

Р. М. КИРАКОСЯН

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОДНОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НАИМЕНЬШЕГО ОБЪЕМА

Задачи проектирования трехслойных конструкций наименьшего объема в рамках теории идеально-пластического материала при кусочно-линейных поверхностях текучести рассматривались во многих работах (например, [1]—[5] и др.). Проектированию однослойных конструкций наименьшего объема посвящено сравнительно мало исследований ([6]—[8] и др.). Наиболее полное представление о современном состоянии оптимального проектирования тонкостенных конструкций можно составить с помощью работ [9]—[11].

В настоящей статье в рамках теории идеальной пластичности рассматриваются задачи проектирования однослойных круговых цилиндрических оболочек наименьшего объема при гладкой и кусочно-линейных поверхностях текучести. Следуя [12], полученные краевые задачи сводятся к задачам Коши относительно обобщенных функций. Приводятся результаты численного решения, которые в силу независимости от физико-механических характеристик материала и габаритных размеров оболочки носят общий характер.

1. Рассмотрим шарнирно опертую по торцам круговую цилиндрическую оболочку длиной $2l$ и радиусом R , несущую внешнее давление интенсивности p . Ось x направим по образующей срединной поверхности, ось φ — по окружности, а z — по радиусу внутрь цилиндра. В предположении об отсутствии осевой силы T_x , для скоростей осевой и кольцевой деформаций оболочки ϵ_1 и ϵ_2 имеем следующие выражения через скорость прогиба w [12]:

$$\epsilon_1 = \frac{w}{2R} - z \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \epsilon_2 = -\frac{w}{R} \quad (1.1)$$

Уравнение равновесия дифференциального элемента оболочки имеет вид

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{T_\varphi}{R} + p = 0 \quad (1.2)$$

где T_φ — кольцевое усилие, M_x — изгибающий момент в поперечных сечениях оболочки.

Известно [3], что если при заданных нагрузках оболочка находится в предельном состоянии и существует такое поле виртуальных скоростей деформаций, при котором скорость диссипации удельной энергии прини-

мает постоянное значение во всей оболочке, то такая оболочка имеет наименьший объем.

Условие постоянства скорости диссипации удельной энергии в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\frac{D}{h} = - \frac{T_s \frac{w}{R} + M_s \frac{d^2 w}{dx^2}}{h} = \alpha = \text{const} > 0 \quad (1.3)$$

где D — скорость диссипации энергии единичной площади срединной поверхности, h — искомая толщина оболочки, α — положительная постоянная. В состоянии предельного равновесия усилия и моменты оболочки должны удовлетворять уравнению поверхности текучести.

Известно [12], что поверхность текучести оболочки $F = 0$, соответствующая условию постоянства интенсивности касательных напряжений, является гладкой поверхностью, параметрические уравнения которой в рассматриваемом случае

$$T_s < 0, \quad M_s \geq 0, \quad M_s = \frac{1}{2} M_s \quad (1.4)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{T_s}{T_s} = - \frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\nu^2}}{\nu} < 0 \\ m_s &= \frac{M_s}{M_s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} - \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\nu^2}}{\nu} \right| > 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

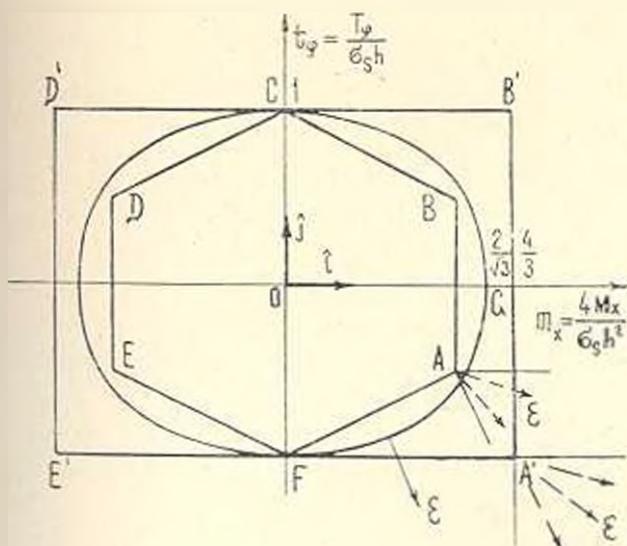
$$1 > \nu = \frac{\varepsilon_{i1}}{\varepsilon_{i0}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\varepsilon}_0 w}{\sqrt{3w^2 - R^2 h^2 (d^2 w/dx^2)^2}} > 0 \quad (1.6)$$

ε_{i0} и ε_{i1} — значения интенсивности скоростей деформаций сдвига, соответственно в срединной поверхности оболочки и на ее внешней и внутренней поверхностях, $T_s = \varepsilon_s h$ и $M_s = \varepsilon_s h^2/4$ — полная пластическая мембранная сила и полный пластический изгибающий момент сечения оболочки, ε_s — предел упругости материала. Уравнениям (1.5) на фиг. 1 соответствует та часть кривой L , которая находится в четвертом квадранте координатной плоскости ε_s, m_s (дуга GAT').

Конечные соотношения между усилием и моментами (1.5) получены из уравнений теории малых упруго-пластических деформаций, в предположении об отсутствии упрочнения материала. Поэтому соотношения (1.5) обеспечивают автоматическое выполнение ассоциированного закона течения.

Кроме гладкой поверхности (1.5) в настоящей работе будут рассмотрены две ее кусочно-линейные аппроксимации, соответствующие условиям постоянства: 1) максимального касательного напряжения (шестиугольник

$ABCDEF$ А, фиг. 1) и 2) максимального приведенного напряжения (прямоугольник $A'B'D'E'A'$). Эти поверхности обычно используют с целью получения верхней и нижней оценок для объема оболочки [4], [13].



Фиг. 1.

Нетрудно убедиться в том, что условие наименьшего объема (1.3) можно удовлетворить только в угловых точках поверхностей текучести A (случай 1) и A' (случай 2). В силу этого

$$T_\epsilon = -a T_x = -a \tau_x h, \quad M_\epsilon = b M_x = b \frac{\tau_x h^2}{4} \quad (1.7)$$

где для коэффициентов a и b следует брать

$$\text{в случае 1) } a = \frac{1}{2}, \quad b = 1 \quad (\text{точка } A) \quad (1.8)$$

$$\text{и случае 2) } a = 1, \quad b = \frac{4}{3} \quad (\text{точка } A') \quad (1.9)$$

2. Рассмотрим случай кусочно-линейных поверхностей текучести. Определив толщину оболочки из (1.3) и подставив ее в уравнение равновесия (1.2), с учетом обозначений

$$w = \frac{\tau R}{\sigma_0} \bar{w}, \quad \frac{x}{l} = c \bar{x} \quad (2.1)$$

где c — неизвестная безразмерная постоянная, приходим к линейной системе дифференциальных уравнений относительно четырех функций \bar{w} , \bar{u} , \bar{v} , \bar{t}

$$\frac{d\bar{w}}{dx} = u, \quad \frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = t$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{v^3}{(a\bar{w}-1)^2} \bar{p} + \frac{av^2}{2(a\bar{w}-1)} + \frac{a^2 u^2 v}{(a\bar{w}-1)^2} + \frac{3t^2}{v} -$$

$$- \frac{4aut}{a\bar{w}-1} = f(\bar{w}, u, v, t) \quad (2.2)$$

Здесь

$$\bar{p} = \frac{b}{8z_0 c^2} \frac{R^3}{l^2} p \quad (2.3)$$

В качестве граничных условий используем условия симметрии задачи относительно середины пролета $x = 0$ и условия шарнирного опирания оболочки на одном из ее торцов $x = \pm l$.

Условия симметрии с учетом (2.1) и (2.2) запишем в виде

$$u \Big|_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \right)$$

$$t \Big|_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{dt}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{4/c}{bKv^2} [auv - t(a\bar{w}-1)] \Big|_{x=0} = 0 \right) \quad (2.4)$$

Условия же шарнирного опирания ($w = M_x = 0$) на торце оболочки $x = l$ ($x = \bar{x}_l$) будут

$$\bar{w} \Big|_{x=\bar{x}_l} = 0 \quad (w \Big|_{x=l} = 0)$$

$$\frac{(a\bar{w}-1)^2}{v^2} \Big|_{x=\bar{x}_l} = 0, \quad \left(M_x \Big|_{x=l} = \frac{4z_0 l^2 c^4}{bK^2} \frac{(a\bar{w}-1)^2}{v^2} \Big|_{x=\bar{x}_l} = 0 \right) \quad (2.5)$$

С целью формального приведения рассматриваемой краевой задачи к задаче Коши, условия срединного сечения оболочки (2.4) дополним, задавая некоторыми значениями безразмерных скоростей прогиба и изменения кривизны оболочки в этом сечении. После этого условия в сечении $x = 0$ примут вид

$$u = 0, \quad t = 0, \quad \bar{w} = \bar{w}_0, \quad v = v_0 \quad (x = 0) \quad (2.6)$$

Если путем численного интегрирования системы (2.2) при начальных условиях (2.6) условия шарнирного опирания оболочки (2.5) при некотором $x = \bar{x}_l$ удовлетворяются одновременно, то, очевидно, выбранные значения \bar{w}_0 и v_0 истинны и задача решена. В противном случае необходимо варьировать значения \bar{w}_0 и v_0 до одновременного удовлетворения условий (2.5). Причем достаточно варьировать лишь значение безразмерной

скорости изменения кривизны $\bar{\sigma}_0^*$, а значение безразмерной скорости прогиба $\bar{\omega}$, можно оставить неизменным. Дело в том, что безразмерная скорость прогиба срединного сечения $\bar{\omega}$ не зависит от неизвестной постоянной ϵ и поставленная задача имеет смысл при любом ее значении

$$0 < \bar{\omega} < \frac{1}{\alpha} \quad (2.7)$$

Следует, однако, заметить, что задание конкретного значения $\bar{\omega}_0$ для данного материала накладывает ограничение на нагрузку и габаритные размеры оболочки.

Имея в виду вышесказанное, численное интегрирование системы (2.2) можно реализовать по следующей схеме.

Задаются некоторые значения безразмерных величин $\bar{\rho}$ и $\bar{\omega}_0$, которые в дальнейшем остаются неизменными. Для данного значения $\bar{\sigma}_0^* < 0$ проводится численное интегрирование системы (2.2) до тех пор, пока не удовлетворится одно из граничных условий (2.5). Допустим, при $x = \bar{x}_1$ удовлетворяется первое условие, а второе — нет, то есть

при

$$\bar{x} = \bar{x}_1, \quad \bar{\omega} = 0, \quad \frac{(\alpha\bar{\omega} - 1)^2}{\nu^2} - M^* \neq 0 \quad (2.8)$$

Это соответствует случаю шарнирно опертой оболочки, в опорных сечениях которой приложены равномерно распределенные по окружности изгибающие моменты

$$M_0^* = \frac{4\epsilon_0 \epsilon^2 h^3}{b R^2} M^* \quad (2.9)$$

Повторяя численное интегрирование системы, для различных $\bar{\sigma}_0^*$ добиваются одновременного выполнения двух граничных условий (2.5). После этого решение задачи фактически завершается, так как, имея действительные значения $\bar{\omega}_0$, $\bar{\sigma}_0^*$, а следовательно, и ν , $\bar{\omega}$ можно вычислить все необходимые величины, и частности, толщину h и объем оболочки V

$$h = \frac{4\epsilon^2}{b R \bar{x}_1^2} \frac{\alpha\bar{\omega} - 1}{\nu}, \quad V = \frac{16\epsilon^2 h^3}{b \bar{x}_1^2} \int_0^{\bar{x}_1} \frac{\alpha\bar{\omega} - 1}{\nu} d\bar{x} \quad (2.10)$$

Следует заметить, что система дифференциальных уравнений (2.2) и граничные условия (2.5), (2.6) не содержат геометрических и физико-механических параметров оболочки. В силу этого задача в рассмотренном виде носит общий характер. Достаточно эту задачу решить только один раз. Результаты же в каждом конкретном случае можно получить с помощью формул пересчета (2.1), (2.10), которые уже содержат параметры оболочки.

Так как значения нагрузки и скорости изменения кривизны оболочки в конечном счете не зависят от выбора $\bar{\rho}$ и \bar{v}_0 (то есть от значения неизвестной постоянной), то с помощью масштабного изменения

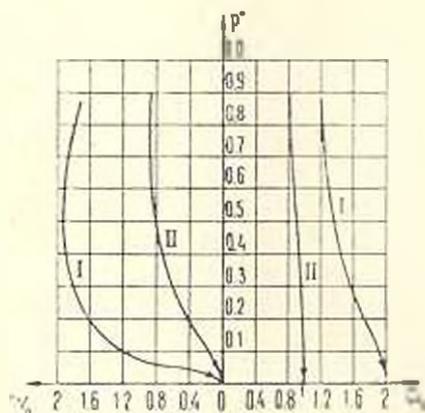
$$\bar{\rho}_1 = \frac{\bar{\rho}}{x_j}, \quad v_{0,1} = v_0 x_j^2 \quad (2.11)$$

приходим к единичной безразмерной длине

$$\bar{x}_{j,1} = 1, \quad c = 1 \quad (2.12)$$

Заметим, что применяемый метод значительно прост по сравнению с прямыми методами решения краевых задач. В силу введения неизвестной постоянной второй край становится неизвестным. Достаточно проинтегрировать уравнение только один раз до того значения нового аргумента $\bar{x}_{j,1}$, при котором удовлетворяется второе краевое условие. Принимая $\bar{x} = x_j$ в качестве второго края, определяем неизвестную постоянную и задача решена. Если же эту задачу решить прямыми методами, то для удовлетворения второго краевого условия, как известно, машина должна осуществить многократное интегрирование.

В нижеприведенной табл. 1 представлены некоторые результаты решения задачи, когда в качестве поверхности текучести принята поверхность (1.9), соответствующая условию постоянства максимального приведенного напряжения. Имея в виду исключительную важность значений \bar{w}_0 и v_0 (они составляют недостающие начальные условия задачи Коши) на фиг. 2



Фиг. 2.

приведены графики их зависимости от давления p^* .

Так как напряженные состояния оболочки характеризуются угловыми точками на поверхностях текучести, то согласно с ассоциированным законом течения некоторые обобщенные скорости пластических деформаций*

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\tau_s h^2}{4} \frac{d^2 w}{dx^2} i - \tau_s h \frac{w}{R} j \quad (2.13)$$

где i и j — единичные векторы вдоль осей обобщенных усилий m и t , соответственно, должны ле-

жать в пучках, ограниченных нормальными к поверхности текучести в замыкающих точках. Эти ограничения с учетом (2.1) и (2.2) примут вид

* Если не учитывать изменения геометрии, то при пластическом разрушении оболочки под действием постоянных нагрузок упругие деформации будут оставаться постоянными [3], поэтому скорости деформации при разрушении будут чисто пластическими.

$$a=1, \quad b=\frac{4}{3}, \quad M^* = \frac{3K^2}{2l^2} M \cdot 10^4, \quad p^* = \frac{8p}{b} \frac{pK^2}{2l^2}, \quad v_0^* = v_0 \cdot 10^4, \quad V^* = \frac{V}{16\pi l^2}$$

p^*	v_0^*	M^*	\bar{w}	$\frac{hK}{l^2}$	M^*	\bar{w}	$\frac{hK}{l^2}$	M^*	\bar{w}	$\frac{hK}{l^2}$	M^*	
$p^* = 0.892$	$v_0^* = -9150.08$	$V^* = 0.01328$	$p^* = 0.471$	$v_0^* = -7564.05$	$V^* = 0.00832$	$p^* = 0.286$	$v_0^* = -5729.45$	$V^* = 0.005729$				
x	\bar{w}	$\frac{hK}{l^2}$	M^*	\bar{w}	$\frac{hK}{l^2}$	M^*	\bar{w}	$\frac{hK}{l^2}$	M^*	\bar{w}	$\frac{hK}{l^2}$	M^*
0	0.800	0.656	477.8	0.900	0.397	174.8	0.950	0.262	76.16			
0.2	0.781	0.645	461.9	0.884	0.391	169.7	0.938	0.259	74.28			
0.4	0.721	0.610	412.8	0.832	0.372	153.9	0.896	0.248	68.21			
0.6	0.605	0.541	325.8	0.724	0.335	124.6	0.801	0.225	56.45			
0.8	0.397	0.415	191.4	0.511	0.263	76.75	0.592	0.189	35.92			
0.9	0.233	0.302	101.5	0.329	0.197	43.04	0.396	0.135	20.57			
0.92	0.192	0.270	81.30	0.282	0.178	35.28	0.344	0.124	16.93			
0.94	0.148	0.233	60.23	0.230	0.156	27.13	0.285	0.109	13.08			
0.96	0.079	0.186	38.31	0.172	0.129	18.56	0.218	0.090	8.988			
0.98	0.044	0.118	15.45	0.106	0.093	9.539	0.140	0.064	4.627			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
$p^* = 0.128$	$v_0^* = -2416.15$	$V^* = 0.00269$	$p^* = 0.058$	$v_0^* = -521.105$	$V^* = 0.00129$	$p^* = 0.033$	$v_0^* = -90.5148$	$V^* = 0.000778$				
0	0.990	0.124	17.13	0.999	0.058	3.682	0.9999	0.035	1.220			
0.2	0.985	0.123	16.87	0.998	0.057	3.658	0.9997	0.033	1.217			
0.4	0.963	0.120	15.94	0.991	0.057	3.559	0.9977	0.033	1.203			
0.6	0.902	0.112	13.87	0.961	0.054	3.270	0.9847	0.032	1.147			
0.8	0.721	0.092	9.512	0.825	0.047	2.443	0.8924	0.029	0.927			
0.9	0.510	0.072	5.729	0.610	0.037	1.543	0.691	0.024	0.629			
0.92	0.448	0.065	4.773	0.537	0.034	1.292	0.6265	0.022	0.539			
0.94	0.376	0.058	3.734	0.449	0.030	1.010	0.5332	0.020	0.434			
0.96	0.290	0.048	2.602	0.338	0.024	0.6910	0.4112	0.016	0.311			
0.98	0.187	0.035	1.362	0.194	0.017	0.3270	0.2457	0.012	0.166			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0			

случай 1)

$$0 < \bar{w} < \frac{2|3}{2+|3} = 0.93 \quad (2.14)$$

случай 2)

$$\bar{w} \geq 0, \quad \bar{v} < 0 \quad (2.15)$$

Очевидно, что при условии текучести, соответствующем условию постоянства максимального приведенного напряжения (условие (1.9)), ограничения ассоциированного закона течения (2.15) удовлетворяются автоматически и решение задачи по этой схеме справедливо всегда. Оно дает нижнюю оценку для объема оболочки.

Решения же по схеме, соответствующей постоянству максимального касательного напряжения (условие (1.8)), как показывают вычисления, для оболочек практических габаритных размеров не удовлетворяют ограничениям ассоциированного закона (2.14). Например, при $\bar{w}_0 = 0.93$ толщина оболочки в ее срединном сечении составляет $h_0 \approx 1.6 \frac{R}{K}$. Если положить $h_0 = 0.3 R$, то даже для такой толстой оболочки получится ничтожная длина $l \approx 0.43 R$. Следовательно, решения по этой схеме нельзя использовать в качестве верхней оценки объема оболочки практических габаритов. В настоящей работе эти решения не приводятся.

3. Рассмотрим случай гладкой поверхности текучести. Продифференцировав два раза условие наименьшего объема (1.3), используя дифференциальное уравнение равновесия оболочки (1.2) и имея в виду обозначения

$$\bar{w} = \frac{\gamma_s}{2K} w, \quad H = \frac{hR}{c^2 l^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{lc} \quad (3.1)$$

с учетом параметрических уравнений гладкой поверхности текучести (1.5), (1.6) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{w}}{dx} = u, \quad \frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = t, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{a_1 c - a_1 c_1}{a_1 b_1 - a_1 b_1} = F_1(\bar{w}, u, v, t, z, H) \\ \frac{dH}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{c_1 b_2 - c_1 b_1}{a_1 b_2 - a_1 b_1} = F_2(\bar{w}, u, v, t, z, H) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{H}{3\bar{w}^3} (3\bar{w}^2 A_0^2 A_1 - A_1 H^2 (v^2)), \quad b_1 = -\frac{A_2 H^2 H}{3\bar{w}^2} v \\ a_2 = \frac{v}{H} \left(\frac{A_2 H v^3}{3\bar{w}} v + \frac{A_0 A_1}{2|3} \right), \quad b_2 = \frac{A_2 H v^3}{3\bar{w}} v - \frac{A_0 A_1}{2|3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_1 = & \sqrt{3} \bar{A}_0 \bar{p} - \sqrt{3} \mu H A_0 (A_0 + A_1) - A_0^2 A_1 z^2 - \\
 & - 4 A_0 A_3 \mu H z - A_0 A_1 \mu H - \\
 & - \frac{H^2 A_1^2}{A_0} [(1 + 3\mu^2) (A_0 - A_1) - 2A_0 (1 + \mu^2)] \\
 c_2 = & \frac{A_0^2 w}{H^2} \bar{p} + \frac{2\mu}{\sqrt{3} A_0 H} (A_0^2 A_1 z^2 - A_0 A_3 \mu H) + \frac{2\mu}{H^2} [A_0^2 z (A_0 - A_1) + \\
 & - A_0 A_3 H] + \frac{\bar{w}}{A_0 H^2} \left\{ 2A_0^2 A_2 A_3 + A_2 A_0^2 A_1 + \right. \\
 & \left. - H A_3^2 \left[3\mu (A_0 + A_1) - \frac{1 + 2\mu^2}{\mu} A_0 \right] \right\} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$\bar{p} = \frac{\sqrt{3} \bar{w}}{\sqrt{3w^2 + H^2 v^2}}, \quad A_0 = \sqrt{1 - \mu^2}, \quad A_1 = -A_0 + \mu^2 \ln \frac{1 + A_0}{\mu}$$

$$A_2 = -A_0 + \ln \frac{1 + A_0}{\mu}, \quad A_3 = \frac{H^2 v}{3w^3} [H(uv - \bar{w}') - \bar{w}vz]$$

$$\begin{aligned}
 A_4 = & \frac{\mu^2 H}{9w^4} [2\mu^2 v H (\bar{w}z) - H\mu t - zuv] (H^2 v^2 - 6\bar{w}) + \\
 & + 3\bar{w}^2 H^2 v^4 - 9\mu^2 H^2 \bar{w} \mu^2 v^2 - \bar{w} \mu^2 (3w^2 - 2H^2 v^2) (H^2 v^2 + z^2 v^2)
 \end{aligned}$$

Заметим, что и здесь неизвестная постоянная \bar{p} входит только в выражение нагрузки оболочки

$$\bar{p} = \frac{p}{\sigma_0 c^2} \frac{R^2}{l^2} \quad (3.4)$$

Таким образом, задача проектирования оболочки наименьшего объема при гладкой поверхности текучести (1.5), (1.6), соответствующей постоянству интенсивности касательных напряжений, сводится к линейной системе дифференциальных уравнений (3.2) относительно шести функций \bar{w} , u , v , t , H , z .

Условия симметрии относительно середины пролета оболочки имеют вид

$$\begin{aligned}
 u \Big|_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \right), \quad z \Big|_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{dh}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \right) \\
 t \Big|_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{dM_x}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \right) \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Значения величин \bar{w} , v , H должны удовлетворять достаточному условию наименьшего объема (1.3), которое с учетом (3.1)—(3.3) примет вид

$$2\sqrt{3} A_0 \bar{\omega} (A_0 + A_1) + A_1 H v - 2\sqrt{3} A_0^2 = 0 \quad (3.7)$$

Это трансцендентное уравнение при $\bar{\omega} \rightarrow 1$ имеет только нулевое решение относительно Hv , в силу чего поставленная задача имеет смысл только при $0 \ll \bar{\omega} < 1$.

Безразмерные величины нагрузки \bar{p} , толщины \bar{h} и кривизны оболочки \bar{v} выражаются через соответствующие размерные величины с участием неизвестной постоянной c . Поэтому значения этих величин не могут быть произвольными. Для данного значения \bar{p} действительные значения \bar{v}_0 и \bar{h} должны удовлетворять условию (3.6) и при решении задачи Коши относительно системы (3.2) обеспечить одновременное выполнение условия шарнирного опирания оболочки

$$\bar{w}' \Big|_{\bar{x} = \bar{x}_1} = 0 \quad (w' |_{r=r_1} = 0), \quad \frac{H^2 A_1}{A_0^2} \Big|_{\bar{x} = \bar{x}_1} \rightarrow 0 \quad (M_r |_{r=r_1} = 0) \quad (3.8)$$

На основе вышесказанного следует, что численное решение задачи можно реализовать по той же схеме, что и при кусочно-линейных поверхностях текучести, которая была рассмотрена в предыдущем пункте. Единственной разницей заключается в том, что с целью нахождения начального значения безразмерной толщины оболочки срединного ее сечения H_0^* необходимо каждый раз для выбранных значений $\bar{\omega}_0$ и \bar{v}_0^* решить трансцендентное уравнение (3.6).

В табл. 2 представлены некоторые результаты решения задачи по схеме гладкой поверхности текучести.

Таблица

$$M^* = \frac{2\sqrt{3}}{\tau_0} \frac{R^2}{l^3} M \cdot 10^4, \quad p^* = \frac{p}{\tau_0} \frac{R^2}{l^3}, \quad v_0^* = v_0 \cdot 10^4, \quad V^* = \frac{V}{16\pi l^3}$$

	$p^* = 0.552, \quad v_0^* = 1158.99, \quad V^* = 0.0102$										
\bar{x}	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.92	0.94	0.96	0.98	1
$\bar{\omega}$	0.9995	0.9961	0.9733	0.8904	0.6564	0.4242	0.3626	0.2941	0.2174	0.1300	0
$\frac{hR}{l}$	0.8185	0.7198	0.4899	0.3912	0.2826	0.2038	0.1826	0.1579	0.1274	0.0848	0
M^*	244.18	284.93	625.38	761.96	616.96	374.72	308.81	236.41	157.24	70.99	0

Вычисления показывают, что значение объема оболочки V гл. соответствует гладкой поверхности текучести, как и следовало ожидать [13] находится между значениями объемов, полученными при кусочно-линейных поверхностях текучести. Причем нижнее значение V_{II} соответствует условию 2, верхнее V_I — условию 1. Например, при $\frac{pR^2}{\tau_0 l^2} = 0.55$

$$\frac{V_{II}}{16\pi l^3} = 0.008 < \frac{V_{1.2}}{16\pi l^3} = 0.010 < \frac{V_I}{16\pi l^3} = 0.012$$

R. M. KIRAKOSIAN

ԱՄԵՆԱՓՈՔԻ ԻՆՎԱԼԻ ԵՐԱՇԵՐՏ ՊԼԱՍՏԻԿ ԳԼԱՆԱՅԻՆ
ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՆԱԳՈՒԹՅՈՒՆ

U. m. i. n. i. s. t. r. a. t. e.

Իդեալական պլաստիկության տեսության շրջանակներում դիտարկվում է եզրերով հողակապորեն հենված ամենափոքր ծավալ ունեցող կլոր գլանային թաղանթի նախադժման խնդիրը, երբ թաղանթի վրա ազդում է հավասարաչափ բաշխված արտաքին բեռ: Ստացված են խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումների սխառմաները՝ թաղանթի հոսունության կտոր առ կտոր զծային և ողորկ մակերևույթների դեպքերի համար: Անհայտ հաստատունի ներմուծման միջոցով եզրային խնդիրը բերված է նյութի հատկություններից և թաղանթի եզրաչափերից անկախ, չափում չունեցող մեծությունների նկատմամբ կոշտ խնդրի: Ընդհանուր լուծման արդյունքներն ամփոփված են 1 և 2 աղյուսակներին մեջ: Բերված են դրաֆիկներ:

ON DESIGNING A SINGLE-LAYER PLASTIC CYLINDRICAL SHELL OF THE SMALLEST VOLUME

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

The problem of designing a circular cylindrical shell of the smallest volume under uniformly distributed external load is considered in terms of the theory of ideal plasticity. The systems of differential equations of the problem for the case of smooth and break-linear surfaces of the shell's fluidity are obtained. By introducing an unknown constant the boundary problem is reduced to the Cauchy problem relative to dimensionless quantities independent of characteristics of the material and overall dimensions of the shell. The results of the general solution are shown in tables.

ЛИТЕРАТУРА

1. Друккер Д., Шилл Р. Границы для проектирования конструкций минимального веса. Сб. Механика, 1958, 3 (49).
2. Фрайбергер В. О проектировании цилиндрических слоистых оболочек минимального веса. Сб. Механика, 1958, 3 (49).
3. Шилл Р. Методы оптимального проектирования конструкций. Сб. Механика, 1962, 2 (72).
4. Шамисо Ф. Г. О проектировании оболочек минимального веса. Изв. АН АзССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1963, № 5.
5. Шилл Р. Методы оптимального проектирования при действии ряда независимых систем нагрузок. Сб. Механика, 1964, 2 (84).
6. Прагер В. Проектирование пластинок наименьшего веса. Сб. Механика, 1956, 6 (40).

7. Микеладзе М. Ш. Введение в техническую теорию идеально пластических тонких оболочек. Тбилиси, «Мецниереба», 1969.
8. Дехтярь А. С., Варвак М. Ш. Оптимизационная задача для пластинки переменной толщины. Изв. высш. учебн. завед., Стр-во и архит., 1974, № 9.
9. Рейтман М. И., Шопиро Г. С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М., «Наука», 1976.
10. Чжу С. Я., Прагер В. Последние достижения в оптимальном проектировании конструкций. Сб. Механика, 1969, 6 (118).
11. Чирис А. А., Баркаускас Э., Каркаускас Р. П. Теория и методы оптимизации упруго-пластических систем. Стройиздат, 1974.
12. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
13. Немировский Ю. В. Об оценках веса пластических оптимальных конструкций. МТТ, 1968, № 4.