [12]

$$\tau_{V*} = \frac{\tau_e}{H_{10}} \left(\frac{\partial q}{\partial Q_0} \right)_{Q, s}$$

и тогда коэффициент m_e можно записать в виде

$$m_e = \frac{\gamma_e v_e}{2a_{e0}^3 (1 - \beta_0)^2} (a_{1e}^2 - a_{2e}^2) \left(1 - \frac{\beta_0 v_e a_{e0}^2}{P_0} \right)^2$$

Полученное уравнение (2.11) удобно при решении задачи с начальными условиями. При постановке граничной задачи перейдем от переменных (r, t') к (x, τ) , где $\tau = t - x/a_e$ есть время пробега частицы до фронта волны. Согласно известным формулам перехода [7], уравнение (2.11) примет окончательный вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \gamma_e u \frac{\partial u}{\partial \tau} - (\delta_e + \gamma_e + m_e) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \gamma_e \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} = 0 \quad (2.13)$$

Таким образом, учет релаксации и сжимаемости жидкой фазы приводит к увеличению коэффициента диссипации в уравнении Бюргерса—Кортевега-де Вриза (2.13). Без учета названных эффектов уравнение при начальном условии в виде гауссового распределения интегрировалось численно в [4], а в случае отсутствия пузырьков рассматривалось в [7].

а) Рассмотрим линейное приближение уравнения (2.13). Для него сформулируем задачу о поршне, вдвигаемом в смесь с постоянной скоростью

$$\text{при } x = 0 \quad u(\tau, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ v_0 & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Так как в волновой зоне внутренняя переменная τ при переходе к внешней переменной t меняется от $-\infty$ до ∞ , то, применяя к линейному варианту уравнения (2.13) преобразование Фурье по τ , приведем его к виду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + [(\delta_e + \gamma_e + m_e) \omega^2 - i \gamma_e \omega^3] \bar{u} = 0$$

где \bar{u} — Фурье-образ u , ω — параметр преобразования Фурье. Решая полученное уравнение, определяя постоянную интегрирования с помощью преобразованного граничного условия (2.14) и затем совершая обратное преобразование Фурье, получим

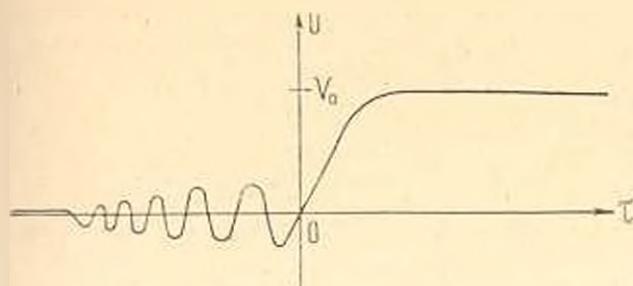
$$u(\tau, x) = \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\omega\tau + \omega^2 \gamma_e x + i\omega^2 \delta_e x)] \frac{d\omega}{\omega} \quad (2.15)$$

Преобразуя интеграл в (2.15), окончательное решение линейной задачи можно записать как

$$u(\tau, x) = \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{\pi} \int_0^{\infty} \exp[-(\delta_e + \gamma_e + m_e) x \omega^2] \sin(\omega\tau + \omega^2 \gamma_e x) \frac{d\omega}{\omega}$$

В случае отсутствия релаксационного процесса и пузырьков ($\gamma_e = m_e = \gamma_e = 0$) полученное решение переходит в известное решение для чисто

вязкой жидкости [8, 9]. Из решения видно, что оно имеет осциллирующий характер, причем осцилляции определяются наличием дисперсионного члена в (2.13). На фиг. 1 показан результат численного расчета для среды: глицерин-пузырьки газа ($\beta_0 = 0.05$, $R_0 = 0.001$ м):



Фиг. 1.

6) Теперь изучим асимптотику полученного решения при больших значениях τ . Для этого удобнее всего обратиться к виду (2.15). Продифференцируем это решение по τ

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{v_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\delta_0 + \alpha_0 + m_0) x^{3/2}] \exp[i(\omega_0 + \alpha_0 x) x] dx$$

Данное выражение можно записать в виде свертки от двух функций [10]

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{v_0}{4\pi} \left(\frac{1}{\delta x}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{3\gamma_0 x}\right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4\delta x} \xi^2} \text{Ai}[x(\tau - \xi)] d\xi$$

где $\delta = \delta_0 + \alpha_0 + m_0$, $\text{Ai}(z)$ — функция Эйри, $\alpha = (1/3\gamma_0 x)^{1/3}$

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{V\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(z\xi + \frac{1}{3}\xi^3\right)\right] d\xi$$

Разлагая функцию $\text{Ai}[\alpha(\tau - \xi)]$ в ряд по степеням ξ и преобразуя интеграл к Γ -функции, можно получить

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{v_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4\delta x)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{3\gamma_0 x}\right)^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \text{Ai}^{(2n)}(x\tau) \quad (2.16)$$

Далеко вниз по течению (позади волны) $\tau \rightarrow \infty$, поэтому, используя асимптотическое представление производных функции Эйри [11], (2.16) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{v_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4\delta x)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{3\gamma_0 x}\right)^{n + \frac{1}{4}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \tau^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3} \frac{\tau^3}{(3\gamma_0 x)^{1/3}}}$$

Рассматриваемый ряд, как нетрудно убедиться, при условии

$$(3\gamma_e x)^{1/3} < |\tau| < 3\gamma_e \beta \quad (2.17)$$

абсолютно сходится, причем при выполнении (2.17) можно ограничиться первым членом разложения, так как сумма, начиная со второго члена, намного меньше первого члена. После интегрирования и очевидных приведений решение далеко позади фронта волны запишется как [9]

$$u = v_0 - \frac{v_0}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3\gamma_e x}\right)^{1/2} \tau^{3/2} \right] \right\}$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности. Из найденного решения видно, что распределение скорости имеет монотонный профиль, причем при

$$\tau \rightarrow \infty \quad u(\tau, x) \rightarrow v_0$$

Далеко вперед по течению (впереди фронта волны) $\tau \rightarrow -\infty$, поэтому используя асимптотику производной функции Эйри [11], (2.16) напомним в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{v_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4\delta x)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{3\gamma_e x}\right)^{n+\frac{1}{4}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) |\tau|^{-n-\frac{1}{4}} \times \\ &\times \cos \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3\gamma_e x}\right)^{1/2} |\tau|^{3/2} + \frac{\pi}{2} \left(2m - \frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Легко показать, что при выполнении условия (2.17) полученный ряд снова абсолютно сходится и можно ограничиться первым членом в разложении. Интегрируя полученное выражение, решение далеко впереди фронта волны запишем как [9]

$$\begin{aligned} u(\tau, x) &= \frac{v_0}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \left\{ 1 - C \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{|\tau|^3}{3\gamma_e x}\right)^{1/4} \right] - \right. \\ &\quad \left. - S \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{|\tau|^3}{3\gamma_e x}\right)^{1/4} \right] \right\} \end{aligned}$$

где функции $C(z)$ и $S(z)$ — интегралы Френеля. Из полученного решения видно, впереди волны имеют место затухающие осцилляции, так как при $\tau \rightarrow -\infty$ $u(\tau, x) \rightarrow 0$.

3. Квазизамороженный процесс

За независимые термодинамические переменные примем давление P , плотность ρ , полноту химической реакции q . Тогда приращение удельной энтропии можно записать в виде

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho_1}\right)_{Pq} \left[d\rho_1 - \frac{1}{a_{1f}^2} dP - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial q}\right)_{Pz} dq \right], \quad a_{1f}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho_1}\right)_{qs} \quad (3.1)$$

Здесь α_{1f} — замороженная скорость звука в жидкой фазе. Согласно (3.1), преобразованное уравнение неразрывности (1.9) можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{dP_2}{dt} + \frac{P_2}{\beta} \frac{du}{\partial x} + \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta^2 \alpha_{1f}^2} \frac{d\tau^2}{dt} = \\ = - \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta^2} \left[\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial q} \right)_{P_2} \frac{dq}{dt} + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial s} \right)_{P_2} \frac{ds}{dt} \right] \end{aligned}$$

Комбинируя данное уравнение с уравнениями потока тепла (1.2) и пульсации пузырька (1.4), получим

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta^2 \alpha_{1f}^2} \right| \frac{dP_2}{dt} + \frac{P_2}{\beta} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta^2 \alpha_{1f}^2} \frac{d}{dt} \left[\beta_1 R \left(1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{\alpha_{1f0}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \beta_1 \left(1 - \frac{4}{3\alpha_{1f0}} \frac{dR}{dt} \right) \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{4i_1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{\alpha_{1f0}} \left(1 - \frac{1}{\alpha_{1f0}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(P_2 - \frac{4i_1}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] = \\ = - \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial q} \right)_{P_2} \left[\frac{dq}{dt} + \left(\frac{dq}{ds} \right)_{P_2} \frac{Q}{T} \frac{ds}{dt} \right] \quad (3.2) \end{aligned}$$

Аналогично выводу (2.3) находим

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{4}{3} \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_1 R \left(1 - \frac{2}{\alpha_{1f0}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{d^2 R}{dt^2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \beta_1 \left(1 - \frac{4}{3\alpha_{1f0}} \frac{dR}{dt} \right) \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{4i_1}{R} \frac{dR}{dt} - \right. \\ \left. - \frac{R}{\alpha_{1f0}} \left(1 - \frac{1}{\alpha_{1f0}} \frac{dR}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(P_2 - \frac{4i_1}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] \quad (3.3) \end{aligned}$$

В рассматриваемом процессе распространения возмущений имеют место соотношения (2.5), (2.8) с заменой α_{e0} на α_{1f} , α_{1e0} на α_{1f0} . Из разложения $P = P(\rho_1, q, s)$ в ряд Тейлора вблизи положения полного термодинамического равновесия нетрудно заметить, что

$$s' = 0, \quad q' = 0 \quad (3.4)$$

Таким образом, и в данном процессе в принятом приближении сжатие газа происходит обратимо. Применяя преобразования (1.5) и (1.6) ко второму уравнению из (1.2) и удерживая главные члены порядка ϵ , получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{H_{10}}{\alpha_{1f0}} Q \quad (3.5)$$

Из (3.4) видно, что возмущенные энтропия и полнота химической реакции — малые более высокого порядка, чем остальные возмущенные параметры течения ($s' \sim q' \sim \varepsilon$). Если ввести характерную длину L , то из (3.5) следует, что время протекания химической реакции $\tau_{\text{в}}$ намного больше $L/a_{\text{ж}}$ — времени пробега частицей волновой зоны, то есть $|\tau_{\text{в}}| \sim 1$.

Можно показать, что в рассматриваемом приближении [1]

$$Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial \gamma_{\text{ж}}} \right)_{\gamma_{\text{ж}}} \gamma_{\text{ж}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \gamma_{\text{ж}}} \right)_{\gamma_{\text{ж}}} a_{\text{ж}}^2 (1 - \beta_0) \left(1 - \frac{\beta_0 \alpha_{\text{ж}}^2}{P_0} \right) \varepsilon \quad (3.6)$$

Аналогично выводу (2.13), преобразуем посредством (1.5) и (1.6) уравнения (3.2), (3.3) и удержим лишь главные члены порядка ε . Далее, исключая из получаемых соотношений члены нулевого порядка малости и имея в виду соотношения (2.5), (2.7), (2.8), (3.5) и (3.6), после перехода от (t, l') к (x, t) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_{\text{ж}} \frac{\partial u}{\partial z} - (\beta_{\text{ж}} + \alpha_{\text{ж}}) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \gamma_{\text{ж}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + gu = 0 \quad (3.7)$$

где коэффициенты $\alpha_{\text{ж}}$, $\beta_{\text{ж}}$, $\gamma_{\text{ж}}$, $\gamma_{\text{ж}}$ идентичны коэффициентам в (2.13) с заменой $a_{\text{ж}}$ на $a_{\text{ж}}$, $a_{\text{ж}}$ на $a_{\text{ж}}$

$$g = m_{\text{ж}}^{-2} \gamma_{\text{ж}}$$

где $m_{\text{ж}}$ задается соотношением (2.12) с заменой $a_{\text{ж}}$ на $a_{\text{ж}}$

Пренебрегая нелинейным членом в уравнении (3.7) и переходя к новой функции $v = ue^{i\omega t}$, получим относительно v линейный вариант уравнения БКВ, для которого при формулировке задачи о поршне (2.14) применимы все результаты, полученные в п. 2. Далее, переходя от v к истинной скорости u , убеждаемся, что при квазизамороженном процессе распространения возмущений в окрестности волны величина скорости убывает с течением времени по экспоненциальному закону.

4. Специальные среды

Между замороженной и равновесной скоростями звука в жидкой фазе существует связь [1, 6, 7]

$$\begin{aligned} a_{\text{ж}}^2 - a_{\text{ж}}^2 &= \left(\frac{\partial P}{\partial Q} \right)_{\text{ж}} \left(\frac{\partial Q}{\partial \gamma_{\text{ж}}} \right)_{\text{ж}} = \frac{1}{\gamma_{\text{ж}}^2} e_{12}^2 \\ e_{12} &= \left(\frac{\partial^2 e}{\partial V_{\text{ж}} \partial q} \right)_{\text{ж}}, \quad e_{11} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial q^2} \right)_{\text{ж}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Если предположить, что скорости $a_{\text{ж}}$ и $a_{\text{ж}}$ в состоянии термодинамического равновесия имеют близкие значения, то из (1.10) следует, что скорости $a_{\text{ж}}$ и $a_{\text{ж}}$ в газожидкостной смеси также близки друг к другу. Из (4.1) видно, что в этом случае величина $e_{12} = e_{12}$ в покоящейся жидкой фазе мала. Примем

$$\epsilon_{120} = \epsilon_1 \epsilon_{120} \quad (4.2)$$

где ϵ_1 — новый малый параметр порядка $\epsilon^{1/2}$, и в (1.5) сделаем следующие замены:

$$q \rightarrow \epsilon_1 q', \quad Q \rightarrow \epsilon_2 Q' \quad (4.3)$$

Пусть рассматриваемая короткая волна движется со скоростью a_0 , не совпадающей обязательно ни с одной из предельных скоростей звука. Положим

$$a_0 - a_{j0} = \epsilon_1^2 a_0^2 \beta_j, \quad a_0 - a_{s0} = \epsilon_2^2 a_0^2 \beta_s \quad (4.4)$$

Очевидно, что постоянные β_j и β_s — порядка единицы.

Разлагая давление всей смеси $P = P(\rho, q, s) = P(\rho, Q, s)$ в ряд Тейлора вблизи положения термодинамического равновесия, получим

$$\begin{aligned} P &= a_{j0}^2 \rho + \epsilon_1 \left(\frac{\partial P}{\partial q_0} \right)_{j0} q = a_{j0}^2 \rho - \epsilon_1^2 \frac{\beta_0^2}{\beta_{10}^2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial q} \right)_0 \epsilon_{120} q \\ P &= a_{s0}^2 \rho + \epsilon_2 \left(\frac{\partial P}{\partial Q_0} \right)_{s0} Q = a_{s0}^2 \rho - \epsilon_2^2 \frac{\beta_0^2}{\beta_{10}^2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial q} \right)_0 \frac{\epsilon_{120}}{\epsilon_{110}} Q \end{aligned} \quad (4.5)$$

откуда видно, что в порядке до ϵ_1^2 полученные разложения совпадают с (2.5). Аналогичным образом отклонение сродства химической реакции $Q = Q(\rho, q, s)$ можно представить в виде

$$Q = \epsilon_{110} q - \frac{\epsilon_{110}}{\beta_{10}^2} \beta_1 \quad (4.6)$$

Для рассматриваемых сред снова можно получить соотношения (2.5), (2.7) и (2.10) с заменой a_{j0} на a_0 , причем комбинирование последнего из них с (4.6) дает

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{H_{10}}{\tau_0 a_0} \left[\epsilon_{110} q - \frac{\epsilon_{120}}{\beta_{10} a_0} \left(1 - \frac{\beta_0 \beta_0 a_0^2}{P_0} \right) \right] u \quad (4.7)$$

Применяя преобразования (1.5), (1.6) и (4.3) к уравнениям (2.2) и (2.3), учитывая (4.4) и затем удерживая главные члены порядка ϵ , после исключения друг из друга членов нулевого порядка получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a_0^2 \left(\epsilon_1 u - \frac{\tau_0}{a_0} \right) \frac{\partial u}{\partial r} - a_0^2 (\epsilon + \epsilon_1) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \\ + a_0^2 \epsilon_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\epsilon_{120}}{\beta_0} \left(i - \frac{\beta_0 \beta_0 a_0^2}{P_0} \right) \frac{\partial q}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.8)$$

где коэффициенты ϵ , ϵ_1 , ϵ_2 задаются соотношениями (2.13) с заменой a_{j0} на a_0 и a_{1s0} на a_{10} .

Аналогичное упрощение уравнений (3.2) и (3.3) и их комбинация друг с другом дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a_0^2 \left(z_{10} - \frac{z_{10}}{a_0} \right) \frac{\partial u}{\partial r} - a_0^2 (\delta + \kappa) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_0^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} = \\ = - \frac{\varepsilon_{120}}{2\rho_0 \varepsilon_{110}} \left(1 - \frac{\beta_{00} a_0^2}{P_0} \right) \frac{\partial Q}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Покажем, что уравнения (4.8) и (4.9) совпадают друг с другом. Действительно, в принятом приближении $z_c = z_1$, а из соотношений (4.4) и (4.5) можно найти связь между z_{10} и z_{j0} [1, 7]

$$z_{10} = z_{j0} + \frac{\varepsilon_{120}^2}{2\varepsilon_{10}^2 a_0^2 \varepsilon_{110}} \left(1 - \frac{\beta_{00} a_0^2}{P_0} \right)^2 \quad (4.10)$$

Подставляя (4.10) и (4.6) в уравнение (4.8), приведем его к виду, полностью совпадающему с (4.9).

Исключим из уравнения (4.9) параметр q . Для этого скомбинируем (4.7) с (4.9), продифференцируем по r и снова, используя (4.7), исключим q . Далее, подставим вместо z_{j0} его выражение через z_{10} в полученное уравнение и перейдем к переменным (x, τ) и истинной скорости u

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(z_1 u - \varepsilon^2 \frac{z_{r0}}{a_1} \right) \frac{\partial u}{\partial \tau} - (\delta + \kappa + m) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} = \\ = - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \left(z_1 u - \varepsilon^2 \frac{z_{r0}}{a_0} \right) \frac{\partial u}{\partial \tau} - (\delta + \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь коэффициенты z_1 , m те же, что и в (2.13), с заменой a_{c0} на a_0 , $I = a_0^2 \varepsilon_{11}$.

Если предположить, что предельные скорости распространения возмущений в жидкости a_{1j0} и a_{1r0} почти совпадают друг с другом, то есть $m \ll (\delta + \kappa)$, то уравнение (4.11) один раз интегрируется, причем из условия впереди волны, где возмущения отсутствуют, постоянная интегрирования равна нулю и получаемое уравнение есть уравнение БКВ, описывающее течение химически инертной газожидкостной смеси.

Автор искренне признателен А. Г. Багдоеву за обсуждение и внимание к работе.

Գ. Գ. ՕՀԱՆԻԱՆ

ԳՈՋԱՅԻՆ ՊԿՎՋԱԿԱՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՔԻՄԻԱԳԵՍ ԱԿՏԻՎ շԵՂՈՒԿՈՒՄ
ԳՐԿՈՒՈՒՐՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՐԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ու մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է պղպտակներ պարունակող բիմիական ակտիվ շեղուկների խառնուրդում, որտեղ տեղի է ունենում միայն մեկ ունակցիա, թույլ հարվածային աչիքի տարածման վերաբերյալ խնդիրը:

Կարճ աչիքների տեսության մեթոդով դուրս են բերված հարվածային աչիքի շրջակայքում խառնուրդի շարժումը նկարագրող ոչ գծային հավասարումները:

Քվադրի-լավաստակաչուված և բվադի-ստոնցված պրոցեսների համար գծային դրվածքով լուծվել է հաստատուն արագությանը շարժվող միտքի խնդիրը:

Յույժ է տրվում, որ աչիքի ճակատի առջևում տեղի ունեն օսցիլյացիաներ:

ON PROPAGATION OF DISTURBANCES IN A CHEMICALLY ACTIVE FLUID CONTAINING GAS BUBBLES

G. G. OHANIAN

S u m m a r y

The problem on propagation of weak shock waves in a mixture of chemically active fluids containing gas bubbles is considered. The non-linear equations describing the mixture flow in the neighbourhood of a shock wave are derived by the method of short waves. For quasi-equilibrium and quasi-frozen processes in linear statement the problem on a piston moving with a constant velocity is solved. The oscillations of motion parameters are shown to occur ahead of the wave front.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С. О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, 1971, т. 35, № 6.
2. Низматуллин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. МЖГ, 1974, № 6.
3. Ван-Вейнгарден А. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Сб. Реология суспензий». М., «Мир», 1975.
4. Нагоряков В. Г., Соболева В. В., Шрайбер И. Р. Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси. МЖГ, 1972, № 5.
5. Бэтчелор Г. К. Волны сжатия в суспензиях газовых пузырьков в жидкости. Механика, сб. переводов иностр. статей. М., «Мир», 1968.

6. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
7. Оганян Г. Г. Распространение слабых волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. XXVI, № 6.
8. Остроумов Г. А. Основы нелинейной акустики. Л., Изд. ЛГУ, 1967.
9. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
10. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.
11. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
12. Бауэр Г. Феноменологическая теория релаксационных явлений в газах. Со. «Физическая акустика» под ред. У. Мезона, т. II, ч. А. М., «Мир», 1968.