

С. М. МХИТАРЯН, К. А. АГАЯН

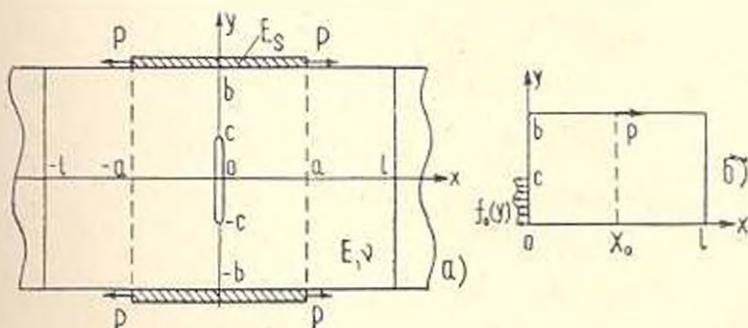
ОБ ОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ  
 ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ, РАССЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНАМИ  
 И УСИЛЕННОЙ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Задачи для полосы и прямоугольной области с отдельными типами концентраторов напряжений (штамп, трещина, стрингер) рассматривались многими авторами. Не останавливаясь подробно на отдельных работах, отметим, что достаточно полная библиография таких работ содержится в [1—4].

В работах [5—7] исследовано влияние стрингеров на поле напряжений в пластинах, расслабленных трещиной конечной длины.

В настоящей работе исследуется контактная задача о передаче нагрузки от периодической системы стрингеров к полосе, когда последняя расслаблена периодически повторяющимися с тем же периодом центральными трещинами. Определяющие интегральные уравнения решены методом ортогональных многочленов. Обсуждены некоторые частные случаи и приведен численный пример.

1. Пусть упругая полоса шириной  $2b$  расслаблена периодической системой с периодом  $2l$  симметрично расположенных центральных трещин длиной  $2c$  ( $0 \leq c < b$ ). Оба края полосы усилены периодически повторяющимися с тем же периодом, симметрично расположенными упругими стрингерами малой толщины  $h$  и длины  $2a$  ( $0 \leq a < l$ ). Пусть, далее, стрингеры на своих концах нагружены растягивающими силами  $P$ , а на берегах трещины действует только нормальная нагрузка интенсивностью  $f_0(y)$  (фиг. 1а).



Фиг. 1.

Предполагая, как обычно [8, 9], что стрингеры находятся в одноосном напряженном состоянии, требуется определить законы распределения тангенциальных контактных напряжений под стрингерами, а также коэффи-

циенты интенсивности нормальных напряжений на концах трещин и, в конечном итоге, выявить эффект взаимодействия стрингеров и трещин.

С целью формулировки поставленной задачи в виде определенного уравнения построим сначала функцию влияния для соответствующей плоской задачи. Последнее означает построить решение для расслабленной указанным способом полосы, предполагая, что стрингеры отсутствуют, а на ее краях непосредственно приложены растягивающие сосредоточенные силы  $p$ .

Ввиду периодичности и симметричности задачи рассмотрим только четвертую часть основного периода (фиг. 16). Соответствующие граничные условия для нее будут

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(0, y) = \tau_{xy}(l, y) = 0, \quad (0 \leq x \leq l) \\ u(a, y) = v(x, 0) = 0, \quad (0 \leq y \leq b) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, b) = p\delta(x - x_0), \quad (0 \leq x_0 \leq l) \\ \tau_{xy}(x, b) = 0, \quad (0 \leq x \leq l) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(0, y) = f_0(y), \quad (0 \leq y < c) \\ u(0, y) = 0, \quad (c \leq y \leq b) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\delta(x)$  — известная дельта-функция Дирака.

Решение задачи представим при помощи функции напряжения Эри  $F(x, y)$ , связанной напряжениями и перемещениями при помощи известных формул

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ E^* u = \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \nu^* \frac{dF}{dx} + e_0 y + u_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$E^* v = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \nu^* \frac{dF}{dy} + e_0 x + v_0, \quad (e_0, u_0, v_0 = \text{const})$$

Здесь  $E^* = E$ ,  $\nu^* = \nu$  при обобщенном плоском напряженном состоянии и  $E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ,  $\nu^* = \frac{\nu}{1 - \nu}$  при плоской деформации полосы, где

$E$  — ее модуль упругости, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Функцию  $F(x, y)$  представим в виде разложения

$$\begin{aligned} F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \mu_k x (A_k \operatorname{ch} \mu_k y + B_k \mu_k y \operatorname{sh} \mu_k y) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \cos \mu_k y \left[ \frac{\operatorname{ch} \mu_k (l - x)}{\operatorname{sh} \mu_k l} + \mu_k l \frac{\operatorname{ch} \mu_k x}{\operatorname{sh}^2 \mu_k l} + \mu_k x \frac{\operatorname{sh} \mu_k (l - x)}{\operatorname{sh} \mu_k l} \right] E_k - \\ - \frac{u_0}{2l} y^2; \quad \mu_k = \pi k / l, \quad \nu_k = \pi k / b \end{aligned} \quad (1.5)$$

с неизвестными коэффициентами  $u_n$ ,  $A_n$ ,  $B_n$  и  $E_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Приняв  $u_0 = v_0 = 0$  и используя (1.4) и (1.5), нетрудно убедиться, что условия симметрии (1.1) удовлетворяются тождественно.

Далее, используя разложение

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \mu_n x_0 \sin \mu_n x, \quad (0 < x, x_0 < l)$$

и известные разложения функций  $\operatorname{ch} \mu_n x$ ,  $\operatorname{sh} \mu_n x$ ,  $x \operatorname{ch} \mu_n x$ ,  $x \operatorname{sh} \mu_n x$  и ряды Фурье [10] по  $\cos \mu_n x$  в интервале  $(0, l)$ , при удовлетворении граничных условия (1.2) придём к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2p \sin \mu_n x_0}{\mu_n l} \frac{\operatorname{sh} \mu_n b}{\Delta(\mu_n b)} - \frac{4}{l} \frac{\operatorname{sh} \mu_n b + \mu_n b \operatorname{ch} \mu_n b}{\Delta(\mu_n b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n^3 E_n}{(\mu_n^2 + \mu_n^2)^2} \\ B_n &= \frac{2p \sin \mu_n x_0}{\mu_n l} \frac{\operatorname{ch} \mu_n b}{\Delta(\mu_n b)} + \frac{4 \operatorname{sh} \mu_n b}{l \Delta(\mu_n b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n^3 E_n}{(\mu_n^2 + \mu_n^2)^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\Delta(x) = (\operatorname{sh} 2x + 2x)/2$$

а из (1.4) при помощи (1.5) находим

$$u(0, y) = \frac{2}{E^*} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k \cos \mu_k y + \frac{u_0}{E^*}, \quad (0 \leq y \leq b) \quad (1.7)$$

Положив

$$\frac{u_0 b}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} k E_k \cos kt = \begin{cases} |g(t), & (0 \leq t \leq \beta) \\ 0, & (\beta \leq t \leq \pi) \end{cases} \quad (1.8)$$

будем иметь

$$u_0 = -\frac{2}{b} \int_0^{\beta} t g'(t) dt, \quad E_k = -\frac{2}{\pi k^2} \int_0^{\beta} g'(t) \sin ktdt \quad (1.9)$$

где  $g(t)$  — неизвестная функция,  $\beta = \pi c/b$ ; а  $t = \frac{\pi y}{b}$ .

Обращаясь теперь ко второму из граничных условий (1.3), при помощи (1.7) и (1.8) легко видеть, что оно удовлетворяется тождественно. Удовлетворяя же первому из граничных условий (1.3), на основе (1.6) и (1.9) после некоторых, но довольно громоздких выкладок, для определения неизвестной функции  $g'(t)$  получим следующее сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\xi} \left| \operatorname{ctg} \frac{t-\xi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t+\xi}{2} + K_{22}(t, \xi) \right| g'(t) dt =$$

$$- pK_{21}^*(x_0, \xi) + 2f_0^*(\xi), \quad (0 \leq \xi < \beta) \quad (1.10)$$

где

$$K_{22}(t, \xi) = \frac{4b}{\pi l} t + 4 \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos k\xi \sin kt -$$

$$- \frac{4b}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k \vartheta_k(t)}{\Delta(\gamma_k \pi)} \left[ (1 - \gamma_k \pi \operatorname{cth} \gamma_k \pi) \operatorname{ch} \gamma_k \xi + \gamma_k \xi \operatorname{sh} \gamma_k \xi \right]$$

$$K_{21}^*(x_0, \xi) = \frac{4b^2}{\pi^2 l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \gamma_k x_0 \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \pi}{\Delta(\gamma_k \pi)} \left[ (\gamma_k \pi \operatorname{th} \gamma_k \pi - 2) \operatorname{ch} \gamma_k \xi - \gamma_k \xi \operatorname{sh} \gamma_k \xi \right]$$

$$M_k = \frac{\Delta(q_k \pi)}{\operatorname{sh}^2 q_k \pi} - 1, \quad \vartheta_k(t) = t \operatorname{ch} \gamma_k t - \pi \operatorname{cth} \gamma_k \pi \operatorname{sh} \gamma_k t$$

$$f_0^*(\xi) = \frac{b^2}{\pi^2} f_0 \left( \frac{b\xi}{\pi} \right), \quad \gamma_k = kb/l, \quad q_k = kl/b \quad (1.11)$$

Отметим, что первый интеграл в (1.10) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Очевидно, что решение уравнения (1.10) должно удовлетворять условиям

$$g'(t) = -g'(-t), \quad g'(0) = 0$$

Не останавливаясь здесь на решении уравнения (1.10), оно будет дано ниже, отметим лишь, что из физического смысла функции  $g'(t)$  и из уравнения (1.10) следует, что она должна иметь особенность порядка  $1/2$  в точке  $t = \beta$ , то есть на конце трещины.

Но так как

$$\frac{b^2}{\pi^2} \sigma_x \left( 0, \frac{b\xi}{\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\xi} \left| \operatorname{ctg} \frac{t-\xi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t+\xi}{2} + \right.$$

$$\left. + K_{22}(t, \xi) \right| g'(t) dt - \frac{p}{2} K_{21}^*(x_0, \xi) \quad (\beta < \xi \leq \pi) \quad (1.12)$$

где  $K_{22}(t, \xi)$  и  $K_{21}^*(x_0, \xi)$  даются формулами (1.11), то, как известно [11], и  $\sigma_x(0, b\xi/\pi)$  имеет особенность порядка  $1/2$  при  $\xi \rightarrow \beta + 0$ , что согласуется с известными асимптотическими формулами в окрестности конца трещины [2].

Имея функцию  $g'(t)$ , из (1.9) и (1.5) можем определить  $u_0$ ,  $E_k$ ,  $A_k$  и  $B_k$ , а по формулам (1.4) — поле напряжений и перемещений. В частности, для перемещения точек края полосы будем иметь формулу

$$\begin{aligned}
 E^* u(x, b) = & \frac{2p}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2l}(x+x_0)}{\sin \frac{\pi}{2l}(x-x_0)} \right| - \frac{4p}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} N_k \frac{\sin \lambda_k x_0 \sin \lambda_k x}{k} \\
 & - \int_0^b \left[ \frac{4\pi}{b^2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \sin kl \left( x \frac{e^{-q_k \pi} \operatorname{ch} \mu_k x}{\operatorname{sh} q_k \pi} - \frac{e^{-q_k \pi} \operatorname{sh} \mu_k x}{\mu_k \operatorname{sh} q_k \pi} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{l \operatorname{sh} \mu_k x}{\operatorname{sh}^2 q_k \pi} \right) - \frac{4b}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \theta_x(t) \sin \lambda_k x}{\Delta(\gamma_k \pi) \operatorname{sh} \gamma_k \pi} - \frac{4}{b} \operatorname{arctg} \frac{\sin t}{e^{x/b} - \cos t} \right. \\
 & \left. - \frac{2\pi x}{b^2} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} \frac{x}{b} + \cos t} + \frac{2(l-x)t}{lb} \right] g'(t) dt \quad (1.13) \\
 & (0 \leq x \leq l, \quad 0 < x_0 < l)
 \end{aligned}$$

где

$$N_k = 1 - \operatorname{ch}^2 \gamma_k \pi / \Delta(\gamma_k \pi)$$

Отметим, что при получении (1.10) и (1.13) были использованы разложения [12]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = -\ln 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|, \quad (0 < x < 2\pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kx}{k^2 + a^2} = -\frac{\pi \operatorname{sh} ax}{2 \operatorname{sh} a\pi}, \quad (0 < x < \pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^k \sin kx = \frac{p \sin x}{1 - 2p \cos x + p^2}, \quad (|p| < 1)$$

2. Возвращаясь теперь к решению основной контактной задачи (фиг. 1а), еще раз отметим, что вследствие малости толщины  $h$  жесткость стрингера на изгиб пренебрежимо мала, вследствие чего его нормальным давлением на полосу можно пренебречь [8, 9].

Обозначим через  $\tau(x)$  подлежащее определению тангенциальное контактное напряжение, возникающее под стрингерами. Тогда из уравнения равновесия элемента стрингера и на основании закона Гука будем иметь

$$u^{(2)}(x) = \frac{du^{(2)}(x)}{dx} = \frac{1}{hE_s} \left[ P - \int_0^x \tau(s) ds \right], \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2.1)$$

Здесь  $E_s$  — модуль упругости материала стрингера,  $u^{(2)}(x)$  — горизонтальное перемещение его точек.

С другой стороны, на основании принципа наложения из (1.13) получим

$$\frac{du(x, b)}{dx} = \frac{1}{E^* l} \int_0^a \left| \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2l} (x_0 - x) + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2l} (x_0 - x) + K_{11}^*(x_0, x) \right| \times \\ \times \tau(x_0) dx_0 + \frac{1}{E^* l} \int_0^b K_{12}^*(t, x) g'(t) dt, \quad (0 \leq x < a) \quad (2.2)$$

где

$$K_{11}^*(x_0, x) = -4 \sum_{k=1}^{\infty} N_k \sin \lambda_k x_0 \cos \lambda_k x \\ K_{12}^*(t, x) = \frac{2t}{b} + \frac{4=1^2}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k \sin kt}{\operatorname{sh} q_k \pi} \left| \frac{\operatorname{ch} \mu_k x}{\operatorname{sh} q_k \pi} - \frac{\pi x}{l} \frac{\operatorname{sh} \mu_k x}{e^{q_k \pi}} \right| + \\ + \frac{4b\pi^2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cos \lambda_k x}{\Delta(\lambda_k \pi)} \frac{\psi_k(t)}{\operatorname{sh} \gamma_k \pi} - \frac{2\pi/l}{b^2} \frac{\frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi x}{b} \sin t}{\left( \operatorname{ch} \frac{\pi x}{b} + \cos t \right)^2} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в условие контакта

$$\frac{du(x, b)}{dx} = \frac{du^{(s)}(x)}{dx}, \quad (0 \leq x < a)$$

после некоторых элементарных выкладок относительно контактных напряжений получим следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение с ядром Гильберта:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \left| \operatorname{ctg} \frac{t-y}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t+y}{2} + K_{11}(t, y) \right| \varphi'(t) dt + \\ + \int_0^b K_{12}(t, y) \psi(t) dt - \frac{t}{\pi} \varphi(y), \quad (0 \leq y < a) \quad (2.4)$$

где

$$K_{11}(t, y) = K_{11}^*\left(\frac{b}{\pi} t, \frac{l}{\pi} y\right), \quad K_{12}(t, y) = \frac{b}{\pi} K_{12}^*\left(t, \frac{l}{\pi} y\right) \\ \varphi(y) = P - \int_0^a \tau^*(t) dt, \quad \alpha = \pi a/l, \quad \tau^*(t) = \frac{l}{\pi} \tau\left(\frac{l}{\pi} t\right) \quad (2.5) \\ \psi(t) = g'(t)/b, \quad \lambda = E^* l/hE,$$

при граничном условии

$$\alpha(x) = P$$

Отметим, что первый интеграл в (2.4) понимается в смысле главного значения по Коши.

Следует еще отметить, что истинное распределение тангенциальных контактных напряжений теперь дается формулой

$$\tau(x) = \frac{\pi}{l} \varphi' \left( \frac{\pi}{l} x \right)$$

Уравнение (2.4) с уравнением (1.10), которое в обозначениях (2.5) имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_0^b \left| \operatorname{ctg} \frac{t-\xi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t+\xi}{2} + K_{22}(t, \xi) \right| \varphi(t) dt + \\ + \int_0^{\xi} K_{21}(t, \xi) \varphi'(t) dt = \frac{2}{b} f^*(\xi), \quad (0 \leq \xi < \beta)$$

т.е.

$$K_{21}(t, \xi) = -\frac{1}{b} K_{21}^* \left( \frac{lt}{\pi}, \xi \right)$$

а  $K_{21}^*$  и  $K_{22}^*$  даются формулами (1.11), образуют систему двух сингулярных интегральных уравнений для определения нужных функций  $\varphi'(t)$  и  $\varphi(t)$ .

Следует отметить, что при  $\beta = 0$  и  $b \rightarrow \infty$  уравнение (2.4) переходит в известное уравнение, рассмотренное в работах [13, 14].

3. Вследствие симметричности задачи, решение системы сингулярных уравнений (2.4) и (2.6) представим формулами [14, 15]

$$\varphi'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \frac{T_{2n+1} \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \frac{t}{2} \sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}} \quad (3.1)$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \frac{T_{2n+1} \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right)}{\cos \frac{t}{2} \sqrt{2(\cos t - \cos \beta)}} \quad (3.2)$$

где  $T_{2n+1}(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) — многочлены Чебышева первого рода,  $\{X_n, Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (3.1) и (3.2) в (2.4) и (2.6) и имея в виду следующее функциональное соотношение между многочленами Чебышева первого и второго рода [14, 15]:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \left[ \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t+s}{2} \right] \frac{T_{2k+1} \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) dt}{\cos \frac{t}{2} \sqrt{2} (\cos t - \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{U_{2k} \left( \operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{s}{2}}, \quad \left( \begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots \\ \alpha < \pi \end{array} \right)$$

где  $U_{2k}(x)$  — многочлены Чебышева второго рода, по известной процедуре для определения неизвестных коэффициентов  $\{X_n, Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  получим следующую систему бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$X_m + \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} X_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_{m,n} Y_n = a_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

$$Y_m + \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} X_n + \sum_{n=0}^{\infty} D_{m,n} Y_n = b_m$$

где

$$A_{m,n} = A_{m,n}^{(1)} + A_{m,n}^{(2)}$$

$$A_{m,n}^{(1)} = -\frac{8}{\pi^2} (2m+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_k}{k} J_n^{(k)}(\alpha) J_m^{(k)}(\beta)$$

$$A_{m,n}^{(2)} = \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\pi^2 (2n+1)} \int_0^{\alpha} \frac{\sin x \sin (2m+1)x \sin (2n+1)x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 x} dx$$

$$B_{m,n} = B_{m,n}^{(1)} + B_{m,n}^{(2)} + B_{m,n}^{(3)}$$

$$B_{m,n}^{(1)} = \frac{4 \cos \frac{\alpha}{2}}{(2n+1) \cos \frac{\beta}{2}} (-1)^{m-n} \left[ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right]^{2m+1} \left[ \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \right]^{2n+1}$$

$$B_{m,n}^{(2)} = -\frac{8b^2}{l^2} (2m+1) \cos \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\Delta(\gamma_k^2) \operatorname{sh} \gamma_k \pi} f_m^{(k)}(\alpha) T_n(\beta, \vartheta_k(t)) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4l^2}{\pi b^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{\operatorname{sh} q_k \pi} J_n^{(k)}(\beta) \left| \frac{U_m(\beta, t \operatorname{sh} q_k t)}{e^{q_k t}} - \right. \\
 & \quad \left. \frac{\pi U_m(\alpha, \operatorname{ch} q_k t)}{\operatorname{sh} q_k \pi} \right| \\
 B_{m,n}^{(2)} = & - \frac{2l^2}{\pi b^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \int_0^{\beta} \frac{y \operatorname{sh} q_1 y U_{2m} \left( \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) dy}{\cos \frac{t}{2} \sqrt{2} (\cos t - \cos \alpha)^{-1/2}} \times \\
 & \times \int_0^{\beta} \frac{\sin t T_{2m-1} \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) dt}{(\operatorname{ch} q_1 y + \cos t)^2 \cos \frac{t}{2} \sqrt{2} (\cos t - \cos \alpha)} \\
 a_m = & \frac{2lP}{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} (-1)^m \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right|^{2m-1} \\
 C_{m,n} = & - \frac{4b}{\pi^2 l \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \pi}{\Delta(\gamma_k \pi)} J_n^{(k)}(\beta) [\gamma_k U_m(\beta, t \operatorname{sh} \gamma_k t) + \\
 & + (2 - \gamma_k \pi \operatorname{th} \gamma_k \pi) U_m(\beta, \operatorname{ch} \gamma_k t)] \\
 D_{m,n} = & D_{m,n}^{(1)} + D_{m,n}^{(2)} + D_{m,n}^{(3)} \\
 f_{m,n}^{(1)} = & \frac{8b}{\pi l (2n+1)} (-1)^{m+n} \left| \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \right|^{2m+2n+1} \\
 D_{m,n}^{(2)} = & \frac{8(2m+1)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} M_k J_m^{(k)}(\beta) J_n^{(k)}(\beta) \\
 D_{m,n}^{(3)} = & - \frac{4b^2}{\pi^2 l^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\Delta(\gamma_k \pi)} T_n(\beta, \partial_k(t)) [\gamma_k \mathcal{G}_m(\beta, t \operatorname{sh} \gamma_k t) + \\
 & + (1 - \pi \gamma_k \operatorname{cth} \gamma_k \pi) U_m(\beta, \operatorname{ch} \gamma_k t)] \\
 b_m = & \frac{2b}{\pi^2 \operatorname{tg} \beta/2} U_m \left( \beta, f_0 \left( \frac{b}{\pi} t \right) \right)
 \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$J_p^{(q)}(x) = \int_0^{x/2} \cos(2p+1)x \sin 2q \left| \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos x \right) \right| dx$$

$$T_p(z, f(t)) = \int_0^x f(t) \frac{T_{2p+1}\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) dt}{\cos \frac{t}{2} \sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}}$$

$$U_p(z, f(t)) = \int_0^x f(t) \frac{U_{2p}\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}}{\cos \frac{t}{2}} dt$$

Следует отметить, что ядра бесконечных систем (3.3) зависят лишь от отношений  $b/l$ ,  $c/b$ ,  $a/l$ .

Легко заметить, что регулярные части ядер интегральных уравнений (2.4) и (2.6) и их частные производные, как нетрудно убедиться, — квадратично интегрируемые функции. Тогда можно доказать [16, 17], что при любом значении  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda < \infty$ ) система бесконечных систем линейных уравнений (3.3) квазивполне регулярна. При этом сумма модулей ядер бесконечных систем (3.3) при  $m \rightarrow \infty$  стремится к нулю, по крайней мере, как  $m^{-1/2-\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  — малое положительное число.

Определив из (3.3) коэффициенты  $\{X_n, Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  и, по формулам (3.1) и (3.2) будем иметь функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ .

Напряжение  $\sigma_x(0, y)$  на продолжении линий трещины определяется формулой (1.12). Опираясь на результаты [11] о поведении интеграла Гипа Коши вблизи концов линий интегрирования, для определения коэффициента интенсивности нормальных напряжений на конце трещины будем иметь формулу

$$K = \lim_{y \rightarrow c} \sqrt{2\pi(y-c)} \sigma_x(0, y) = \frac{-\pi^2}{\cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{2b \sin \frac{\alpha}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \quad (3.4)$$

4. Рассмотрим теперь следующую задачу. Упругая полоса шириной  $2b$  расслаблена центральной трещиной длины  $2c$ , перпендикулярной к краям полосы. Одновременно полоса по своим краям усилена упругими стрингерами длиной  $2a$ , симметрично расположенными относительно линий трещины. На обоих концах стрингеров приложены растягивающие силы  $P$ , а на берегах трещины действует нормальное давление  $\sigma_x(0, y) = f(y)$ , ( $|y| < c$ ). Кроме того, предполагается, что полоса на бесконечности растягивается однородным полем напряжений  $p_0$ .

Заметим, что эта задача при отсутствии стрингеров рассматривалась во многих работах, из которых укажем [18].

Отметим, что решение этой задачи можно получить из решения рассмотренной выше задачи при помощи предельного перехода  $l \rightarrow \infty$  в интегральных уравнениях (2.4) и (2.6), добавляя при этом, конечно, соответствующие члены, зависящие от  $p_0$ . Но проще разбираемую задачу решить заново, представляя функцию напряжения Эри в виде

$$F(x, y) = \int_0^{\frac{1}{2}} [A(t) \operatorname{ch} \lambda y + B(t) \lambda y \operatorname{sh} \lambda y] \cos \lambda x dt + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} E_k e^{-\nu_k x} (1 - \nu_k x) \cos \nu_k y + \frac{p_0}{2} y^2, \quad \nu_k = \pi k/b$$

Тогда совершенно аналогичным образом, как это сделано выше, решение этой задачи можно привести к решению следующей системы сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} + K_{11}(t, x) \right] \varphi'(t) dt + \\ + \int_0^{\frac{1}{2}} K_{12}(t, x) \psi(t) dt = \frac{1}{2} [\lambda^2 \gamma(x) - a p_0], \quad (0 \leq x < 1) \quad (4.1) \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \operatorname{ctg} \frac{t-y}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t+y}{2} + K_{22}(t, y) \right] \psi(t) dt + \\ + \int_0^{\frac{1}{2}} K_{21}(t, y) \varphi'(t) dt = g^*(y) \quad (0 \leq y < \frac{1}{2})$$

где введены следующие обозначения:

$$K_{11}(t, x) = 2a \int_0^{\frac{1}{2}} N(\lambda\pi) \sin(\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda \\ K_{12} = a \int_0^{\frac{1}{2}} \lambda M(\lambda\pi) \frac{t \operatorname{ch} \lambda t - \pi \operatorname{cth} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda t}{\operatorname{sh} \lambda \pi} \cos(\lambda x) d\lambda - \\ - \frac{a^2 x \operatorname{sh} \lambda x \sin t}{[\operatorname{ch} \lambda x + \cos t]^2} \\ K_{22}(t, y) = -4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - \lambda \pi \operatorname{cth} \lambda \pi) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda y}{\Delta(\lambda\pi)} (t \operatorname{ch} \lambda t - \\ - \pi \operatorname{cth} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda t) d\lambda \\ K_{21}(t, y) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2 - \lambda \pi \operatorname{th} \lambda \pi) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda y}{\Delta(\lambda\pi)} \operatorname{ch} \lambda \pi \sin(\lambda t) d\lambda$$

$$g^*(y) = \frac{2b}{\pi^2} \left[ -p_0 + f_0 \left( \frac{by}{\pi} \right) \right], \quad \varphi(x) = P - \int_0^1 z^*(s) ds$$

$$a = \frac{\pi a}{b}, \quad z^*(s) = a z(as), \quad N(i\pi) = \frac{\operatorname{ch}^2 i\pi}{\Delta(i\pi)} - 1$$

$$M(i\pi) = 2i\pi/\Delta(i\pi), \quad \lambda^* = E^* a / hE_s$$

Остальные обозначения соответствуют обозначениям первой задачи. Решение системы (4.1) представим в виде разложения

$$\varphi'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^{(1)} \frac{T_{2n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^{(2)} \frac{T_{2n+1} \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right)}{\cos \frac{t}{2} \sqrt{2(\cos t - \cos \beta)}} \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1), для определения неизвестных коэффициентов  $\{Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$  получим квазивполне регулярную систему бесконечных систем линейных уравнений, имеющую совершенно аналогичную с (3.3) структуру.

5. Численные результаты получены для первой задачи на ЭВМ «Найри-2» при следующих значениях параметров задачи:  $l=b$ ,  $\lambda=1$ ,  $f_0(y) = -q_0 = \cos \beta$ . Различным значениям  $\beta(0; \pi/4; \pi/2; 3\pi/4)$  соответствуют трещины разных длин, а значениям  $\alpha(0; \pi/4; \pi/2; 3\pi/4)$  — стрингеры разных длин.

Для таких значений параметров были вычислены контактные напряжения под стрингерами, а также коэффициенты интенсивности разрывающего напряжения. При этом бесконечные системы (3.3) решены методом редукции (16 уравнений), а соответствующие коэффициенты бесконечных систем вычислены с точностью 0.0001. Некоторые результаты этих вычислений приведены в виде графиков (фиг. 2) и таблиц. В табл. 1 приведены значения отношения коэффициентов интенсивности напряжений  $K/K_0$ , где  $K_0$  — коэффициент интенсивности разрывающих напряжений в конце трещины при наличии стрингеров, когда растягивающие силы  $P$  приложены к их концам, а  $K$  — тот же самый коэффициент интенсивности напряжений, но при отсутствии стрингеров, когда силы  $P$  в соответствующих точках непосредственно приложены к полосе. Оба они определяются формулой (3.4), где коэффициенты  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  соответственно указанным случаям определяются при помощи бесконечной системы (3.3).

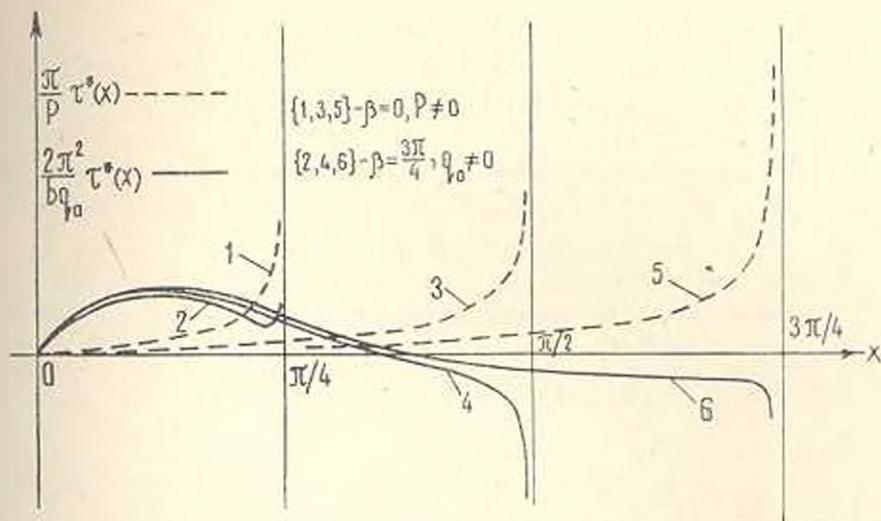
Таблица 1

|          | $\beta = 3\pi/4$    |         |          |                     |         |          |
|----------|---------------------|---------|----------|---------------------|---------|----------|
|          | $P \neq 0, q_0 = 0$ |         |          | $P = 0, q_0 \neq 0$ |         |          |
| $\alpha$ | $\pi/4$             | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi/4$             | $\pi/2$ | $3\pi/4$ |
| $K/K_0$  | 16.1980             | 4.9837  | 1.3203   | 1.0010              | 1.0182  | 1.1713   |

В табл. 2 приведены значения осевых напряжений  $\sigma^{(s)}(0)$  в стрингерах.

Таблица 2

| $\beta$                               | 0       |         |          | $\pi/4$ |         | $3\pi/4$ |          |
|---------------------------------------|---------|---------|----------|---------|---------|----------|----------|
|                                       | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $\pi/2$  | $3\pi/4$ |
| $\frac{\lambda}{P} \sigma^{(s)}(0)$   | 0.8847  | 0.7739  | 0.6446   | 0.8852  | 0.8851  | 0.7814   | 0.6568   |
| $\frac{r_0 h}{b q_0} \sigma^{(s)}(0)$ | —       | —       | —        | —       | -0.1079 | -0.0840  | -0.0516  |



Фиг. 2.

Сопоставление графиков показывает, что:

а) при  $\beta = 0$  (трещина отсутствует) коэффициент интенсивности тангенциальных напряжений при возрастании  $\alpha$  увеличивается;

б) при  $\beta \neq 0$ ,  $P = 0$  с изменением  $\alpha$  контактные напряжения резко изменяются, становясь даже знакопеременными. В обоснование этого утверждения можно привести следующее соображение. Под внутренним давлением  $q_0$  берега трещины расходятся, вследствие чего ее конец с опускается. Последнее в свою очередь приводит к тому, что горизонтальные перемещения точек края полосы в полупериоде  $(0, l)$  становятся знакопеременными, чем и обусловлена знакопеременность контактных напряжений;

в) если  $q_0 = 0$ ,  $P \neq 0$ , то при малых  $\beta$  трещина фактически не влияет на распределение контактных напряжений (эти графики не показаны). При  $\beta = 3\pi/4$  присутствие трещины влияет, хотя и мало, на распределение кон-

тактных напряжений, увеличивая их в средних участках контакта и уменьшая у концов стрингеров.

Институт механики АН  
Армянской ССР

Поступила 17 XI 1977

Ս. Մ. ՄԻՒՔԻՏՅԱՆ, Կ. Լ. ԱՂԱՅԱՆ

ՀԱՔԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԵՎ ԱՌԱՋԿԱԿԱՆ ՎԵՐԱԳԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒՅՆՎԱՑՎԱԾ  
ԱՌԱՋԿԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ԸՄ ԳԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՑԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է առաձգական վերադիրների և առաձգական շերտի կոնտակտային փոխազդեցության պարբերական խնդիրը, երբ շերտը թուլացված է վերադիրների նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված կենտրոնական ճաքերով:

Ենթադրելով, որ վերադիրները դտնվում են միասանցք յարվածային վիճակում, խնդրի լուծումը ձևակերպվում է Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ համասարումների սխեմանի տեսքով:

Չեքիշևի օրթոգոնալ բաղմանդամների մեթոդի օգնությամբ ինտեգրալ հավասարումների սխեմանի լուծումը բերվում է քվադրի լիովին ռեգուլյար դձային հավասարումների անվերջ սխեմանի:

Դիտարկվում է թվային օրինակ:

## ON A PERIODIC CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC STRIP WEAKENED BY CRACKS AND REINFORCED BY ELASTIC STIFFENERS

S. M. MCHITARIAN, K. L. AGAYAN

### S u m m a r y

A periodic contact problem on interaction of thin elements in the shape of stiffeners with an elastic strip, where the latter is weakened by central cracks periodically repeating with the same period, is considered.

Assuming the stiffeners to be in a single — axis strained state, the solution to the problem is formulated as a system of singular integral equations with Hilbert's kernel.

By means of Chebishev's orthogonal polynomials, the solution to the integral equation system is reduced to a solution of a quasi-regular system of infinite systems of linear equations.

A numerical example is given.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
2. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Доцышин. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. К., «Наукова думка», 1976.
4. Партон В. Э., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. М., «Наука», 1974.
5. Каландия А. И. О применении метода функции влияния в плоской теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 4.
6. Грейф Р., Сэндерс мл. Влияние стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной. Прикл. мех., Тр. Америк. о-ва ниж. мех., сер. Е, 1965, т. 32, № 1.
7. Азян К. А. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 4.
8. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с креплением. ПММ, 1968, т. 32, № 4.
9. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикл. мех., Тр. Америк. о-ва инж.-мех., сер. Е, 1968, т. 35, № 4.
10. Абрамян Б. А. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
11. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
13. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, № 5.
14. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, № 3.
15. Шагинян С. С. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины с круговым отверстием, усиленной упругими накладками. Докл. АН АрмССР, 1974, т. 59, № 3.
16. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, № 5.
17. Азян К. А. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины с упругими накладками. МТТ, 1972, № 5.
18. Iida M. Stress intensity factors for the tension of an eccentrically cracked strip. J. appl. Mech., ser. E., 1966, v 33, No. 3.