ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

Ю. М. ПОЧТМАН, З. И. ПЯТИГОРСКИЙ

О ПРОЕКТИРОВАНИИ ИЗГИБАЕМЫХ ПЛАСТИН МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ

1. В развитие работы авторов [1] в настоящей работе анализируется проектирование изгибаемых приспосабливающихся пластин минимального веса при воздействии соответствующих статических и квазипостоянных нагрузок.

Проектирование конструкций минимального веса так же, как и их оптимизация по другим характеристикам, обязательно ведется с учетом необходимости обеспечить их прочность и достаточную жесткость. При этом распространенным является случай, когда одни нагрузки воздействуют на конструкцию систематически и, ввиду этого, их требования к жесткости конструкции значительно превышают аналогичные требования по отношению к другим нагрузкам, превышающим первые по модулю, но значительно менее вероятным (например, аварийным). В этих случаях, а также во многих других задачах инженерной практики возникает необходимость анализа предельного состояния конструкций. Предельное состояние конструкции при квазистатическом нагружении может быть установлено методами теории приспособляемости, одним из обязательных аспектов которых до недавнего времени считалась необходимость предварительного анализа работы конструкций в предположении неограниченной упругости материала, то есть предположении $\sigma_т \to \infty$. Указанное обстоятельство значительно усложняло анализ приспособляемости и сдерживало его внедрение в практику. Поэтому получение проекта оптимальной по приспособляемости конструкции без анализа ее работы в упругой стадии весьма актуально. В работе [1] показана такая возможность для ряда случаев нагружения прямоугольных пластин.

2. Рассматривается оптимальное проектирование пластин из идеального упруго-пластического материала, подчиняющегося диаграмме Прандтля. Пластины нагружены силовой квазистатической нагрузкой, то есть нагрузкой, изменяющейся достаточно медленно, чтобы можно было пренебречь динамическими эффектами, но достигающей своего максимума и минимума неоднократно и по неизвестной программе. В случае, когда отношение модулей максимума и минимума нагрузки близко к единице, нагрузку будем называть квазипостоянной. В работе [2] показано, что оптимальное проектирование приспосабливающихся конструкций позволяет получить проекты конструкций, для которых прилагаемые проектные квазистатические и квазипостоянные нагрузки предельны, то есть воспринимающая их оптимальная конструкция находится в предельном состоянии: дальней-

шее циклическое увеличение нагрузки приводит ее к разрушению в том смысле, что она неспособна ему сопротивляться. При этом проектируемые оптимальные пластины должны воспринимать нагрузку при упругой работе материала. Однако, в начальных циклах изменения нагрузки допускаются ограниченные пластические деформации. Естественно, что эти пластические деформации могут вызвать в пластине остаточные напряжения. Если сумма этих не зависящих от времени остаточных напряжений в любой точке пластины с напряжениями, вычисленными для этой же точки в любой момент времени в предположении упругой работы материала, безопасна, то с этого момента пластина будет воспринимать квазистатическую нагрузку при чисто упругой работе материала (понятие безопасности конкретизируется теорией прочности).

Поиск таких остаточных напряжений базируется на фундаментальных теоремах приспособляемости Мелана и Койтера [3]. Статическая теорема приспособляемости Мелана утверждает, что если указанное выше статически возможное самоуравновешенное поле остаточных напряжений можно себе представить, то приспособляемость обязательно наступит, хотя действительное поле остаточных напряжений может не совпадать с представленным: вид действительного поля зависит от конкретной истории нагружения. Описанная в [2] методика позволяет запроектировать конструкцию без анализа истории нагружения, так как знание только пределов изменения всех параметров нагрузки не дает возможности в общем случае описать всевозможные истории нагружения с последующим их перебором.

Примем, что всякая сложная нагрузка задана пределами изменения зависящих от одного параметра простых нагрузок, совокупностью которых она является. В качестве условия безопасности принимаем условие Мизеса. Можно показать, что для любой нормали к срединной поверхности изгибаемой пластины безопасное состояние точек нормали, лежащих на поверхности пластины, эквивалентно безопасному состоянию всех точек нормали в целом. Поэтому условие безопасности Мизеса для всей изгибаемой пластины может быть записано в следующей форме:

$$\forall r(x, y) \in (A = \max(M_x^2 + M_y^2 - M_x \cdot M_y + 3M_{xy}^2)_t \leq H^2)\ldots \qquad (2.1)$$

где M_x, M_y, M_{xy} — соответственно действующие изгибающие и крутящий моменты в точке $r(x, y)$ срединной поверхности пластины, $H = \sigma_T h^2/6$, h — толщина пластины в той же точке, σ_T — предел текучести материала пластины. В дальнейшем для остаточных усилий принят индекс „0", для вычисленных в предположении упругой работы пластины — индекс „e". Состояние приспособляемости изгибаемой пластины постоянной толщины описывается зависимостью (2.1) с подстановками:

$$M_x = M_x^0 + M_x^e; \qquad M_y = M_y^0 + M_y^e; \qquad M_{xy} = M_{xy}^0 + M_{xy}^e \qquad (2.2)$$

при одновременном удовлетворении этой же зависимости подстановками

$$M_x = M_x^0; \qquad M_y = M_y^0; \qquad M_{xy} = M_{xy}^0 \qquad (2.3)$$

для квазистатической нагрузки. Так как в любой момент времени $M^* = \sum_N \alpha_i M_i^*$, где N — количество однопараметрических нагрузок, составляющих нагружение, то есть его параметров, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то задача отыскания A может быть сформулирована в пространстве параметров α_i измерения N. Можно доказать методом математической индукции, что $\max A$ достигается на границах области существования α_i, то есть либо $\alpha_i = 0$, либо $\alpha_i = 1$. Таким образом, для определения A в точке $r(x, y)$ нет необходимости устанавливать экстремум методами математического программирования, а достаточно решить следующее уравнение:

$$A = \max (A (\max M_x),\ A (\max M_y),\ A (\max M_{xy})$$
$$A (\min M_x),\ A (\min M_y),\ A (\min M_{xy})) \tag{2.4}$$

Здесь для M значения те же, что в (2.2) и (2.3).

Таким образом, рассмотрение приспособляемости пластины при действии сложной квазистатической нагрузки может быть эквивалентно заменено рассмотрением взаимодействия статически возможного поля остаточных усилий с полями огибающих.

3. Представляется естественной постановка задачи проектирования пластины, удовлетворяющей следующим требованиям:

$$\exists M^0 \neq 0 \to (\forall r \in R \to f(M^e + M^0) \leqslant H^2)\ \&$$
$$\forall \beta > 1 \to (\exists \bar{r} \in R \to f(\beta M^e + M^0)_{\bar{r}} > H^2)\ \& \tag{3.1}$$
$$(\forall \beta < 1\ \&\ \forall (\bar{M}^0 \neq M^0)_{\bar{r}}) \to (\exists \bar{r} \in R \to f(\beta M^e + \bar{M}^0) > H^2)$$

Удовлетворяющая этим условиям пластина и поле возникших в ней остаточных усилий названы нами оптимальными по приспособляемости. Невозможность проанализировать возможные истории нагружения привела к тому, что оптимальное по приспособляемости поле остаточных усилий фиктивно в смысле теоремы Мелана: его существование доказывает способность пластины приспособиться к нагрузке. В то же время, оно не единственно: существуют и другие оптимальные по приспособляемости поля. Однако, все эти поля имеют одинаковые значения M^0 в точках, где $f(M^e + M^0) = H^2$, так как именно этим обеспечивается экстремальность оптимальной по приспособляемости конструкции (О. П. К.) и ее единственность: проект пластины (ее толщина) определяется именно этими стационарными в указанном смысле значениями M^0. В остальных точках срединной поверхности пластины значения M^0 не единственны. Таким образом, задача отыскания M^0 по (1.5) есть многоэкстремальная задача математического программирования и в этом состоит главная особенность указанного подхода.

4. Для полей остаточных усилий единственно известным в настоящее время является дискретное представление.

Условие самоуравновешенности названного поля в функциональной форме имеет вид

$$\frac{\partial^2 M_x^0}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^0}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.1)$$

Аппроксимируя это уравнение сеткой на срединной поверхности пластины, заменяем его по известным формулам линейным оператором

$$\begin{matrix} -0.5\, M_{xy} & M_y \mu^2 & 0.5\, M_{xy}\mu \\ M_x & -2\,(M_x + M_y \mu^2) & M_x \\ 0.5\, M_{xy}\mu & M_y \mu^2 & -0.5\, M_{xy}\mu \end{matrix} \qquad (4.2)$$

Здесь μ — соотношение сторон сетки $\mu = \Delta y / \Delta x$. Так как уравнений (узлов сетки) значительно меньше, чем неизвестных, приходится решать задачу математического программирования большой размерности: например, в пластине с сеткой 5×5 количество управляемых параметров достигает 47.

5. Для численной реализации на ЭВМ задачи (3.1) с учетом (1÷4.7) используем моделирующий приспособляемость алгоритм случайного поиска, описанный в [1], который обладает следующими особенностями:

а) слабой чувствительностью к повышению размерности пространства управляемых параметров;

б) возможностью получения множества оптимальных по приспособляемости полей остаточных усилий;

в) возможностью получения траектории фазовой точки статически возможного процесса приспособляемости в пространстве компонент остаточных усилий;

г) алгоритм не налагает никаких дополнительных ограничений на управляемые параметры поля остаточных усилий.

Последняя особенность алгоритма, по нашему мнению, представляется необходимой ввиду следующего обстоятельства. Многими исследователями (например, в работах [4], [5] и [6]) к параметрам поля остаточных усилий (напряжений) обычно проявляются некоторые интегральные требования (на стадии формулировки задачи — в [4] и [5] или в алгоритме решения — в [6]). С их учетом представляется необходимым дополнительно доказать тождественность полученного проекта оптимальному по приспособляемости, что достаточно сложно в многоэкстремальной задаче. Кроме того, алгоритм случайного поиска требует лишь непрерывности функции цели и функций ограничений, тогда как большинство регулярных методов поиска требуют [7] их дифференцируемости.

Необходимо обратить внимание, что применение данного метода приводит к множеству статически возможных полей остаточных усилий и для случая простого нагружения.

6. Рассмотрим проектирование О. П. К. — пластины, нагруженной квазипостоянной нагрузкой, область безопасности материала которой описывается условием Мизеса. Существование приспособляемости для конструкции из такого материала доказано в [3]. В работе [8] авторами предложено поле остаточных напряжений $\sigma(M^{\circ})$ в приспосабливающейся конструкции представлять в виде

$$\sigma(M^{\circ}) = \sigma(\bar{M}^{\circ}) + \sigma(M^{\circ}(N)) \tag{6.1}$$

где $\bar{M}^{\circ}$ —составляющая поля M°, самоуравновешенная в сечении, а $M^{\circ}(N)$— составляющая поля M°, приводимая в сечениях к полю N усилий в лишних связях и самоуравновешенная в конструкции в целом. Составляющая $\bar{M}^{\circ}$, естественно, является функцией формы сечения. Для прямоугольного сечения, а, следовательно, и для пластины в краевых волокнах

$$\max|\sigma(\bar{M}^{\circ})| = 0.5\,\sigma_T$$

Рассмотрим прямоугольную свободно опертую пластину, нагруженную в центре сосредоточенной квазипостоянной силой P, такой, что

$$\bar{P}' \leqslant P \leqslant \bar{P} \wedge 1 - \frac{\bar{P}'}{\bar{P}} = \alpha \wedge \alpha \leqslant 1 \tag{6.2}$$

Введем следующие коэффициенты: λ_s — коэффициент расширения области упругой работы конструкции (определяется как отношение предельной приспосабливающей нагрузки P_s к нагрузке P^* — предельной по условию отсутствия пластических деформаций при нагружении пластинки из естественного состояния). $\bar{\lambda}_s$ — коэффициент снижения несущей способности конструкции при изменении характера нагрузки со статического на квазипостоянный (определяется как отношение предельной статической нагрузки P_{**}, превышение которой недопустимо ввиду образования в пластине механизма разрушения с пластическими шарнирами, к предельной приспосабливающей нагрузке P_s).

P_* вычисляется по известным формулам из [8], а P_s определяется по описанной выше методике ((2.1), (2.2), (2.4), (4.2), (6.1)). Полученные для различных отношений сторон пластины μ величины этих коэффициентов приведены в таблице.

Таблица

№ п/п	μ	λ_s	$\bar{\lambda}_s$	№ п/п	μ	λ_s	$\bar{\lambda}_s$
1	1.0	2.0	1.44	4	2.5	2.0	1.82
2	1.5	2.0	1.52	5	3.0	2.0	1.98
3	2.0	2.0	1.66				

В рассмотренных случаях имеет место отмеченное в [1] равенство предельной квазипостоянной нагрузки P_s и верхнего по модулю предела квазистатической нагрузки, когда нижним пределом является нуль, то есть разгрузка. Малейшее нарушение условий приспособляемости для рассматриваемой квазипостоянной нагрузки приводит к пластической диссипации энергии в точках, принадлежащих по напряженному состоянию к поверхности нагружения и, естественно, к приращению пластической деформации.

Полученные здесь результаты свидетельствуют, что для определенных случаев предельная статическая нагрузка P_s недостижима даже теоретически, если учесть, что «идеальных» статических нагрузок не существует. Отмеченное явление внешне в определенном напоминает ползучесть, однако наблюдение его затруднено тем фактом, что подавляющее большинство конструкционных материалов обладает свойством упрочняться, а так как для упрочняющихся материалов приспособляемость имеет место [9], то после некоторого периода нарушения условий приспособляемости к квазипостоянной нагрузке, когда исчерпывается площадка текучести и начинается упрочнение, пластические деформации прекращаются, ибо наступает приспособляемость при новом, увеличенном значении предела текучести σ_T.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступила 18 XI 1976

Յու. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ, Զ. Ի. ՊՅԱՏԻԳՈՐՍԿԻ

ԱՄԵՆԱՔԻՉ ԿՇՌՈՎ ԵՎ ԸՍՏ ՀԱՐՄԱՐՎՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ ԾՌՎՈՂ ՍԱԼԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է քվազիստատիկ ուժային բեռով բեռնավորվող սալերի օպտիմալ նախագծումը։

Թույլ են տրվում սահմանափակված պլաստիկական դեֆորմացիաներ և նրանցով պայմանավորված մնացորդային լարումներ։ Վերլուծությունը կատարվում է հարմարվողականության տեսության հիման վրա։

Բեռնավորման պատմությունը անհայտ է յուրաքանչյուր անկախ բեռի մասին հայտնի է միայն նրա տեսակը, նրա կիրառման տեղը և նրա մեծության փոփոխության սահմանները։

Ստացված արդյունքների հիման վրա վերլուծվում են կոնստրուկցիայի առաձգական աշխատանքի շրջանակի լայնացումը քվազի հաստատուն բեռնավորման դեպքում, ինչպես նաև բեռի քվազի հաստատուն կիրառման ժամանակ նրա սահմանային մեծության փոքրացումը ստատիկական բեռի հետ համեմատած։

Արդյունքները ստացվել են պատահական որոնումների եղանակով։

THE DESIGNING OF BENDING [PLATES OF MINIMAL WEIGHT, OPTIMAL IN SHAKEDOWN

Yu. M. POCHTMAN, Z. I. PYATIGORSKY

S u m m a r y

The optimal designing of plates loaded quasi-statically is considered. A limited plastic deformation and the resulting stresses are permitted. The analysis is made in terms of the shakedown theory. The load history is unknown: only the shape, the place of its application and the limits of variation in its value are known.

The expansion of the field of the structure's elastic work under quasi-constant load as well as the lowering of the value of limited load under quasi-constant loading, compared with its statical application, are analyzed on the basis of the results obtained by the random search method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Почтман Ю. М., Пятигорский З. И.* О влиянии истории нагружения на предельные состояния некоторых оптимальных по приспособляемости конструкций. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 4.
2. *Почтман Ю. М., Пятигорский З. И.* Оптимальное проектирование приспосабливающихся конструкций как метод установления их предельного состояния. Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 6.
3. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М., 1961.
4. *Чирас А. А., Аткочюнас Ю. Ю.* Математические модели поверочного расчета упруго-пластического тела при повторно-переменном загружении. Вильнюс, Литовский мех. сборник, 1970, № 2 (7).
5. *Чирас А. А., Аткочюнас Ю. Ю.* Математические модели проектного расчета упруго-пластического тела при повторно-переменном загружении. Вильнюс, Литовский мех. сборник, 1971, № 1 (8).
6. *Лантух А. Г., Перельмутер А. В.* К вопросу о приспособляемости пластин. Проблемы прочности, № 6. Киев. «Наукова думка», 1970.
7. *Волынский Э. И., Почтман Ю. М.* Алгоритм метода случайного поиска для оптимизации стержневых и континуальных систем. Строительная механика и расчет сооружений, 1974, № 5.
8. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник под общей ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М., 1968.
9. *Киракосян Р. М.* Теорема о приспособляемости тел к переменным внешним воздействиям при произвольном упрочнении материала. Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 52, № 4.