ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

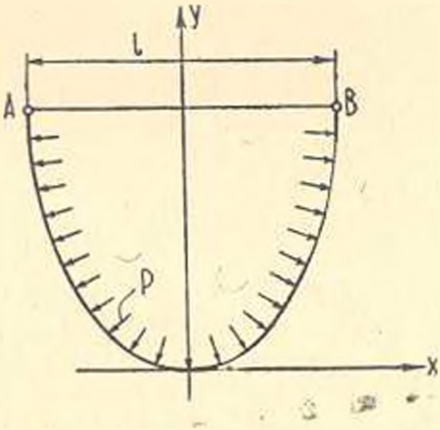
Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

А. А. ЧАХОЯН

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ МЯГКОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

1. В некоторых практических случаях представляет интерес задача о колебаниях мягкой цилиндрической оболочки, подверженной внутреннему давлению; в частности, это относится к гибкому ограждению аппарата на воздушной подушке. Но обычно при анализе колебаний таких оболочек вес оболочки не учитывается, причем возникающая при этом ошибка остается неясной. Для оценки этой ошибки ниже рассматривается задача о свободных колебаниях такой оболочки с учетом собственного веса.

Оболочка, которая считается безмоментной и нерастяжимой, закреплена двумя образующими, расположенными в одной горизонтальной плоскости (фиг. 1). Считая задачу плоской, отнесем все рассуждения к оболочке, размер которой вдоль образующей равен единице.



Фиг. 1.

Дифференциальные уравнения свободных колебаний оболочки в проекциях на оси x и y имеют вид [1]

$$\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(N\frac{\partial x}{\partial s}\right)+p\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(N\frac{\partial y}{\partial s}\right)-p\frac{\partial x}{\partial s}-q \tag{1.1}$$

где t — время, $x(s, t)$ и $y(s, t)$ — координаты точек срединной поверхности, s — координата по длине дуги оболочки, ρ и q — масса и вес оболочки на единицу площади ее срединной поверхности, N — окружное нормальное усилие, зависящее от времени и координаты, p — нормальное давление, величину которого мы будем считать неизменной.

Условие нерастяжимости оболочки имеет вид

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2=1 \tag{1.2}$$

Если в уравнениях (1.1) положить левые части равными нулю, то получим уравнения, определяющие форму равновесия оболочки; далее с учетом соотношений $\dfrac{dx}{ds} = \cos\varphi$, $\dfrac{dy}{ds} = \sin\varphi$ нетрудно найти [4]:

$$
\begin{aligned}
\frac{ds}{d\varphi} &= \frac{C}{(p + q\cos\varphi)^2} \\
N &= \frac{C}{p + q\cos\varphi}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Здесь φ — угол между касательной к контуру и осью x в состоянии равновесия (фиг. 2); C — постоянная, которую можно вычислить по формуле

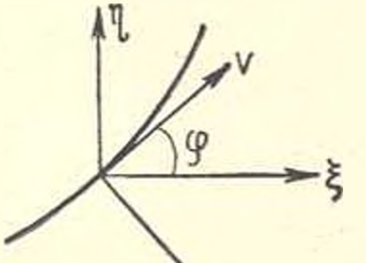
при $q < p$

$$
C = \frac{L(p^2 - q^2)}{2\left[\dfrac{2p}{\sqrt{p^2 - q^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{p^2 - q^2}\,\operatorname{tg}(\varphi_0/2)}{p + q} - \dfrac{q\sin\varphi_0}{p + q\cos\varphi_0}\right]} \tag{1.4}
$$

при $q > p$

$$
C = \frac{L(q^2 - p^2)}{2\left[\dfrac{q\sin\varphi_0}{p + q\cos\varphi_0} - \dfrac{p}{\sqrt{q^2 - p^2}} \ln \dfrac{\sqrt{q^2 - p^2}\,\operatorname{tg}(\varphi_0/2) + p + q}{\sqrt{q^2 - p^2}\,\operatorname{tg}(\varphi_0/2) - p - q}\right]} \tag{1.5}
$$

где φ_0 — угол между касательной к контуру и осью x в закрепленных точках, L — длина дуги оболочки. Эти формулы можно получить из рассмотрения равновесной формы оболочки.



Фиг. 2.

2. При колебаниях можно принять

$$
\begin{aligned}
x &= x_0(s) + \xi(s, t) \\
y &= y_0(s) + \eta(s, t) \\
N &= N_0(s) + N_*(s, t)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Здесь $x_0(s)$ и $y_0(s)$ — функции, определяющие равновесную форму контура (они находятся из решения статической задачи), $N_0(s)$ — окружное нормальное усилие в состоянии равновесия, $\xi(s, t)$ и $\eta(s, t)$ — проекции на оси x и y перемещения произвольной точки контура при колебаниях, $N_*(s, t)$ — динамическая добавка нормального усилия.

Подставляя (2.1) в (1.1) и (1.2) и пренебрегая величинами второго порядка малости с учетом условий равновесия, получим

$$
\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(N_0 \frac{\partial \xi}{\partial s} + N_* \frac{dx_0}{ds}\right) + p \frac{\partial \eta}{\partial s} \\
\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(N_0 \frac{\partial \eta}{\partial s} + N_* \frac{dy_0}{ds}\right) - p \frac{\partial \xi}{\partial s}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$$\frac{dx_0}{ds}\frac{\partial \xi}{\partial s}+\frac{dy_0}{ds}\frac{\partial \eta}{\partial s}=0 \tag{2.3}$$

Далее вместо перемещений ξ и η используются нормальное и тангенциальное перемещения (фиг. 2):

$$\begin{aligned} u &= \xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi \\ v &= \xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для удобства перейдем от аргумента s к аргументу φ с помощью (1.3); с учетом (2.4) получим

$$\begin{aligned} &\rho\frac{C}{(p+q\cos\varphi)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=-q\cos\varphi\left(v-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial N_\lambda}{\partial\varphi} \\ &\rho\frac{C}{(p+q\cos\varphi)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(p+q\cos\varphi)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)- \\ &\qquad -N_\lambda-q\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}-v\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$u=-\frac{\partial v}{\partial\varphi} \tag{2.6}$$

Исключая из этих уравнений функции N_λ и u, получаем дифференциальное уравнение относительно перемещения v

$$\begin{aligned} &\rho\frac{C}{(p+q\cos\varphi)^2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^4 v}{\partial t^2\partial\varphi^2}-\frac{2q\sin\varphi}{p+q\cos\varphi}\frac{\partial^3 v}{\partial t^2\partial\varphi}\right]+ \\ &\quad+(p+q\cos\varphi)\frac{\partial^4 v}{\partial\varphi^4}-2q\sin\varphi\frac{\partial^3 v}{\partial\varphi^3}+ \\ &\quad+(p+q\cos\varphi)\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}-2q\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial\varphi}=0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Принимая по методу Фурье

$$v(\varphi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(\varphi)\,T_n(t) \tag{2.8}$$

и разделяя переменные, получим два уравнения

$$\frac{d^2T_n}{dt^2}+k_n^2T_n=0 \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &(1+\alpha\cos\varphi)\frac{d^4V_n}{d\varphi^4}-2\alpha\sin\varphi\frac{d^3V_n}{d\varphi^3}+ \\ &\quad+\left[1+\alpha\cos\varphi+\frac{\lambda_n^2}{(1+\alpha\cos\varphi)^2}\right]\frac{d^2V_n}{d\varphi^2}+ \\ &\quad+2\alpha\sin\varphi\left[\frac{\lambda_n^2}{(1+\alpha\cos\varphi)^3}-1\right]\frac{dV_n}{d\varphi}-\frac{\lambda_n^2}{(1+\alpha\cos\varphi)^2}V_n=0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\lambda_n^2 = \rho \dfrac{Ck_n^2}{p^2}$, $\alpha = q/p$, k_n — постоянная разделения, имеющая смысл собственной частоты.

3. Уравнение (2.10) описывает собственные формы колебаний и представляет собой линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. В частности, если $\alpha = 0$ (то есть без учета собственного веса), вместо (2.10) получается линейное уравнение с постоянными коэффициентами; его решение имеет вид [3]

$$V_n^{(0)} = c_{1n} \sin z_{1n}\varphi + c_{2n} \cos z_{1n}\varphi + c_{3n} \operatorname{sh} z_{2n}\varphi + c_{4n} \operatorname{ch} z_{2n}\varphi \tag{3.1}$$

где

$$z_{1n} = \sqrt{\sqrt{\beta_n^2 + 2\beta_n - 1} + \beta_n}$$

$$z_{2n} = \sqrt{\sqrt{\beta_n^2 + 2\beta_n - 1} - \beta_n}$$

$$2\beta_n = 1 + (\lambda_n^{(0)})^2, \qquad (\lambda_n^{(0)})^2 = \rho \frac{L (k_n^{(0)})^2}{2 \gamma_0 p}$$

$k_n^{(0)}$ — собственная частота при $\alpha = 0$. В противоположном случае, когда $p \to 0$, то есть $\alpha \to \infty$, из (2.10) получается уравнение для собственной формы колебаний тяжелой оболочки (цепи), не испытывающей внутреннего давления, ее равновесное состояние описывается цепной линией [1], [2]:

$$\cos\varphi \frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} - 2\sin\varphi \frac{d^3 V_n}{d\varphi^3} + \left[\cos\varphi + \frac{(\lambda_n^{(1)})^2}{\cos^2\varphi}\right] \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} +$$
$$+ 2\sin\varphi \left[\frac{(\lambda_n^{(1)})^2}{\cos^2\varphi} - 1\right] \frac{dV_n}{d\varphi} - \frac{(\lambda_n^{(1)})^2}{\cos^2\varphi} V_n = 0 \tag{3.2}$$

где

$$(\lambda_n^{(1)})^2 = \rho \frac{(k_n^{(1)})^2 C}{q^2}, \qquad C = \frac{L}{2} \frac{q^2}{\operatorname{tg} \varphi_0}$$

Приближенное решение уравнения (3.2) и определение собственных частот колебаний тяжелой цепи приведено в работе [1]. В промежуточных случаях, близких к случаю $q = 0$, то есть при $\alpha \ll 1$, собственные частоты оболочки можно приближенно определить из уравнения (2.10) методом Галеркина. Для этого примем в качестве базисных функций выражения (3.1) при соответствующих граничных условиях, то есть решения вырожденной задачи ($\alpha = 0$).

Решение уравнения (2.10) ищем в виде

$$V_r = \sum_{n=1}^{r} a_n V_n^{(0)} \tag{3.3}$$

где r — число членов, удерживаемых в разложении.

При этом получится система алгебраических уравнений линейных и однородных относительно постоянных a_n. Приравняв нулю определитель этой системы, получим частное уравнение. Для определения двух первых частот примем $r = 2$; тогда получим: $V_2 = a_1 V_1^{(0)} + a_2 V_2^{(0)}$, где

$$V_1^{(0)} = (\operatorname{ch} z_{21}\varphi_0/\cos z_{11}\varphi_0)\cos z_{11}\varphi - \operatorname{ch} z_{21}\varphi$$

$$V_2^{(0)} = (\operatorname{sh} z_{22}\varphi_0/\sin z_{12}\varphi_0)\sin z_{12}\varphi - \operatorname{sh} z_{22}\varphi$$

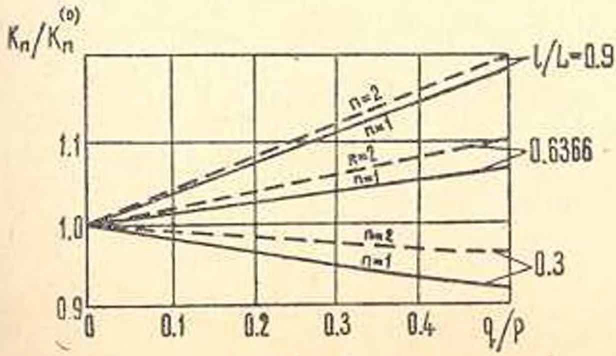
базисные (координатные) функции, которые удовлетворяют граничным условиям при $\varphi = \pm\varphi_0$, $V_1^{(0)} = \dfrac{dV_1^{(0)}}{d\varphi} = 0$, $V_2^{(0)} = \dfrac{dV_2^{(0)}}{d\varphi} = 0$. Подставив в уравнение (2.10), умножив на $V_n^{(0)}$ $(n = 1, 2)$ и проинтегрировав от $-\varphi_0$ до φ_0, получим систему алгебраических уравнений относительно a_1 и a_2:

$$\begin{aligned} a_1\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}(A_1 + \lambda_n^2 B_1)\,V_1^{(0)}d\varphi + a_2\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}(A_2 + \lambda_n^2 B_2)\,V_1^{(0)}d\varphi = 0 \\ a_1\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}(A_1 + \lambda_n^2 B_1)\,V_2^{(0)}d\varphi + a_2\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}(A_2 + \lambda_n^2 B_2)\,V_2^{(0)}d\varphi = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$A_n = (1 + \alpha\cos\varphi)\left(\frac{d^4V_n^{(0)}}{d\varphi^4} + \frac{d^2V_n^{(0)}}{d\varphi^2}\right) - 2\alpha\sin\varphi\left(\frac{d^3V_n^{(0)}}{d\varphi^3} + \frac{dV_n^{(0)}}{d\varphi}\right)$$

$$B_n = \frac{1}{(1 + \alpha\cos\varphi)^2}\left(\frac{d^2V_n^{(0)}}{d\varphi^2} + \frac{2\alpha\sin\varphi}{1 + \alpha\cos\varphi}\frac{dV_n^{(0)}}{d\varphi} - V_n^{(0)}\right)$$



Фиг. 3.

Из условия существования нетривиального решения системы (3.4) получим уравнение для определения частот. Результаты машинного решения частотного уравнения для трех частных случаев $l/L = 0.3$; 0.6366; 0.9 показаны на фиг. 3, где n—номер частоты (вычисления были выполнены на ЭЦВМ «Наири-К»).

4. В качестве общего заключения можно отметить, что коэффициент, оценивающий влияние собственного веса на первую и вторую собственную частоту, практически пропорционален отношению q/p и близок к единице. При $q/p<0.14$ влияние веса на собственную частоту становится меньше, чем 5% даже при $l/L=0.9$. Это позволяет считать, что обычное пренебрежение весом во многих случаях вполне обосновано.

Ленинградский ордена Ленина
кораблестроительный институт

Поступила 4 I 1977

Ա. Ա. ՉԱԽՈՅԱՆ

ՓԱՓՈՒԿ ԵՎ ԾԱՆՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՆԵՐՔԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Բերվում է փափուկ գլանային թաղանթի սեփական տատանումների վերաբերյալ հարթ խնդրի լուծումը ներքին ճնշման և թաղանթի սեփական կշռի հաշվառման դեպքում։

Թաղանթը համարվում է անմոմենտ և չձգվող, իսկ ճնշումը՝ չփոփոխվող։ Մի քանի մասնավոր դեպքերի համար որոշվել է տատանման հաճախականության վրա թաղանթի սեփական կշռի ազդեցությունը գնահատող գործակիցը։

NATURAL FREQUENCIES OF A SOFT HEAVY-WEIGHT CYLINDRICAL SHELL UNDER THE INFLUENCE OF INNER PRESSURE

A. A. TCHAKHOYAN

Summary

The solution of a plane problem of natural vibration of a soft cylindrical shell, considering its weight and inner pressure, is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saxon D. and Cahn A. S.* Modes of vibration of a suspended chain. (Quarterly Journal of Mechanics and applied Mathematics September, 1953, vol. 4, part. 3.
2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., 1961
3. *Чахоян А. А.* Собственные частоты безмоментной цилиндрической оболочки при действии внутреннего давления. Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. XXX, № 1.