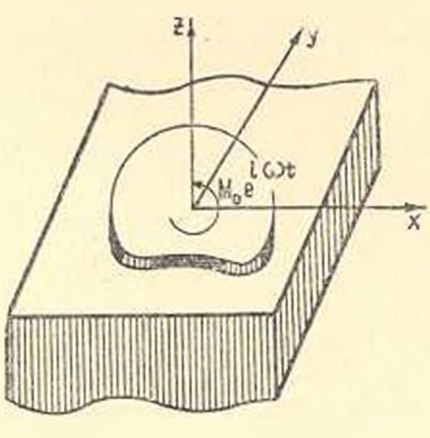
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, В. Г. БУРЯК

НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ ШТАМПОМ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе рассматривается задача о совместном колебании упругого изотропного полупространства и жесткой на растяжение пластинки (штампа), к которой приложен крутящий момент (фиг. 1) $M_0 e^{i\omega t}$ (t — время). Изгибную жесткость пластинки предполагаем пренебрежимо малой. Между поверхностями штампа и полупространства в области их контакта Ω осуществлено полное сцепление. В дальнейшем, для краткости, говоря о напряжениях, перемещениях, сдвиге фаз, подразумеваем их амплитудные значения. Истинные значения получаются умножением на $e^{i\omega t}$. С помощью метода Винера-Хопфа получено приближенное решение задачи в достаточно простой форме для полосовой области контакта при больших значениях относительной частоты $\varkappa = \omega a (\rho/G)^{1/2}$ (ρ, G — плотность и модуль сдвига упругого полупространства, a — полуширина штампа). Насколько известно авторам, подобная задача ранее не рассматривалась.



Фиг. 1.

§ 1. Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} u = f_1(x, y) \\ v = f_2(x, y) \end{array}\right| \text{ при } (x, y) \in \Omega \text{ и } z = 0$$

$$\sigma_z = 0 \text{ при любых } x, y \text{ и } z = 0 \tag{1.1}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ вне области } \Omega \text{ при } z = 0$$

Здесь u и v — упругие перемещения по осям x и y, σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} — напряжения на площадке с нормалью z.

Пользуясь принципом предельного поглощения [1], в правой части системы уравнений Ляме, помимо инерционных членов, будем учитывать член $i\rho\varepsilon\omega^2 u$, $\varepsilon > 0$, соответствующий наличию вязкого трения. В этом случае нужно считать, что напряжения и перемещения на бесконечности исчезают. Используя двумерное преобразование Фурье, поставленную смешанную задачу сведем к системе двух двумерных интегральных уравнений первого рода

$$\iint\limits_{\Omega} \tau_1(\xi,\eta) K_{11}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta + \iint\limits_{\Omega} \tau_2(\xi,\eta) K_{12}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta =$$

$$= 4\pi^2 G f_1(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \tag{1.2}$$

$$\iint\limits_{\Omega} \tau_1(\xi,\eta) K_{12}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta + \iint\limits_{\Omega} \tau_2(\xi,\eta) K_{22}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta =$$

$$= 4\pi^2 G f_2(x,y), \quad (x,y) \in \Omega$$

Здесь $\tau_1(x, y) = \tau_{xz}(x, y) = \tau_{11}(x, y) + i\tau_{12}(x, y)$, $\tau_2(x, y) = \tau_{yz}(x, y) = \tau_{21}(x, y) + i\tau_{22}(x, y)$ — касательные напряжения в области контакта,

$$K_{11}(p, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int F_1(\beta, \gamma, k)[F(\gamma, k)]^{-1} e^{i(\alpha p+\beta s)}\, d\alpha d\beta$$

$$K_{12}(p, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int F_2(\alpha, \beta, \gamma, k)[F(\gamma, k)]^{-1} e^{i(\alpha p+\beta s)}\, d\alpha d\beta$$

$$K_{22}(p, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int F_1(\alpha, \gamma, k)[F(\gamma, k)]^{-1} e^{i(\alpha p-\beta s)}\, d\alpha d\beta$$

$$F_1(\beta, \gamma, k) = -4\beta^2\gamma^2 + (3\beta^2 + \gamma^2 - k^2)k^2 + 4\beta^2\sqrt{\gamma^2-k^2}\sqrt{\gamma^2-b_0^2k^2}$$

$$F_2(\alpha, \beta, \gamma, k) = \alpha\beta\left(4\gamma^2 - 3k^2 - 4\sqrt{\gamma^2-k^2}\sqrt{\gamma^2-b_0^2k^2}\right)$$

$$F(\gamma, k) = \sqrt{\gamma^2-k^2}\left[4\gamma^2\sqrt{\gamma^2-k^2}\sqrt{\gamma^2-b_0^2k^2} - (2\gamma^2-k^2)^2\right]$$

$$F_1(\alpha, \gamma, k) = F_1(\beta, \gamma, k)\big|_{\beta=\alpha}, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$k^2 = \rho\omega^2 G^{-1}(1 - i\varepsilon), \qquad b_0^2 = (1-2\nu)/2(1-\nu)$$

ε — коэффициент пропорциональности, характеризующий внутреннее трение, ν — коэффициент Пуассона.

Для больших значений параметра $|k|$ и полосовой области контакта система уравнений (1.2) с точностью до членов порядка $\dfrac{1}{|k|^2}$ распадается на два независимых уравнения:

$$\int\limits_{-a}^{a} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_j(\xi, \eta)\, d\eta \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - k^2}}\, e^{i[\gamma(x-\xi)+\beta(y-\eta)]}\, d\gamma\, d\beta = 4\pi^2 G f_j(x, y) \quad (1.3)$$

$$(j = 1, 2)$$

Принимая во внимание, что $f_1(x, y) = -\theta y$, $f_2(x, y) = \theta x$ и разыскивая решения уравнений (1.3) соответственно в форме

$$\tau_1(x, y) = -y\tau_1^*(x), \quad \tau_2(x, y) = \tau_2^*(x) \quad (1.4)$$

с учетом равенств

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma e^{i\gamma(x-\xi)}\, d\gamma\, d\beta = y, \quad \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta(y-\eta)}\, d\gamma\, d\beta = 1$$

понимаемых в смысле теории обобщенных функций [2], убедимся, что $\tau_1^*(x)$ и $\tau_2^*(x)$ должны быть найдены из одномерных интегральных уравнений первого рода, которые в безразмерных переменных будут иметь вид

$$\int\limits_{-1}^{1} \tau_j(\xi)\, k_i[\varkappa(x - \xi)]\, d\xi = \pi\Delta f_j^*(x), \quad (|x| \leqslant 1, \ j = 1, 2) \quad (1.5)$$

$$k_i[\varkappa(x - \xi)] = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos[\varkappa(x - \xi)m]\, dm}{\sqrt{m^2 - (1 - i\varepsilon)}} \quad (1.6)$$

Здесь $\Delta = Ga^{-1}$, $f_1^*(x) = \theta$, $f_2^*(x) = \theta x$, $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ — амплитуда угла поворота штампа. Используя метод работы [3], получим главный член асимптотики решения уравнений (1.5) для больших $\varkappa$. С учетом обозначений (1.4) при $\varepsilon \to 0$ будем иметь

$$\tau_1(x, y) = -\Delta\theta\varkappa i\,[e^{-i\varkappa(1+x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1+x)} + \operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1+x)} +$$

$$+ e^{-i\varkappa(1-x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1-x)} + \operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1-x)} - 1]\, y \quad (1.7)$$

$$\tau_2(x, y) = \Delta\theta\varkappa i\left|\left(x - \frac{1}{2}i\varkappa\right)e^{-i\varkappa(1+x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1+x)} + \right.$$

$$+ x\operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1+x)} - \left(x + \frac{1}{2}i\varkappa\right)e^{-i\varkappa(1-x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1-x)} +$$

$$\left. + x\operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1-x)} - x\right|, \quad \left(\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-s^2}\, ds\right)$$

Далее определим реактивный момент, действующий на штамп со стороны полупространства, отнесенный к единице длины

$$M_* = \frac{1}{2b}\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-b}^{b} [x\tau_2(x, y) - y\tau_1(x, y)]\, dy = M_1 + iM_2 \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) в (1.8), получим

$$M_z = \Delta\theta\left[(1 + 4\varkappa i)\,\mathrm{erf}\sqrt{2\varkappa i} + 2\sqrt{2\varkappa i}\,e^{-2\varkappa i}/\sqrt{\pi} - 2\varkappa i\right]/3 \tag{1.9}$$

$$(M_z = M_z'/b^3, \quad M_z = M_1 + iM_2)$$

В формулах (1.8) и (1.9) учтено, что штамп не бесконечно длинный, а имеет конечную, но достаточно большую длину.

§ 2. Получим формулы для подсчета угла сдвига фаз φ и модуля комплексной амплитуды колебания штампа θ_0. Запишем уравнение вращательного движения штампа относительно оси z

$$J_z \frac{d^2}{dt^2}(\theta e^{i\omega t}) = M_0 e^{i\omega t} - M_z e^{i\omega t} \tag{2.1}$$

где

$$\operatorname{Jm} M_0 = 0, \quad J_z = J_z'/b^5, \quad M_0 = M_0'/b^3$$

J_z' — момент инерции штампа относительно оси z.

Выполнив дифференцирование в (2.1) и произведя разделение действительной и мнимой частей, получим, принимая во внимание (1.9)

$$M_0 = \theta_1(A_{11} - J_z\omega^2) + A_{12}\theta_2, \quad 0 = \theta_1 A_{21} + \theta_2(A_{22} - J_z\omega^2) \tag{2.2}$$

Решая систему (2.2) относительно θ_1 и θ_2, найдем

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \theta_2/\theta_1 = A_{21}^*(\varkappa^2 J_z^* - A_{22}^*)^{-1}$$

$$\theta_0^* = \left[(\varkappa^2 J_z^* - A_{11}^*)^2 + (A_{12}^*)^2\right]^{-1/2} \tag{2.3}$$

Здесь

$$J_z^* = J_z(a\rho)^{-1}, \quad A_{nj}^* = A_{nj}/\Delta, \quad (n, j = 1, 2)$$

$$M_1 = (A_{11}\theta_1 + A_{12}\theta_2)\Delta, \quad M_2 = (A_{21}\theta_1 + A_{22}\theta_2)\Delta \tag{2.4}$$

$$A_{22} = A_{11}, \quad A_{21} = -A_{12}, \quad \theta_0^* = \theta_0\Delta/M_0, \quad \theta_0 = (\theta_1^2 + \theta_2^2)^{1/2}$$

Результаты вычисления величин

$$\tau_{11}(0, 1)/\Delta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2, \quad \tau_{12}(0, 1)/\Delta = -a_2\theta_1 + a_1\theta_2$$

$$\tau_1(1, 1)/\Delta[\theta_1 - \theta_2 + i(\theta_1 + \theta_2)] = a_3, \quad \tau_{21}^*(1, 1)/\Delta = b_1\theta_1 + b_2\theta_2$$

$$\tau_{22}^*(1, 1)/\Delta = -b_2\theta_1 + b_1\theta_2, \quad \tau_j^*(1, 1) = \lim_{x\to 1}\tau_j(x, 1)\sqrt{1 - x}$$

$$M_1/\Delta = c_1\theta_1 + c_2\theta_2, \quad M_2/\Delta = -c_2\theta_1 + c_1\theta_2$$

$$c_1 = A_{11}, \quad c_2 = A_{12}$$

произведенные по найденным в п. 1 асимптотическим формулам, сведены в табл. 1, 2.

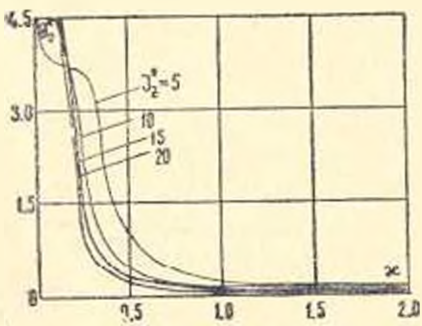
Таблица 1

$\varkappa$	a_1	a_2	b_1	b_2
0.25	-0.3036	0.2526	0.598	0.199
0.50	-0.3077	0.3672	0.564	0.000
0.75	-0.2458	0.5132	0.576	-0.115
1.00	-0.1542	0.6982	0.598	-0.199
1.25	-0.0524	0.9213	0.624	-0.268
1.50	0.0469	1.1781	0.651	-0.326
1.75	0.1348	1.4628	0.678	-0.377
2.00	0.2054	1.7690	0.705	-0.423
2.25	0.2549	2.0897	0.731	-0.465
2.50	0.2817	2.4182	0.757	-0.505

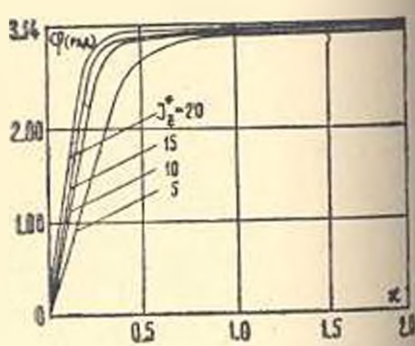
Таблица

$\varkappa$	a_3	c_1	c_2
0.25	-0.199	0.3168	-0.2750
0.50	-0.282	0.3745	-0.3908
0.75	-0.345	0.3825	-0.5139
1.00	-0.399	0.3703	-0.6532
1.25	-0.446	0.3517	-0.8078
1.50	-0.489	0.3345	-0.9741
1.75	-0.528	0.3226	-1.1477
2.00	-0.564	0.3170	-1.3244
2.25	-0.598	0.3172	-1.5007
2.50	-0.631	0.3215	-1.6745

На фиг. 2, 3 изображены зависимости величин φ и θ_0^- от безразмерной частоты $\varkappa$ при различных значениях безразмерного момента инерции J_2^*.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Видно, что для значений $\varkappa \geqslant 0.25$ модуль комплексной амплитуды уменьшается с увеличением $\varkappa$ и J_2^*, а угол сдвига фаз φ увеличивается с увеличением $\varkappa$ и J_2^*, что вполне соответствует физическому смыслу задачи.

Ростовский государственный университет
Ворошиловградский машиностроительный институт

Поступила 29 XII 1976

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Վ. Գ. ԲՈՒՐՅԱԿ

ԴՐՈՇՄՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՈԼՈՐՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՈՉ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է առաձգական կիսատարածության և դրոշմի համատեղ տատանման վերաբերյալ ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիրը, երբ դրոշմի վրա կիրառվել է ըստ ժամանակի հարմոնիկ օրենքով փոփոխվող ոլորող մոմենտ։

Խնդրի լուծումը բերվել է երկչափանի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի։

Ցույց է տրված, որ տատանումների բավականաչափ մեծ հաճախականության դեպքում այդ հավասարումները կարելի է լուծել միմյանցից անկախ։

Վիներ-Խոպֆի մեթոդի օգնությամբ ստացվել է ասիմպտոտական լուծում պլանում խիստ ձգված ուղղանկյունաձև դրոշմի տատանումների համար։

THE AXIASYMMETRIC DYNAMIC PROBLEM ON STAMP TORSION OF A RESILIENT SEMISPACE

V. M. ALEXANDROV, V. G. BURYAK

S u m m a r y

The axiasymmetric dynamic problem on joint vibration of a resilient semispace and stamp is considered.

Torque changable by harmonic law dependent of time is applied to the stamp. The problem is reduced to a system of two two-dimensional integral equations of the first kind. It is shown that at a sufficiently great frequency of vibration these equations may be solved irrespective of each other. By the Wiener-Hopf method an asymptotic solution in an analytic space is obtained for the case of vibration of the stamp of a strongly expanded rectangular shape in plane.

All the major characteristics of the problem are examined numerically.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М., «Наука». 1976.
3. *Александров В. М., Буряк В. Г.* Динамическая смешанная задача деформации чистого сдвига для упругого полупространства. Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 4.